

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ**

КУРС ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «Информатика и компьютерная техника»

Для студентов инженерного направления
ускоренной формы обучения

**Использование систем компьютерной
математики для инженерных расчетов**

МОДУЛЬ 2

Утверждено
на заседании методического совета
кафедры прикладной математики
Протокол № 9 от 19 января 2012 г.

Краматорск 2012

Математические модели и численные методы

1. Инженерные задачи

Особенностью инженерных задач является то, что при их решении задействован весь арсенал математики, как-то: решение уравнений и систем уравнений, нахождение экстремумов, вычисление производных и интегралов, решение дифференциальных уравнений и т.д.

Одним из способов решения является эксперимент.

Поэтому первая стадия работы — это формулировка математической модели (постановка задачи). Исследование начинается с построения соответствующей математической модели: выделяются наиболее существенные черты и свойства и описываются с помощью математических соотношений. Для физического процесса модель обычно состоит из уравнений, описывающих процесс; в эти уравнения в виде коэффициентов входят характеристики тел или веществ, участвующих в процессе.

Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно, то, какие бы методы мы ни применяли для расчета, все выводы будут недостаточно надежны, а в некоторых случаях могут оказаться совершенно неправильными.

Вторая стадия работы — это математическое исследование.

В зависимости от сложности модели применяются различные математические подходы.

На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей математической задачи не удастся. Это происходит главным образом потому, что искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных или др. известных функциях.

Поэтому важное значение приобрели численные методы. Под ними подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и некоторым логическим действиям над числами, т.е. к тем действиям, которые выполняет ЭВМ.

В истории прикладной математики можно выделить три основных периода.

Первый начался 3—4 тысячи лет назад. Он был связан с ведением конторских книг, вычислением площадей и объемов, расчетами простейших

механизмов; иными словами — с несложными задачами арифметики, алгебры и геометрии.

Второй период начался с Ньютона. В этот период решались задачи астрономии, геодезии и расчета механических конструкций, сводящиеся либо к обыкновенным-дифференциальным уравнениям, либо к алгебраическим системам с большим числом неизвестных.

Третий период начался примерно с 1940 г. Военные задачи — например, наводка зенитных орудий на быстро движущийся самолет— требовали недоступных человеку скоростей и привели к разработке электронных систем. Появились электронные вычислительные машины (ЭВМ).

Скорость даже простейших ЭВМ настолько превосходила скорость механических средств, что стало возможным проводить вычисления огромного объема. Это позволило численно решать новые классы задач; например, процессы в сплошных средах, описываемые уравнениями в частных производных.

В настоящее время созданы специальные математические пакеты, позволяющие решать такие задачи в численном виде. Мы рассмотрим пакет MathCAD, обладающий возможностями численного и аналитического решения математических задач.

ТЕМА 1 Погрешности при замене точного решения приближенным

Решение, полученное численным методом, обычно является приближенным, т.е. содержит некоторую погрешность. Инженерные задачи отличаются тем, что исходные их коэффициенты определяются из эксперимента и редко имеют точность выше 1%.

Источниками погрешности приближенного решения являются:

- несоответствие математической модели реальному явлению;
- погрешность исходных данных (входных параметров);
- погрешность метода решения;
- погрешности округлений в арифметических и др. действиях над числами.

Погрешность вычислений в физике и технике достигает 1-10%. Если, например, величина напряжения равна 220,6483759 В, то можно сказать, что несколько младших цифр этого значения недостоверны, что обусловлено точностью измерительного

прибора. Если рациональное число $\frac{1}{3}$ представить в виде конечной десятичной дроби, то такое представление не будет точным, так как это число представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Погрешность в решении, обусловленная первыми двумя источниками, называется неустранимой.

Эта погрешность может присутствовать, даже если решение поставленной математической задачи найдено точно. Критерием проверки адекватности модели реальному процессу является практика.

Влияние погрешности исходных данных часто удается оценить, варьируя исходные данные в пределах их погрешностей и фиксируя решения.

Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными, т.е. даже при отсутствии погрешностей во входных данных и при идеальном выполнении арифметических действий они дают решение исходной задачи с некоторой погрешностью, называемой погрешностью метода. Часто используемый численный метод строится на базе бесконечного процесса, который в пределе приводит к искомому решению.

Вопросом, наиболее сложным технически, является учет погрешностей округления в арифметических действиях.

Численный метод может считаться удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникающая за счет округлений, называемая вычислительной погрешностью, по крайней мере в несколько раз меньше погрешности метода.

Величина $\delta_{абс}=|a-a^*|$ называется *абсолютной погрешностью*, где a – точное числовое значение некоторой величины, a^* - приближенное значение.

Величина $\delta_{отн} = \delta_{абс} / |a^*|$ - *относительная погрешность*. Обычно известно ограничение сверху, например $\delta_{абс} < 10^{-5}$.

Абсолютная погрешность приближенного числа вполне характеризуется числом верных цифр после запятой, а относительная погрешность – числом верных значащих цифр. Замечание: значащими цифрами числа являются цифры, расположенные справа от первой отличной от нуля цифры (включая ее); цифра a_j называется верной, если $\delta_{\text{абс}} = 10^j$, то есть абсолютная погрешность числа = одной единицы соответствующего разряда десятичного числа.

Пример 1.1.

Число 3,14 – приближенное значение числа $\pi = 3,14159$. Его погрешность $\Delta(a^*) = |3,14159 - 3,14| = 0,00159$. Предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность равной $\frac{0,0016}{3,14} = 0,00051 = 0,051(\%)$.

РАБОТА С ПРОГРАММОЙ Smath Studio.

Программа предназначена для проведения математических расчетов.

Программа состоит из 3 областей:

- Основное меню
- Инструментальная панель
- Рабочее поле

3.1 Основное меню.

-состоит из основных команд для работы с документом в целом, такие как вставить, вырезать, открыть, сохранить... а также содержит математический справочник и набор примеров.

а) Панель «Арифметика»

Содержит цифры, математические символы, и основные операции: оператор присвоения « := »; Оператор численного вычисления « = »; Оператор символьного вычисления « \rightarrow » позволяет вычислять символьный результат,

б) панель «Матрицы»

Содержит команды для работы с матрицами. Позволяет находить определитель матрицы, транспонировать ее, находить минор. А также содержит команду векторного умножения,

в) Панель «Булева»

Эта панель содержит набор для команд для булевой алгебры. А также позволяет задавать логические операции в командах ветвления и циклах.

г) Панель «Функции»

Содержит набор часто используемых функций, таких как \sin , \cos , \log и т.п. А также 2 кнопки «2d» и «3d», эти кнопки позволяют вставить соответственно 2-х мерные и 3-х мерные графики.

д) Панель «График»

Эта панель позволяет вращать, перемещать, увеличивать/уменьшать графики функций.

Двумерные графики строятся по переменной x , а трехмерные по 2 переменных x , y (переменные должны вводиться в нижнем регистре).

в) Панель «Программирование»

Содержит 4 функции программирования, таких как: ветвление «IF», циклы «WHILE» и «FOR» и вспомогательная функция «LINE»

3.3 Рабочее поле и первый расчет:

Рабочее поле занимает самую большую часть программы, здесь мы будем задавать исходные данные. Основным элементом поля является курсор или Фокус ввода (место где будет набираться выражение) он выглядит как красный крестик.

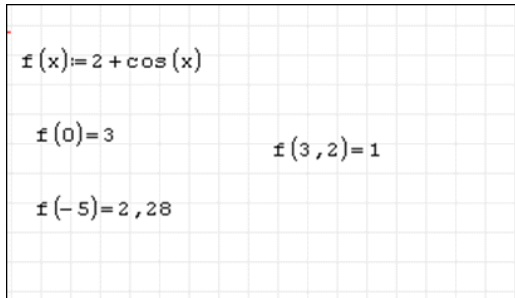
Задание: найти значение функции в двух произвольных точках.

Построить график этой функции на произвольном отрезке.

найти значение функции $f(x)=2+\cos(x)$ в двух произвольных точках.

Построить график этой функции на произвольном отрезке. Получить

таблицу значений функции на этом отрезке с произвольным шагом.

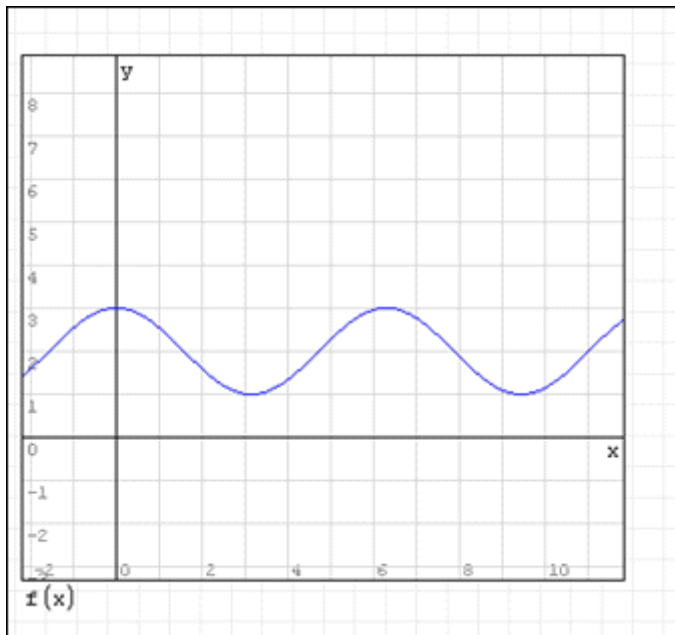


Задаем функцию, находим значения функции в произвольных точках.

2. Находим значения функции на интервале

3. Строим график функции, с помощью панели

«график» изменить масштаб и расположение графика:



$j := 1 \dots 11$

$x := 1; 1,2 \dots 3$

for $k \in j$
 $y_k := f(x_k)$

$x =$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1,4 \\ 1,6 \\ 1,8 \\ 2 \\ 2,2 \\ 2,4 \\ 2,6 \\ 2,8 \\ 3 \end{pmatrix}$	$y =$	$\begin{pmatrix} 2,54 \\ 2,36 \\ 2,17 \\ 1,97 \\ 1,77 \\ 1,58 \\ 1,41 \\ 1,26 \\ 1,14 \\ 1,06 \\ 1,01 \end{pmatrix}$
-------	---	-------	--

ТЕМА 2 Решение уравнений с одной переменной

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на **алгебраические** и **трансцендентные**.

Если функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, где a_0, a_1, \dots, a_n - любые действительные числа, то уравнение называется **алгебраическим**. Уравнение называется **трансцендентным**, если $f(x)$ включает функции $a^x, \log_a x, \sin(x), \operatorname{tg}(x)$ и т.п.

Любой уравнение с одним неизвестным могут быть написаны в форме $f(x)=0$.

Решение уравнения называется значением (корень уравнения), при котором $f(x)=0$.

Решить уравнение означает следующее.

1. Установить имеет ли уравнение корни.
2. Определить число корней уравнения.
3. Найти значения корней уравнения с заданной точностью.

□ Необходимое условие существования корня уравнения (1.1) и достаточное условие единственности следуют из известной теоремы Больцано–Коши.

Пусть $F(x)$ непрерывна и $F(a)F(b) < 0$ (т.е. на концах интервала функция имеет разные знаки). Тогда внутри отрезка $[a, b]$ существует корень уравнения $F(x) = 0$. Корень будет единственным, если $F(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция.

Отделение корней

Отделение корней — процедура нахождения отрезков, на которых уравнение) имеет только одно решение.

Теоретической основой отделения корней уравнения $f(x) = 0$ является II теорема Вейерштрасса: внутри отрезка $[a;b]$ оси x имеется единственный корень уравнения $f(x) = 0$, если:

- 1) функция $f(x)$ непрерывна внутри отрезка $[a;b]$;
- 2) на концах отрезка $f(x)$ имеет значения разных знаков: $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- 3) $f'(x)$ знакопостоянна на отрезке $[a;b]$: $\forall x \in [a;b] \quad f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$.

Существуют различные способы исследования функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ состоит в нахождении экстремумов функции $F(x)$, исследовании ее поведения при $x \rightarrow \infty$, нахождении участков возрастания и убывания функции.

Табличный способ – это построение таблицы, состоящей из столбца аргумента x и столбца значений функции $F(x)$. О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции. Чтобы не произошло потери корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения – достаточно большим.

Графический способ – это построение графика функции $F(x)$ и определение числа корней по количеству пересечений графика с осью x .

В большинстве случаев отделение корней можно провести графически. Для этого достаточно построить график функции $p(x)$ и определить отрезки, на которых функция $p(x)$ имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс.

Методы решения уравнения

Методы решения уравнения (1.1) можно разделить на **точные** (аналитические) и **приближенные** (итерационные). Точными методами корень находится за конечное число действий и представляется некоторой алгебраической формулой.

Процесс нахождения решения приближенными методами бесконечен.

Решением называется бесконечная последовательность $\{x_n\}$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

По определению предела, для любого сколь угодно малого наперед заданного ε найдется такое N , что при $n > N$ $|x_n - x^*| < \varepsilon$. **Члены этой последовательности $\{x_n\}$ называются последовательными приближениями к решению, или итерациями.** Наперед заданное число ε называют точностью метода, а N – это количество итераций, которое необходимо выполнить, чтобы получить решение с точностью ε .

Существуют различные методы нахождения приближенного решения, т.е. способы построения последовательности итераций $\{x_n\}$

Если при любых входных данных численный метод позволяет найти решение задачи за конечное число арифметических операций, то такой метод называется прямым. Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим наиболее эффективные из них.

1. **Дихотомия (деление пополам).** Пусть мы нашли такие точки x_0, x_1 , что $f(x_0)f(x_1) < 0$, т. е. на отрезке $[x_0, x_1]$ лежит не менее одного корня уравнения. Найдем середину отрезка $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ и вычислим $f(x_2)$. Из двух половин отрезка выберем ту, для которой $f(x_2)f(x_{\text{гран}}) < 0$. ибо один из корней лежит на этой половине. Затем новый отрезок опять делим пополам и выберем ту половину, на концах которой функция имеет разные

знаки, и т. д.

2. Метод простых итераций (метод последовательных приближений).

для вычисления следующего приближения необходимо знать только одно предыдущее приближение. С помощью эквивалентных преобразований приведем исходное уравнение (1.1) к виду, удобному для применения метода простой итерации: $x = \varphi(x)$. Выберем начальное приближение $x_0 \in [a, b]$. Следующие итерации находим по формуле: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Итерационный процесс заканчивается, если $|\varphi(x_k) - x_k| < \varepsilon$ или, что то же самое, $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

3. Метод Ньютона.(касательных) Он называется также методом касательных или методом линеаризации. Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика $y = f(x)$ касательной к нему.

4. Метод хорд. В этом методе кривая $F(x)$ заменяется прямой линией – хордой, стягивающей точки $(a, F(a))$ и $(b, F(b))$. В зависимости от знака выражения $F(a)F''(a)$ метод хорд имеет два решения.

Стандартные функции Smath

А) решение нелинейных уравнений

1 способ. Записать уравнение на листе программы, затем выделить переменную уравнения (чаще всего "x") и в меню программы выбрать "Вычисление" >> "Найти корни". После этого под записанным уравнением появится строчка ответа(ов), т.е. корней уравнения.

2 способ. Используя функцию "**solve([уравнение];[переменная])**". После записи данной функции на листе программы достаточно, не убирая с уравнения курсор, выполнить действие численного вычисления (кнопка "=" на клавиатуре или на панели программы). Само уравнение, записанное в качестве первого аргумента функции **solve(...)** может быть записано без правой части (т.е., к примеру: "**x+2**") или вместе с ней ("**x+2=0**"), однако следует помнить, что в случае записи полного вида уравнения, с правой частью, вместо обычного знака "=" между левой и правой частями уравнения необходимо писать знак булево равно (выглядит, как жирное равно) с булевой панели инструментов программы.

Б) решение линейных уравнений

Если функция $f(x)$ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ – полином, то все его корни

можно определить, используя встроенную функцию `polyroots(v)`, где v – вектор, составленный из коэффициентов полинома. Поскольку полином N -й степени имеет ровно N корней (некоторые из них могут быть кратными), вектор v должен состоять из $N+1$ элемента. Результатом действия функции `polyroots` является вектор, составленный из N корней рассматриваемого полинома.

Функция `polyroots` возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные.

Задание:

1) Найти корень уравнения $y(x) = \exp(x) + 2 \cdot \sin(x)$ численно и, если это возможно, аналитически. Результаты сравнить. Выполнить проверку.

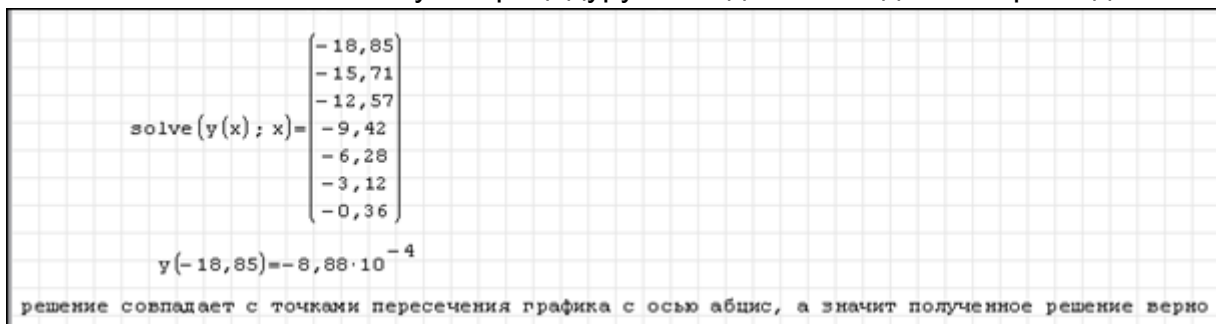
2) Найти численно корни полинома $y(x) = x^3 - 10x^2 + 4x + 9$. Выполнить проверку.

Задание 1

1. Задаем функцию, строим график на произвольном отрезке



2. Используем процедуру `solve` для нахождения корней данного уравнения.



3. Найдем аналитическое решение, делаем проверку и вывод

Задание 2

1. Задаем вектор полинома и с помощью функции POLYROOTS(V) находим корни полинома:

$$y(x) := x^3 - 10 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 9$$

$$v := \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 1,27 \\ 9,48 \end{pmatrix}$$

2. Проверка

ТЕМА 3 Решение систем нелинейных уравнений

Решением системы нелинейных уравнений называется совокупность (группа) чисел, которые, будучи подставлены на место неизвестных, обращают каждое уравнение системы в тождество.

Формально задача поиска решения системы уравнений

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Пример решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 - \cos(x) = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

или

Решение:

$$\text{roots} \left(\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1,18 \\ 2,76 \end{pmatrix}$$

или

$$\text{roots} \left(\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1,18 \\ 2,76 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$x := 1,18 \quad y := 2,76$$

$$x^2 - \cos(x) - 1 = 1,15 \cdot 10^{-2}$$

+

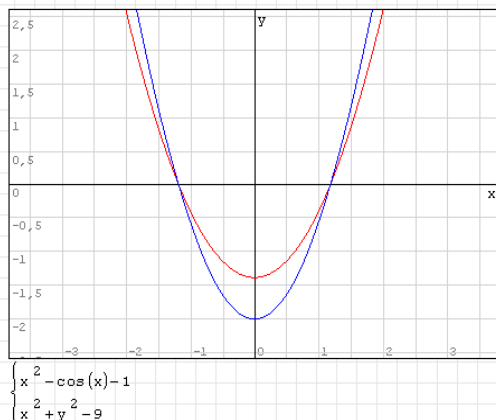
$$x^2 + y^2 - 9 = 1 \cdot 10^{-2}$$

может быть записана точно так же, как и задача поиска корня одного уравнения

$$f(x) = 0, \text{ где}$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ и } x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

функция roots находит только действительные корни уравнений



Можно задать начальные приближения и преобразовать переменные. Для этого сначала необходимо построить график, чтобы увидеть точки пересечения с осью ox

Пример решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} y^2 - \lg x^2 = 2 \\ x + y^3 = 9 \end{cases}$$

Можно задать начальные приближения и преобразовать переменные

$$\text{roots} \left(\begin{pmatrix} x_2^2 - \lg(x_1^2) - 2 \\ x_1 + x_2^3 - 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1,05 \\ 2 \end{pmatrix}$$

системы
найдено

Во многих случаях решение уравнений может быть не только численно, но и аналитически. Используют оператор для символьного вычисления

При выполнении проверки можно убедиться, что аналитическое решение более точное

$$\text{roots} \left(\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{117650193990183}{100000000000000} \\ \frac{68992042953369}{25000000000000} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -(1 - x^2 + \cos(x)) \\ -9 + x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$x := \frac{117650193990183}{100000000000000}$$

$$y := \frac{68992042953369}{25000000000000}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,19 \cdot 10^{-15} \\ -8,8 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$\text{roots} \left(\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{117650193990183}{100000000000000} \\ \frac{68992042953369}{25000000000000} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 - \cos(x) - 1 \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -(1 - x^2 + \cos(x)) \\ -9 + x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

X – вектор порядка n :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

B – вектор порядка m :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица A коэффициентов при неизвестных называется главной матрицей системы. Главным определителем системы называется определитель главной матрицы системы, составленной из коэффициентов при неизвестных.

Система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, если определитель матрицы A отличен от нуля.

Рассмотрим прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений.

Правило Крамера.

Правило Крамера используют для нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений. Если определитель $\Delta = \det A$ матрицы системы из n уравнений с n неизвестными $AX = B$ отличен от нуля, то система имеет единственное решение x_1, x_2, \dots, x_n , определяемое по формулам Крамера $x_i = \Delta_i / \Delta$,

где Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов B Размерность системы (т.е. число m) является главным фактором, из-за которого формулы Крамера не могут быть использованы для численного решения СЛАУ большого порядка.

Метод Гаусса

Наиболее известным и популярным точным способом решения линейных систем вида (1) является метод Гаусса. Этот метод заключается в последовательном исключении неизвестных и приведение к системе с треугольной матрицей.

Метод обратной матрицы.

Для решения системы линейных уравнений методом обратной матрицы запишем ее в матричном виде

$$A \cdot X = B$$

Матричные уравнения решаются при помощи обратных матриц. Уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A - невырожденная ($D \neq 0$), тогда существует обратная матрица A^{-1} . По определению обратной матрицы, это такая матрица,

что $A A^{-1} = A^{-1} A = E$, где E – единичная матрица:.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Умножив на нее обе части матричного уравнения, имеем $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Используя сочетательный закон умножения, перепишем это равенство в виде

$$(A^{-1} A) X = A^{-1} B.$$

Поскольку $A^{-1} A = E$ и $EX = X$, находим:

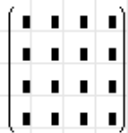
$$X = A^{-1}B.$$

Таким образом, чтобы решить матричное уравнение, нужно:

1. Найти обратную матрицу A^{-1} .
2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу столбец свободных членов B , т. е $A^{-1}B$.

Smath Studio.

Задание матрицы. функция mat()



Для изменения числа элементов в уже введенной матрице сделайте следующее:

1. поместите курсор в любое поле матрицы
2. нажмите пробел
3. курсор полностью выделит матрицу
4. в правом нижнем углу появится черный квадрат
5. потянув за эту метку-квадрат можно изменять количество строк и столбцов

Функция `det()`, Функция `transpose()`, Определение значения элемента `mn` матрицы. Функция `el(3)`, Определение числа столбцов в матрице (`cols(a)`), Определение количества строк в матрице (`rows(a)`), Определение общего количества элементов в матрице (`length(a)`), Сортировка элементов вектора в порядке возрастания (`sort(b)`), определение максим, миним. значения в матрице...

1. Задаем матрицу A и вектор B и находим определитель матрицы, делаем вывод о существовании решения системы линейных уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 0,100 & 0,080 & 1,100 & 0,950 \\ 0,100 & 0,600 & 0,133 & 0,500 \\ 2,050 & 0,667 & 0,095 & 0,300 \\ 0,057 & 1,050 & 0,333 & 0,500 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 14,883 \\ 11,389 \\ 49,799 \\ 16,365 \end{pmatrix}$$
$$|A| = 0,59$$

2. Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4,59 \cdot 10^{-2} & -0,15 & 0,5 & -0,23 \\ -0,34 & -0,79 & 1,55 \cdot 10^{-2} & 1,42 \\ 0,77 & -3,25 & 7,25 \cdot 10^{-2} & 1,75 \\ 0,19 & 3,85 & -0,14 & -2,12 \end{pmatrix}$$

3. Находим решение $X=A^{(-1)} \cdot B$ и делаем проверку

$$X := A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10,01 \\ 6,67 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} 14,88 \\ 11,39 \\ 49,8 \\ 16,37 \end{pmatrix}$$

Минор $A \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k \end{bmatrix}$ матрицы A — определитель квадратной матрицы порядка k (который называется также порядком этого минора), элементы которой стоят в матрице A на пересечении строк с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ и столбцов с номерами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$.

Например, есть матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Предположим, надо найти дополнительный минор M_{23} . Этот минор — определитель матрицы, получающейся путем вычеркивания строки 2 и столбца 3:

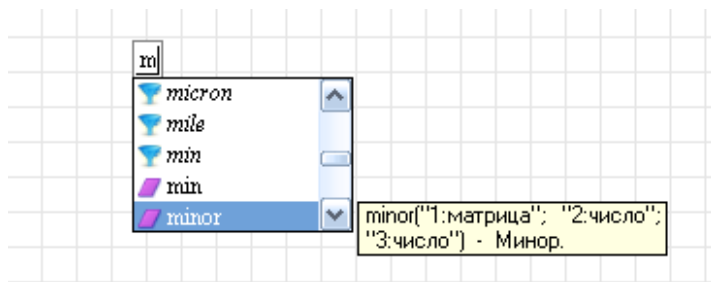
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & \square \\ \square & \square & \square \\ -1 & 9 & \square \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{вычеркивание}} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = (9 - (-4)) = 13$$

Получаем $M_{23} = 13$

$$M_{23} = 13$$

Нахождение минора в Smath Вставка- Функция -minor

Или



Численное интегрирование и дифференцирование

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке).

Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке). Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**. Обратный процесс — **интегрирование**.

По определению производная функции $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрический и физический смысл производной

- 1) Если функция $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечную производную в точке x_0 , то в окрестности $U(x_0)$ её можно приблизить линейной функцией

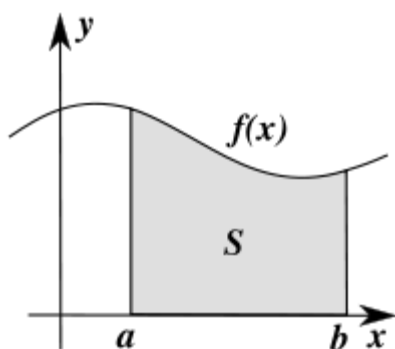
$$f_l(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Функция f_l называется касательной к f в точке x_0 . Число $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом или тангенсом угла наклона касательной прямой.

- 2) Пусть $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда $v(t_0) = s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени t_0 . Вторая производная $a(t_0) = s''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени t_0 .

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0 , то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y = f(x)$.

Численное интегрирование— вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое), основанное на том, что величина интеграла численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, графиком интегрируемой функции и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, где a и b — пределы интегрирования (см. рисунок).



Определённый интеграл как площадь фигуры

Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная

$F(x)$ функции $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Неопределённый интеграл— это общее выражение $F(x) + C$ для всех первообразных функций от данной функции $f(x)$:

$$F(x) + C = \int f(x) dx$$

Основное свойство

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Основные правила интегрирования

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Основная идея большинства методов численного интегрирования состоит в замене подынтегральной функции на более простую, интеграл от которой легко вычисляется аналитически. При этом для оценки значения интеграла получаются формулы вида

$$I \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

где n — число точек, в которых вычисляется значение подынтегральной функции. Точки x_i называются узлами метода, числа w_i — весами узлов. При замене подынтегральной функции на полином нулевой, первой и второй степени получаются соответственно методы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона). Часто формулы для оценки значения интеграла называют квадратурными формулами.

Программа Smath дает возможность численного и аналитического решения производных и интегралов.

Дифференцирование

Функция diff(2)

$$\frac{d}{dz} (3 \cdot z^3 + 4 \cdot z^2 + 7 \cdot z + 3) \rightarrow 7 + z \cdot (8 + 9 \cdot z)$$

Производная высших порядков. Функция diff(3)

$$\frac{d^2}{dz^2} (3 \cdot z^3 + 4 \cdot z^2 + 7 \cdot z + 3) \rightarrow 8 + 18 \cdot z$$

$$\frac{d}{d} \square$$

d

diff (3)

dm

dpi

dyna

e

diff("1:выражение"; "2:переменная";
"3:число") - Находит производную порядка
"3:число" от выражения "1:выражение" по переменной
"2:переменная".
Нажмите TAB для вставки

$$\frac{d}{d} \square$$

d

diff (2)

diff (3)

dm

dpi

dyna

diff("1:выражение"; "2:переменная")
- Дифференцирование выражения "1:выражение"
по переменной "2:переменная".
Нажмите TAB для вставки

$$\int \square d \square$$

$$f(x) := \sin(x)^2$$

$$x := 6$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -0,54$$

$$n := 3$$

$$f(x1) := \sin(x1)^2$$

$$\frac{d^n}{dx1^n} f(x1) \rightarrow -8 \cdot \sin(x1) \cdot \cos(x1)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = 2,15$$

$$f(x) := \frac{(2^{x+1} - 5^{x-1})}{10^x}$$

$$\int_2^5 f(x) dx = 1,45$$

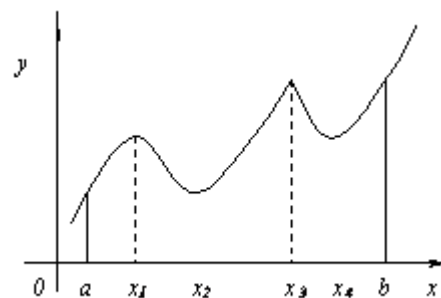
Пример

+

НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Экстрéмум (лат. *extremum* — крайний) в математике — *максимальное* или *минимальное* значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*. Соответственно, если достигается минимум — точка экстремума называется *точкой минимума*, а если максимум — *точкой максимума*.

Рассмотрим график непрерывной функции $y=f(x)$, изображенной на рисунке. Значение функции в точке x_1 будет больше значений функции во всех соседних точках как слева, так и справа от x_1 . В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум. В точке x_3 функция, очевидно, также имеет максимум. Если рассмотреть точку x_2 , то в ней значение функции меньше всех соседних значений. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум. Аналогично для точки x_4 .



Функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет *максимум*, если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0 , т.е. если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Функция $y=f(x)$ имеет *минимум* в точке x_0 , если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Необходимое условие существования экстремума.

Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то ее производная в этой точке обращается в нуль.

Достаточное условие существования экстремума. (Первый признак).

Пусть функция непрерывна на некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то в точке $x = x_0$ функция имеет максимум. Если же при переходе через x_0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом, если

- а. $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка максимума;
- б. $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка минимума.

Правило исследования функции $y=f(x)$ на экстремум

1. Найти область определения функции $f(x)$.
2. Найти первую производную функции $f'(x)$.
3. Определить критические точки, для этого:
 - а. найти действительные корни уравнения $f'(x)=0$;
 - б. найти все значения x при которых производная $f'(x)$ не существует.
4. Определить знак производной слева и справа от критической точки. Так как знак производной остается постоянным между двумя критическими точками, то достаточно определить знак производной в какой-либо одной точке слева и в одной точке справа от критической точки.
5. Вычислить значение функции в точках экстремума.

Достаточное условие. (Второй признак).

Нередко более удобным на практике оказывается другой признак существования экстремума, основанный на выяснении знака второй производной в стационарной точке. Справедлива следующая теорема: Если x_0 есть стационарная точка функции $f(x)$

и $f'(x) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимума если $f'(x) > 0$, то функция имеет в точке x_0 минимум.

Таким образом получаем правило нахождения экстремумов (для дважды дифференцируемых функций):

1. Вычисляем первую производную $f'(x)$ и из уравнения $f'(x) = 0$ находим стационарные точки функции $f(x)$.

2. Вычисляем вторую производную, и каждую стационарную точку x_0 подвергаем испытанию: - если $f''(x) > 0$, то x_0 точка минимума функции; - если $f''(x) < 0$, то x_0 точка максимума функции.

Замечание 1 : если $f''(x) = 0$, то это правило теряет силу и нужно воспользоваться первым признаком нахождения экстремумов. При этом экстремум может существовать, а может и не существовать.

Пример нахождения экстремума функции

Задание: найти экстремум функции $y = (x-2)^2$

Записываем функцию

$$f(x) := (x-2)^2$$

Находим 1-ю производную

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 2 \cdot (-2 + x)$$

Находим значение переменной x , в которой производная равна нулю

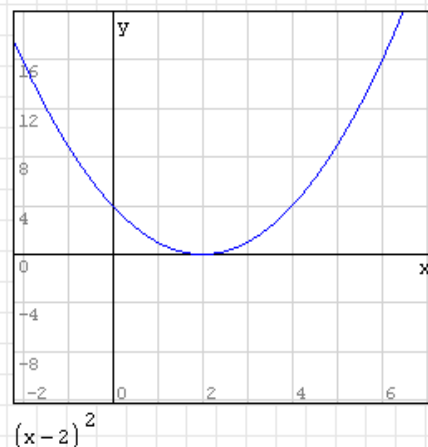
$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx} f(x); x\right) = 2 \quad \text{или} \quad \text{solve}(2 \cdot (-2 + x); x) = 2$$

Проверяем знак 2-ой производной в этой точке

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \left((x-2)^2 \right) = 2$$

Вторая производная $= 2 > 0$, поэтому $x = 2$ - это точка минимума



$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

который обращает уравнения систем (1.2) или (1.3) в тождество.

Дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений могут иметь бесконечное множество решений. Для однозначного определения решения необходимо задать дополнительные условия. К дополнительным условиям относятся начальные и граничные условия. Для однозначного определения решения уравнения n —го порядка необходимо задать n начальных или граничных условий.