РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 621.7.011

Тітов А. В.
Михалевич В. М.

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ДЕФОРМІВНОСТІ

Розвиток та впровадження високоефективних технологій обробки матеріалів тиском (ОМТ) суттєво стримується через недостатньо розвинутий розрахунковий апарат механіки формоутворення, що включає визначення залежностей показників якості отримуваних виробів від параметрів технологічних процесів з можливістю оцінки граничних значень ресурсних властивостей матеріалів.

Серед підходів до оцінки граничних деформацій за умов пластичного деформування значного розвитку та широкого використання отримала теорія деформівності [1, 2], що входить до складу теорій підсумовування пошкоджень [3, 4]. Перші результати, що покладено в основу сучасної теорії деформівності, з'явилися в середині минулого століття. За останні десятиліття ця теорія отримала значного розвитку, широкого впровадження та загального визнання [5, 6, 7, 8, 9].

Проте і до сьогодні обмеженість замкнутих аналітичних розв'язків, що отримані в цій теорії стримує більш широке та ефективне її впровадження в практику обробки матеріалів тиском.

Метою роботи є формулювання математичної моделі основної задачі теорії деформівності та розробка методу знаходження її аналітичного розв'язку у замкнутому вигляді.

В теорії деформівності вирішується дві задачі: 1) дослідження граничних деформацій матеріалу в умовах стаціонарного деформування; 2) оцінка граничного стану матеріалу при нестаціонарних процесах деформування [10].

Дослідження граничних деформацій матеріалу в умовах стаціонарного деформування традиційно представляються у вигляді апроксимацій кривих або поверхонь граничних деформацій в залежності від безрозмірних показників напруженого стану. Такі апроксимації будуються на основі величин граничних деформацій, що визначаються експериментально для окремих значень показників напруженого стану. Відомі спроби побудувати апроксимації граничних кривих на основі певних теоретичних міркувань, проте отримані результати не набули широкого використання.

Друга задача може бути розв'язана на основі розв'язаної першої задачі та використання певної моделі підсумовування пошкоджень. В технологічних процесах формозмінення в переважній більшості випадків реалізується нестаціонарне деформування, тому в [10, 11] цю задачу пропонується вважати *основною задачею теорії деформівності*.

Історично першою та найпростішою моделлю підсумовування пошкоджень для визначення граничних деформацій при пластичному деформуванні є модель В. Л. Колмогорова:

$$\psi\left(e_i\right)=\int_0^{e_i}\frac{dx}{e_{*c}\left[\eta\left(x\right)\right]}\ , \tag{1}$$

$$\psi(0) = 0, \psi(e_*) = 1, \quad (2)$$

де ψ – використаний ресурс пластичності, що характеризує міру пошкодженості матеріалу та змінюється від 0 в початковому стані до 1 в момент досягнення граничного стану;

e_i, e_* – накопичена деформація та її значення в момент досягнення граничного стану;

η – безрозмірний показник напруженого стану:

$$\eta = \frac{3 \cdot \sigma_0}{\sigma_i}, \quad (3)$$

σ_0 – середнє напруження;

σ_i – інтенсивність напружень;

$e_{*c}(\eta)$ – крива граничних деформацій при стаціонарному деформуванні (діаграма пластичності);

$\eta = \eta(e_i)$ – траєкторія деформацій (шлях деформування).

Значно більш широкий спектр закономірностей зміни граничних деформацій описують тензорні моделі, що базуються на нелінійних законах підсумовування пошкоджень. В [4] отримано та досліджено велику кількість критеріальних співвідношень стосовно окремих класів деформування, які фактично є замкненими аналітичними розв’язками основної задачі теорії деформівності. Зазвичай вказані класи деформування представляють кусково-сталі функції зміни показників напруженого стану з ростом накопиченої деформації. Проте і до сьогодні відсутні замкнені аналітичні розв’язки основної задачі теорії деформівності стосовно класів деформування, які представляються шляхами деформування:

$$e_i = e_i(\eta) \in C_1[a,b], \quad (4)$$

тобто, гладкими кривими. Тут $C_1[a,b]$ – множина функцій, що мають на $[a,b]$ неперервні похідні першого порядку. Саме такого типу кривими представляються шляхи деформування в різних матеріальних точках заготовки під час конкретних технологічних процесів ОМТ.

Що ж до процесів багатоетапного деформування, для яких отримано аналітичні розв’язки, вони є певними наближеннями реальних шляхів деформування, що реалізуються під час пластичного формозмінення в різних точках заготовок та описуються здебільшого функціями класу (4). Використання вказаних наближень є вимушеним за відсутності аналогічних розв’язків більш точних моделей. За допомогою процесів багатоетапного деформування можна досягти доволі високої точності апроксимації траєкторії типу (4). Продемонструємо це на основі прикладу вісесиметричного осадження циліндричних зразків між плоскими шорсткими плитами.

На рис. 1 представлено шлях деформування для точок бічної поверхні циліндричних зразків у середній по висоті області, що представляє залежність накопиченої деформації від безрозмірного показника напруженого стану. Цей шлях представлений співвідношенням типу (4) та отриманий експериментально-аналітичним методом [8, 11].

На рис. 1 зображують можливі наближення реального шляху деформування двох-, трьох- та багатоетапними траєкторіями деформування. Отримання вказаних траєкторій реалізовано в автоматизованому вигляді на основі спеціально створеної програми в середовищі системи комп’ютерної математики (СКМ) Maple.

Всі траєкторії у вигляді кусково-сталих функцій на рис. 1, за винятком схеми двоетапного деформування, насправді представляють циклічне деформування зі сталою амплітудою (накопиченою деформацією) на кожному етапі. Величина зміни безрозмірного показника напруженого стану при переході від поточного до наступного етапу при заданій амплітуді в загальному випадку не є сталою і визначається формою шляху деформування згідно умови, що неперервна крива проходить через середини горизонтальних відрізків траєкторії циклічного деформування.

Одним із ключових компонентів цієї програми є процедура числового визначення за заданим значенням накопиченої деформації параметра для параметрично заданої залежності (4). Необхідність числового розв’язання нелінійного рівняння виникає при використанні залежностей (4), які неможливо представити у вигляді:

$$\eta = e_i^{-1}\left(e_i\right) . \tag{5}$$

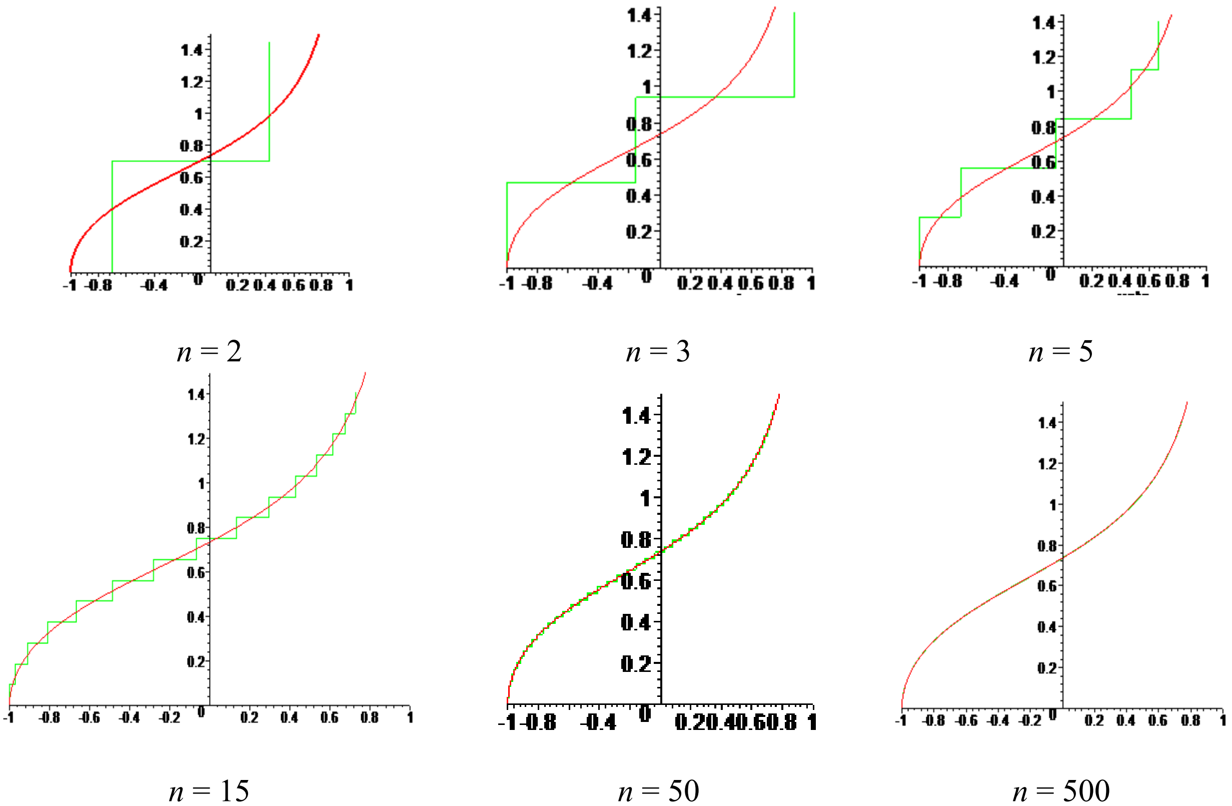


Рис. 1. Представлення гладкої кривої шляху деформування (4) наближеними апроксимаціями кусково-сталими функціями (n – кількість етапів)

В спеціально створеній процедурі реалізовано алгоритм числового знаходження коренів нелінійних рівнянь комбінованим методом хорд та дотичних. Слід зауважити, що СКМ Maple має стандартну команду *fsolve* для числового розв’язання нелінійних рівнянь та систем. Проте числові експерименти показали, що власноруч розроблена програма в десятки разів більш швидкодіюча у порівнянні із застосуванням стандартної команди.

Подібний підхід з аналогічним обґрунтуванням для вирішення іншої задачі запроваджено і в [8, 12].

Ідея дослідження граничних деформацій наближеними моделями у вигляді циклічного деформування є оригінальною, оскільки в літературі відсутні відповідні критеріальні співвідношення стосовно операції осадження за вказаних умов. Без сумніву отримання та дослідження таких співвідношень заслуговує окремого дослідження. Відправною точкою цього дослідження можуть слугувати математичні моделі, алгоритми та програми, описані у цій праці.

Теоретичне дослідження закономірностей зміни граничних деформацій стосовно процесів багатоетапного деформування породжує менше труднощів у порівнянні з процесами, що описуються траєкторіями типу (4). При цьому можуть бути отримані аналітичні розв’язки при застосуванні тензорних моделей підсумовування пошкоджень, що надає можливості відображення незрівнянно більш широкого спектра закономірностей у порівнянні зі скалярними моделями підсумовування пошкоджень. В той же час, практичне значення для досліджуваного технологічного процесу отриманих у такий спосіб результатів може бути знівельовано невисокою відповідністю реального шляху деформування його наближенню поетапною схемою. Тому важливо мати аналітичні розв'язки стосовно траєкторій типу (4) для здійснення порівнянь, визначення меж застосування різних наближень та проектування на цій основі технологічних рішень практичних задач.

Далі вважатимемо функції $\eta = \eta(e_i)$ та $\psi = \psi(e_i)$ заданими, а функцію $e_{*c} = e_{*c}(\eta)$ – невідомою. Оскільки невідома функція входить під знак інтеграла, матимемо найпростіше *інтегральне рівняння*.

Дослідимо умови існування розв'язку побудованого інтегрального рівняння. За фізичним змістом невідома функція задовольняє умові:

$$e_{*c} > 0\,, \tag{6}$$

накопичена деформація E невід'ємна за означенням, отже:

$$\forall e_i \in (0, e_*) : \psi(e_i) \in (0,1). \tag{7}$$

Продиференціюємо обидві частини рівності (1):

$$\psi'(e_i) = \frac{1}{e_{*c}\left[\eta(e_i)\right]}. \tag{8}$$

З урахуванням додатності граничних деформацій (6), з останнього співвідношення випливає, що функція $\psi = \psi(e_i)$ є монотонно зростаючою в області визначення. Для визначення невідомої функції $e_{*c} = e_{*c}(\eta)$ маємо розв'язати *функціональне рівняння* (8).

Далі припускатимемо, що функція $\eta = \eta(e_i)$ є монотонною в області визначення та:

$$\eta_0 = \eta(0), \quad \eta_1 = \eta(e_*), \tag{9}$$

тоді існує обернена функція:

$$e_i = \eta^{-1}(\eta), \quad \eta \in [\eta_0, \eta_1]. \tag{10}$$

У цьому випадку на основі (8) отримаємо:

$$e_{*c}[\eta] = \frac{1}{\psi'\left(\eta^{-1}(\eta)\right)}. \tag{11}$$

Розглянемо описаний метод на конкретному прикладі. Для цього необхідно вибрати конкретний аналітичний вираз для шляху деформування.

В [13] розроблено підхід до конструювання множини апроксимацій кривих граничних деформацій та пропонується використовувати їх для розв'язання основної задачі теорії деформівності з подальшим порівнянням результатів для отримання висновків щодо достовірності останніх.

Це свідчить, що існує деяка довільність вибору конкретних аналітичних виразів як для шляхів деформування, так і для кривих граничних деформацій. Вдалий підбір вказаних апроксимацій може забезпечити отримання адекватного експериментальним даним та зручного для теоретичного дослідження і практичного використання аналітичного розв’язку основної задачі теорії деформівності.

Припустимо, що шлях деформування можна подати у вигляді:

$$e_i\left(\eta\right)=a\cdot\left(\eta+1\right)^b,\ \eta\geq-1, \tag{12}$$

де $a > 0$, $b > 0$.

Очевидно, що вказана крива проходитиме через дві точки:

$$e_i\left(-1\right)=0,\quad e_i\left(0\right)=a. \tag{13}$$

Знайдемо перші дві похідні:

$$e_i'\left(\eta\right)=a\cdot b\cdot\left(\eta+1\right)^{b-1}>0,\ \eta>0, \tag{14}$$

$$e_i''\left(\eta\right)=a\cdot b\cdot\left(b-1\right)\cdot\left(\eta+1\right)^{b-2} \tag{15}$$

та дослідимо знак другої похідної:

$$\begin{cases} e_i''\left(\eta\right)>0,\ \mathrm{b}>1 \\ e''\left(\eta\right)<0,\ \mathrm{b}<1, \end{cases} \quad \eta>-1. \tag{16}$$

Отже крива, що зображує шлях деформування, буде опуклою при $b < 1$ та угнутою при $b > 1$.

У цьому випадку співвідношення (5) набуває вигляду:

$$\eta\left(e_i\right)=\left(\frac{e_i}{a}\right)^{\frac{1}{b}}-1. \tag{17}$$

Припустимо, що накопичення пошкоджень з ростом накопиченої деформації відбувається за квадратичним законом, тоді матимемо:

$$\psi\left(e_i\right)=\int_0^{e_i}\frac{dx}{e_{*c}\left[\eta\left(x\right)\right]}=a_0\cdot e_i+\frac{1}{2}\cdot a_1\cdot e_i^2, \tag{18}$$

звідки випливає рівняння для визначення граничної деформації, структура якого не залежить від вигляду апроксимації траєкторії типу (4):

$$E_*^2+\frac{2\cdot a_0}{a_1}\cdot E_*-\frac{2}{a_1}=0. \tag{19}$$

На основі диференціювання обох частин другого рівняння (18) отримаємо:

$$e_*^2 + \frac{2 \cdot a_0}{a_1} \cdot e_* - \frac{2}{a_1} = 0 , \tag{20}$$

а з використанням (12), (17) отримаємо шукану апроксимацію кривої граничних деформацій:

$$e_{*c}\left(\eta\right) = \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot a \cdot \left(\eta + 1\right)^b} , \tag{21}$$

де a_0, a_1 – параметри, що визначаються експериментально.

Традиційно для визначення вказаних параметрів можуть бути використанні граничні значення:

$$e_{*c}\left(\eta = -1\right) = e_c, e_{*c}\left(\eta = 0\right) = e_s . \tag{22}$$

Із (21), (22) випливає:

$$a_0 = \frac{1}{e_c}, a_1 \cdot a = \frac{e_c - e_s}{e_c \cdot e_s} \tag{23}$$

і апроксимація кривої граничних деформацій (21) набуває вигляду:

$$e_{*c}\left(\eta\right) = \frac{1}{\frac{1}{e_c} + \frac{e_c - e_s}{e_c \cdot e_s} \cdot \left(\eta + 1\right)^b} . \tag{24}$$

Звернемо увагу, що форма отриманої кривої залежить від числових значень параметра *b*, які в свою чергу визначається формою шляху деформування.

Розв'язанням рівняння (19) з урахуванням рівностей (23) отримаємо аналітичний розв'язок основної задачі теорії деформівності у вигляді явної алгебраїчної залежності граничної деформації при поточному нестаціонарному деформуванні від параметрів кривої граничних деформацій та шляху деформування:

$$e_* = \sqrt{\left(\frac{a \cdot e_s}{e_c - e_s}\right)^2 + \frac{2 \cdot a \cdot e_c \cdot e_s}{e_c - e_s}} - \frac{a \cdot e_s}{e_c - e_s} . \tag{25}$$

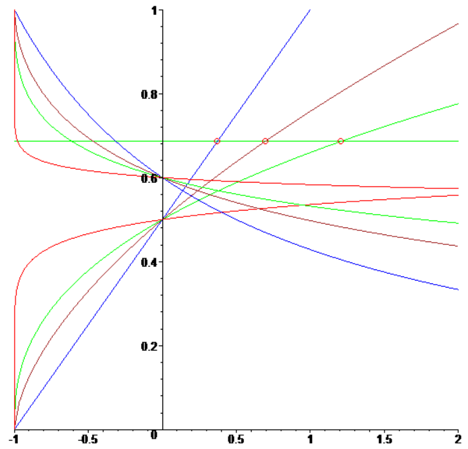
Проаналізуємо отримані співвідношення.

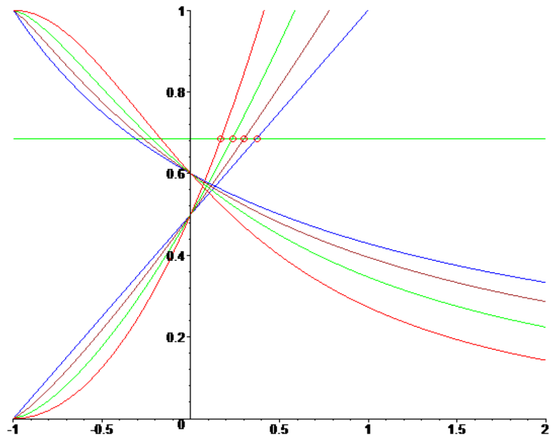
Згідно (25) гранична деформація виявилась незалежною від параметра *b.* Це, як продемонстровано на рис. 2, означає, що для різних шляхів деформування, які проходять через одні й ті самі точки (13) і одного й того самого матеріалу, що характеризується величинами e_c, e_s, гранична деформація буде однаковою. Іншими словами граничні точки різних шляхів деформування лежатимуть на горизонтальній прямій і матимуть координати:

$$e_* = C_1, \eta = \left(C_2\right)^{\frac{1}{b}} - 1 , \tag{26}$$

де

$$C_1 = const, C_2 = \frac{e_*}{a} = const . \tag{27}$$





b = 1, 1.2, 1.5, 2 b = 0.1, 0.4, 0.6, 1

Рис. 2. Граничні криві стаціонарного деформування (розрахунок за (24)), шляхи деформування (розрахунок за (12)) та відповідні граничні деформації (розрахунок за (25))

ВИСНОВКИ

Наявність аналітичного розв’язку основної задачі теорії деформівності у замкнутому вигляді суттєво спрощує отримання розв’язків багатьох інших теоретично та практично значущих задач і тим самим стимулює їх постановку. До них можуть бути віднесені, зокрема, задачі побудови для даного процесу обробки тиском аналітичних співвідношень для граничних значень технологічних параметрів в залежності від властивостей матеріалу; обернена задача до основної задачі теорії деформівності та задача відновлення залежності між компонентами тензора деформацій та компонентами тензора напружень на основі відомої залежності для шляху деформування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дель Г. Д. Технологическая механика / Г. Д. Дель. – М. : Машиностроение, 1978. – 174 с.*

2. *Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. – К. : УМК ВО, 1989. – 152 с.*

3. *Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности / А. А. Ильюшин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 21–35.*

4. *Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. – 195 с.*

5. *Огородников В. А. Энергия. Деформация. Разрушение (задачи автотехнической экспертизы) / В. А. Огородников, В. Б. Киселёв, И. О. Сивак. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 196 с.*

6. *Михалевич В. М. Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 188 с. – ISBN 978-966-641-238-9.*

7. *Матвийчук В. А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов : монография / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. – Краматорск : ДГМА, 2009. – 268 с.*

8. *Михалевич В. М. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні : монографія / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 180 с. – ISBN 978-966-641-532-8.*

9. *Михалевич В. М. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости [Текст] / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія "Машинобудування". – Київ : НТУУ "КПІ", 2010. – С. 142–145.*

10. *Постановка и решение частного случая основной задачи теории суммирования повреждений / [В. М. Михалевич, В. А. Матвийчук, Е. А. Трач, Ю. В. Добранюк, В. С. Зайкова] // Вісник Національного технічного університету "ХПІ" : збірник наукових праць. Тематичний випуск : Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків : НТУ "ХПІ", 2012. – № 47(953). – С. 67–71.*

11. *Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, Yu. V. Dobranyuk // Strength of Materials. – Volume 43, Number 6 (2011), P. 591–603. – DOI: 10.1007/s11223-011-9332-7.*

12. Михалевич В. М. Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, О. В. Михалевич // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. − № 2. – Київ : Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. − 2009. − 7 с. − Режим доступу до журн.: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm.

13. Михалевич В. М. Аппроксимация кривых предельной деформации сплайн-функциями / В. М. Михалевич, Л. И. Алиева // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2010. – № 3(24). – С. 3–10.

REFERENCES

1. Del' G. D. Tehnologicheskaja mehanika / G. D. Del'. – M. : Mashinostroenie, 1978. – 174 s.

2. Ogorodnikov V. A. Deformiruemost' i razrushenie metallov pri plasticheskom formoizmenenii / V. A. Ogorodnikov. – K. : UMK VO, 1989. – 152 s.

3. Il'jushin A. A. Ob odnoj teorii dlitel'noj prochnosti / A. A. Il'jushin // Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela. – 1967. – № 3. – S. 21–35.

4. Mihalevich V. M. Tenzorni modeli nakopichennja poshkodzhen' / V. M. Mihalevich. – Vinnicja : UNIVERSUM-Vinnicja, 1998. – 195 s.

5. Ogorodnikov V. A. Jenergija. Deformacija. Razrushenie (zadachi avtotehnicheskoj jekspertizy) / V. A. Ogorodnikov, V. B. Kiseljov, I. O. Sivak. – Vinnicja : UNIVERSUM-Vinnicja, 2005. – 196 s.

6. Mihalevich V. M. Matematichne modeljuvannja mehaniki formoutvorennja pri holodnomu torcevomu rozkochuvanni / V. M. Mihalevich, V. O. Kraevs'kij. – Vinnicja : UNIVERSUM-Vinnicja, 2008. – 188 s. – ISBN 978-966-641-238-9.

7. Matvijchuk V. A. Sovershenstvovanie processov lokal'noj rotacionnoj obrabotki davleniem na osnove analiza deformiruemosti metallov : monografija / V. A. Matvijchuk, I. S. Aliev. – Kramatorsk : DGMA, 2009. – 268 s.

8. Mihalevich V. M. Modeljuvannja napruzheno-deformovanogo ta granichnogo staniv poverhni cilindrichnih zrazkiv pri torcevomu stisnenni : monografija / V. M. Mihalevich, Ju. V. Dobranjuk. – Vinnicja : VNTU, 2013. – 180 s. – ISBN 978-966-641-532-8.

9. Mihalevich V. M. Postanovka i reshenie optimizacionnyh zadach v teorii deformiruemosti [Tekst] / V. M. Mihalevich, V. O. Kraєvs'kij // Visnik nacional'nogo tehnichnogo universitetu Ukraini "Kiivskij politehnichnij institut". Serija "Mashinobuduvannja". – Kiiv : NTUU "KPI", 2010. – S. 142–145.

10. Postanovka i reshenie chastnogo sluchaja osnovnoj zadachi teorii summirovanija povrezhdenij / [V. M. Mihalevich, V. A. Matvijchuk, E. A. Trach, Ju. V. Dobranjuk, V. S. Zajkova] // Visnik Nacional'nogo tehnichnogo universitetu "HPI" : zbirnik naukovih prac'. Tematichnij vipusk : Novi rishennja v suchasnih tehnologijah. – Harkiv : NTU "HPI", 2012. – № 47(953). – S. 67–71.

11. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, Yu. V. Dobranyuk // Strength of Materials. – Volume 43, Number 6 (2011), P. 591–603. – DOI: 10.1007/s11223-011-9332-7.

12. Mihalevich V. M. Pobudova efektivnih obchisljuval'nih shem u Maple pid chas rozv'jazannja zadachi viznachennja granichnih deformacij za umov skladnogo deformuvannja [Elektronnij resurs] / V. M. Mihalevich, Ju. V. Dobranjuk, O. V. Mihalevich // Naukovi praci Vinnic'kogo nacional'nogo tehnichnogo universitetu. − № 2. – Kiiv : Nacional'na biblioteka im. V. I. Vernadskogo. − 2009. − 7 s. − Rezhim dostupu do zhurn.: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm.

13. Mihalevich V. M. Approksimacija krivyh predel'noj deformacii splajn-funkcijami / V. M. Mihale-vich, L. I. Alieva // Obrabotka metallov davleniem : sbornik nauchnyh trudov. – Kramatorsk : DGMA, 2010. – № 3(24). – S. 3–10.

Тітов А. В. – канд. техн. наук, доц. НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»;

Михалевич В. М. – д-р техн. наук, проф., зав. каф. ВМ ВНТУ.

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського» – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ.

ВНТУ – Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

E-mail: avt.kpi@gmail.com; vmykhal@gmail.com.

Стаття надійшла до редакції 01.06.2017 г.