

Бейгельзимер Э. Е.
Бейгельзимер Я. Е.

ПРОСТОЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ЗНАЧЕНИЯМ В НЕРАВНООТСТОЯЩИХ ТОЧКАХ

Предложена эвристическая формула 5-точечной аппроксимации первой производной неизвестной функции, значения которой измерены с погрешностью в неравноотстоящих точках. Расчет производной в данной точке выполняется по эффективным приращением функции и аргумента, учитывающим разные весовые коэффициенты для ближних и удаленных точек измерений. Для определения рациональных значений весовых коэффициентов применено имитационное моделирование на тестовых функциях с известными производными. Детально описаны результаты моделирования на двух тестовых функциях, одна из которых имитирует процесс водяного охлаждения горячего стального листа, вторая – сложный колебательный процесс с переменной частотой и амплитудой. Установлено, что оптимальные значения весовых коэффициентов остаются примерно одинаковыми для существенно разных функций, что позволяет рекомендовать одну и ту же формулу для всех случаев. В отличие от классических методов численного дифференцирования функций, табулированных в неравноотстоящих узлах, предложенная формула одновременно учитывает сглаживание эмпирических данных. Показано, что это существенно повышает точность численной оценки производной даже в тех случаях, когда случайная погрешность измерения функции составляет весьма малую величину, - от $\pm 1\%$. Полученная формула рекомендуется к использованию при решении любых задач ОМД, требующих оценки производной эмпирической функции, в том числе при расчете напряженно-деформированного состояния металла, описании тепловых процессов, определении теплофизических свойств материалов.

Ключевые слова: математическое моделирование, производная табулированной функции, неравноотстоящие узлы, погрешность измерений, сглаживание эмпирических данных.

В практике инженерных исследований часто возникает необходимость оценить первую производную некоторой неизвестной функции, которая табулирована в неравномерно распределенных эмпирических точках. Например, такая задача возникает при определении напряженно-деформированного состояния металла в процессах обработки давлением [1; 2], при оценке теплового потока на основе значений температуры, измеренной в разные моменты времени [3-6], при расчете дифференциальных показателей свойств материалов после оцифровки графиков соответствующих интегральных характеристик, измеренных экспериментально [7-9]. Для решения таких задач обычно применяют один из двух подходов.

Первый подход заключается в аппроксимации эмпирических данных аналитической функцией, а затем вычислении производной этой функции, используя методы аналитического дифференцирования. Однако во многих случаях удовлетворительно описать эмпирические данные аналитической функцией невозможно, по крайней мере, в широком интервале изменения аргумента. Поэтому описанный выше подход к поиску производной часто не может быть реализован на практике.

Второй подход заключается в нахождении конечно-разностной производной с использованием методов численного дифференцирования [10; 11, с. 433, 450]. Одним из наиболее распространенных способов численного дифференцирования при неравноотстоящих узлах является использование интерполяционных полиномов Лагранжа. Например, при оценке первой производной функции по трем точкам используется следующее выражение:

$$(y'_i)_{3uL} = y_{i-1} \frac{X_{i,i+1}}{X_{i-1,i}X_{i-1,i+1}} + y_i \frac{X_{i,i-1} + X_{i,i+1}}{X_{i,i-1}X_{i,i+1}} + y_{i+1} \frac{X_{i,i-1}}{X_{i+1,i-1}X_{i+1,i}} \quad (1)$$

где y'_i – оценка первой производной исследуемой (y) в i -й точке массива данных; $X_{j,k}$ – интервальная разность аргумента:

$$X_{j,k} = x_j - x_k \quad (2)$$

x и y с подстрочными индексами – измеренные значения аргумента и функции в соответствующих точках (например, $X_{i,i+1} = x_i - x_{i+1}$).

Подстрочные индексы в обозначении первой производной в левой части означают, что оценка этой производной выполнена по трем (3) неравноотстоящим (u от англ. «unequally») точкам с использованием интерполяционных полиномов Лагранжа (L).

Для уточнения результата используют более трех эмпирических точек. Например, формула для 5-точечной численной оценки первой производной в случае неравных интервалов между точками выглядит следующим образом [12]:

$$(y'_i)_{5uL} = D_{i-2} + D_{i-1} + D_i + D_{i+1} + D_{i+2} \quad (3)$$

где

$$D_{i-2} = y_{i-2} \frac{X_{i,i-1}X_{i+1,i}X_{i+2,i}}{X_{i-2,i-1}X_{i-2,i}X_{i-2,i+1}X_{i-2,i+2}} \quad (4)$$

$$D_{i-1} = y_{i-1} \frac{X_{i,i-2}X_{i+1,i}X_{i+2,i}}{X_{i-1,i-2}X_{i-1,i}X_{i-1,i+1}X_{i-1,i+2}} \quad (5)$$

$$D_i = y_i \frac{(X_{i,i-1} + X_{i,i-2})X_{i+1,i}X_{i+2,i} - X_{i,i-2}X_{i,i-1}(X_{i+1,i} + X_{i+2,i})}{X_{i,i-2}X_{i,i-1}X_{i,i+1}X_{i,i+2}} \quad (6)$$

$$D_{i+1} = y_{i+1} \frac{X_{i,i-2}X_{i-1,i}X_{i+2,i}}{X_{i+1,i-2}X_{i+1,i-1}X_{i+1,i}X_{i+1,i+2}} \quad (7)$$

$$D_{i+2} = y_{i+2} \frac{X_{i,i-2}X_{i-1,i}X_{i+1,i}}{X_{i+2,i-2}X_{i+2,i-1}X_{i+2,i}X_{i+2,i+1}} \quad (8)$$

остальные обозначения – те же, что и в формулах (1) и (2).

Приведенные выше конечно-разностные формулы для вычисления $(y'_i)_{3uL}$ и $(y'_i)_{5uL}$ в случае анализа эмпирических данных имеют один принципиальный недостаток. Он заключается в том, что производная вычисляется по полиномам, которые проходят через табулированные значения функции. Хорошо известно, что любая экспериментально найденная функция всегда имеет некоторую погрешность в своих значениях, которая может очень сильно сказываться на величине ее производной. По этой причине, численное дифференцирование должно быть сопряжено со сглаживанием экспериментальных данных. В работе [13, с. 327] приведены формулы для дифференцирования эмпирически определенных функций с одновременным сглаживанием, но они пригодны лишь для равноотстоящих значений аргумента и для достаточно плавно меняющейся функции (вторая производная которой близка к нулю).

Целью работы является поиск эффективного способа оценки производной эмпирической функции в условиях двух обстоятельств: 1) неравные интервалы между точками измерения функции и 2) погрешность самих измеренных значений функции.

В качестве такого эффективного способа авторы предлагают простую формулу 5-точечной аппроксимации первой производной функции в i -той точке:

$$(y'_i)_{5uS} = \frac{Y_{i+2,i-2} + nY_{i+1,i-1}}{X_{i+2,i-2} + nX_{i+1,i-1}} \quad (9)$$

где $Y_{j,k}$ – интервальная разность измеренных значений y :

$$Y_{j,k} = y_j - y_k \quad (10)$$

например, $Y_{i+2,i-2} = y_{i+2} - y_{i-2}$; n – весовой коэффициент, определяющий степень влияния ближайших точек (x_{i-1} and x_{i+1}) относительно дальних (x_{i-2} and x_{i+2}). Подстрочные индексы $5uS$ в обозначении производной в левой части выражения (9) означают, что оценка производится по пяти (5) неравноотстоящим (u) точкам по простой (S от англ. «Simple») формуле.

Формула (9) не имеет строгого обоснования и является эвристической. Выражения в ее числителе и знаменателе представляют собой некоторые эффективные значения приращения функции и приращения ее аргумента. Коэффициент n учитывает разный «вес» приращений, связанных с разным расстоянием точек от той точки, где вычисляется производная. Ниже будет показано, что для достаточно различных функций, хорошие результаты дает одно и то же значение n . Для определения рациональных значений весового коэффициента n авторы применили имитационное моделирование на тестовых функциях с известными производными.

В качестве одной из таких тестовых функций использована функция следующего вида:

$$y(x) = a_1 \operatorname{arctg}(x - a_2) \quad (11)$$

с теоретической первой производной:

$$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{a_1}{1 + (x - a_2)^2} \quad (12)$$

где a_1 и a_2 – постоянные параметры.

Итак, предположим, что мы экспериментально исследуем некоторый физический процесс, который на самом деле подчиняется закону тестовой функции (11). Например, это может быть процесс водяного охлаждения стального листа после нагрева или прокатки (см., например, [14]). В этом случае x может обозначать время [с], а y – температуру [°C]. Сама функция (11) неизвестна, и мы оцениваем ее, измеряя в эксперименте значения y при некоторых дискретных значениях x . Вопрос состоит в том, насколько точно мы можем оценить производную (12) (в нашем примере эта производная означает скорость охлаждения) по формуле (9) и какое значение весового коэффициента n обеспечит наиболее точное соответствие?

При ответе на этот вопрос примем во внимание, что измерения температуры выполняются с некоторыми погрешностями. Чтобы учесть это, при имитационном моделировании каждое «измеренное» значение связали с истинной температурой следующей зависимостью:

$$y_i = y(x_i)(1 + 2(\delta_i - 0,5)\varepsilon) \quad (13)$$

где y_i – результат измерений неизвестной температуры $y(x)$ в i -й момент времени x_i ; δ_i – равномерно распределенное случайное число от 0 до 1; ε – односторонний предел ошибки измерений в долях единицы ($0 < \varepsilon < 1,0$).

Учитывая, что моменты времени дискретных измерений могут быть распределены неравномерно, при имитационном моделировании шаг между соседними значениями аргумента приняли как случайно распределенную величину:

$$h_i = h_m(1 + 2(\rho_i - 0,5)\Delta) \quad (14)$$

где h_i – шаг между двумя соседними значениями аргумента (h -шаг), т.е. $h_i = x_i - x_{i-1}$; h_m – базовое (среднее) значение h -шага; ρ_i – равномерно распределенное случайное число от 0 до 1; Δ – односторонний предел относительной вариации h -шага в долях единицы ($0 < \Delta < 1,0$).

На рис. 1 показан пример одной реализации ("прогона") имитационной модели ускоренного охлаждения стального листа, которое гипотетически подчиняется функции (11). Изменение температуры во времени показано на рис. 1а, а изменение скорости охлаждения во времени – на рис. 1б. Значения параметров a_1 , a_2 , ε , h_m и Δ приведены в подписи к рис. 1.

Степень соответствия между конечно-разностной и теоретической производной оценивали по величине их частного относительного отклонения в каждой i -той точке:

$$r_i = \frac{y'_i - y'(x_i)}{y'(x_i)} \cdot 100\% \quad (15)$$

Используя значения r_i , полученные в одном прогоне имитационной модели для всех i , рассчитали частоту попадания r_i в определенный симметричный карман $\pm R\%$ (например, $\pm 25\%$ или $\pm 50\%$ и т. д.) в данном прогоне. Усреднив эти частоты по большому числу (N)

прогонов, вычислили статистическую вероятность P_R того, что конечно-разностная производная (9) отклонится от истинной (теоретической) производной (12) не более чем на заданное значение $\pm R$ %. Ниже по тексту Параметр R будем называть *односторонним полем отклонений*, а вероятность P_R – *обеспеченностью* поля отклонений R .

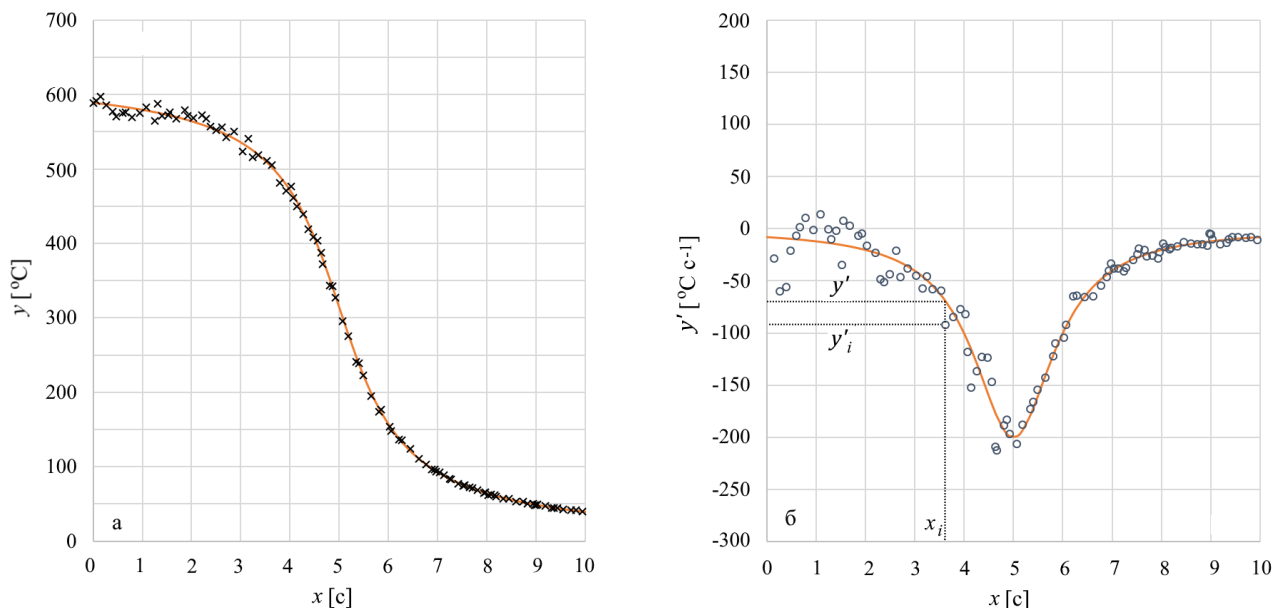


Рис. 1. Пример одной реализации («прогона») имитационной модели ускоренного охлаждения стального листа, подчиняющегося функции (11) с параметрами $a_1 = 200$ °C и $a_2 = 5$ с:

а – данные температуры: сплошная линия – график функции $y(x)$ в соответствии с (11), точки – гипотетические эмпирические данные y_i , рассчитанные по формуле (13) с $\varepsilon = 0,025$, т. е. полученные со случайными отклонениями в пределах $\pm 2,5$ % от графика $y(x)$, в неравноотстоящих точках по времени x_i с базовым шагом $h_m = 0,1$ с и пределом относительной вариации от него $\Delta = 0,75$; б – первая производная температуры по времени: сплошная линия – график функции $y'(x)$ согласно (12), точки – оценка по формуле (9) при $n = 0,75$.

Это поясняется на рис. 2, где показана выборочная функция распределения r_i и обеспеченность P_R для примера, показанного на рис. 1. Статистические характеристики, показанные на рис. 2, получены при трех различных значениях весового коэффициента в формуле (9): $n = 0$, $n = 0,75$ и $n = 4$. Например, если конечно-разностная производная по этой формуле рассчитывается при $n = 0,75$, то 81 % всех значений r_i меньше (+ 25)% и 19 % всех значений r_i меньше (-25) % (см. рис. 2а). Соответственно, 62% от всех значений r_i попадает в область \pm %, т.е. обеспеченность поля отклонений $\pm 25\%$ составляет $P_{25} = 62\%$ (см. рис. 2б). При других значениях весового коэффициента обеспеченность P_{25} имеет меньшую величину: $P_{25} = 60$ % и $P_{25} = 52$ % при $n = 0$ и $n = 4$ соответственно.

Аналогичные вычисления были проведены для других тестовых функций и параметров дискретизации ε , h_m и Δ в формулах (13)–(14). Некоторые результаты показаны на рис. 3, где представлена зависимость обеспеченности P_R от весового коэффициента n . Сплошные линии на этих графиках относятся к функции (11), а пунктирные - к другой тестовой функции, моделирующей довольно сложную зависимость (рис. 4):

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x \cdot \sin(c_3 x) \tag{16}$$

с быстро меняющейся производной:

$$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx} = 3c_1 x^2 + c_2 c_3 x \cdot \cos(c_3 x) + c_2 \cdot \sin(c_3 x) \tag{17}$$

где c_1 , c_2 и c_3 – постоянные параметры.

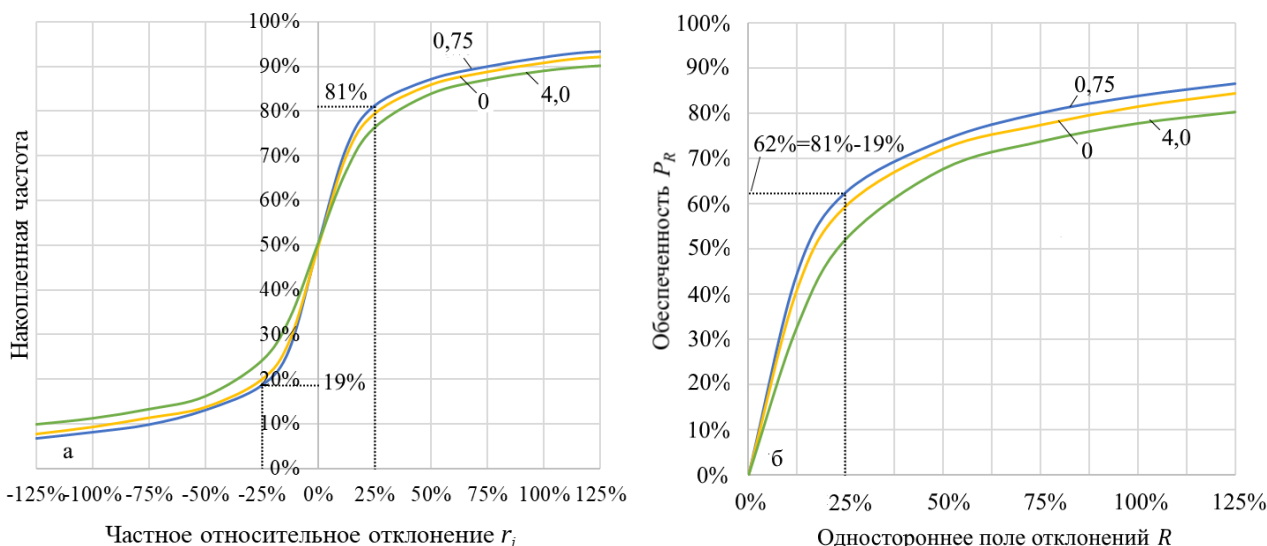


Рис. 2. Статистические характеристики распределения величины частного относительного отклонения в условиях примера, показанного на рис. 1 в выборке из 50 прогонов ($N = 50$):

а – функция распределения частного относительного отклонения r_i ; б – статистическая вероятность P_R того, что это отклонение r_i попадет в определенный симметричный карман $\pm R$ % (обеспеченность поля отклонений R). Числа у кривых означают значение весового коэффициента n в формуле (9).

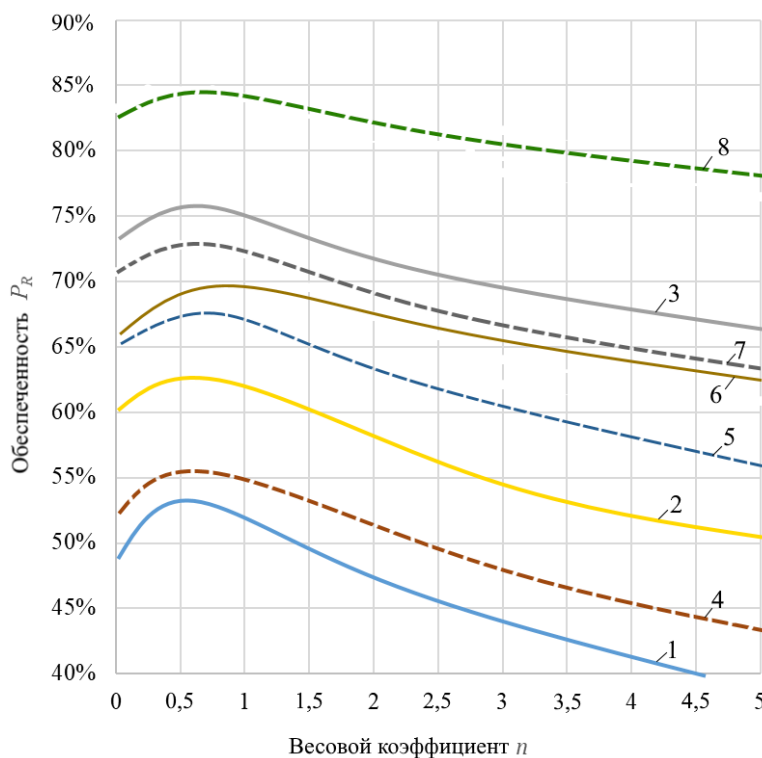


Рис. 3. Зависимость обеспеченности P_R от весового коэффициента n , полученная при имитационном моделировании процессов, подчиняющихся функции (11) с параметрами $a_1 = 200$ и $a_2 = 5$ (кривые 1-3) и функции (16) с $c_1 = 0,05$, $c_2 = 4$ и $c_3 = 1,5$ (кривые 4-8). Кривые относятся к разным значениям предельной ошибки измерений ε и параметров дискретизации в формулах (13)-(14), а также ширины поля отклонений R : 1 – $\varepsilon = 0,075$, $h_m = 0,1$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 50$ %; 2 – $\varepsilon = 0,025$, $h_m = 0,1$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 25$ %; 3 – $\varepsilon = 0,025$, $h_m = 0,2$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 25$ %; 4 – $\varepsilon = 0,05$, $h_m = 0,15$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 25$ %; 5 – $\varepsilon = 0,075$, $h_m = 0,2$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 50$ %; 6 – $\varepsilon = 0,025$, $h_m = 0,2$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 25$ %; 7 – $\varepsilon = 0,05$, $h_m = 0,15$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 50$ %; 8 – $\varepsilon = 0,05$, $h_m = 0,2$, $\Delta = 0,75$; $R = \pm 50$ %

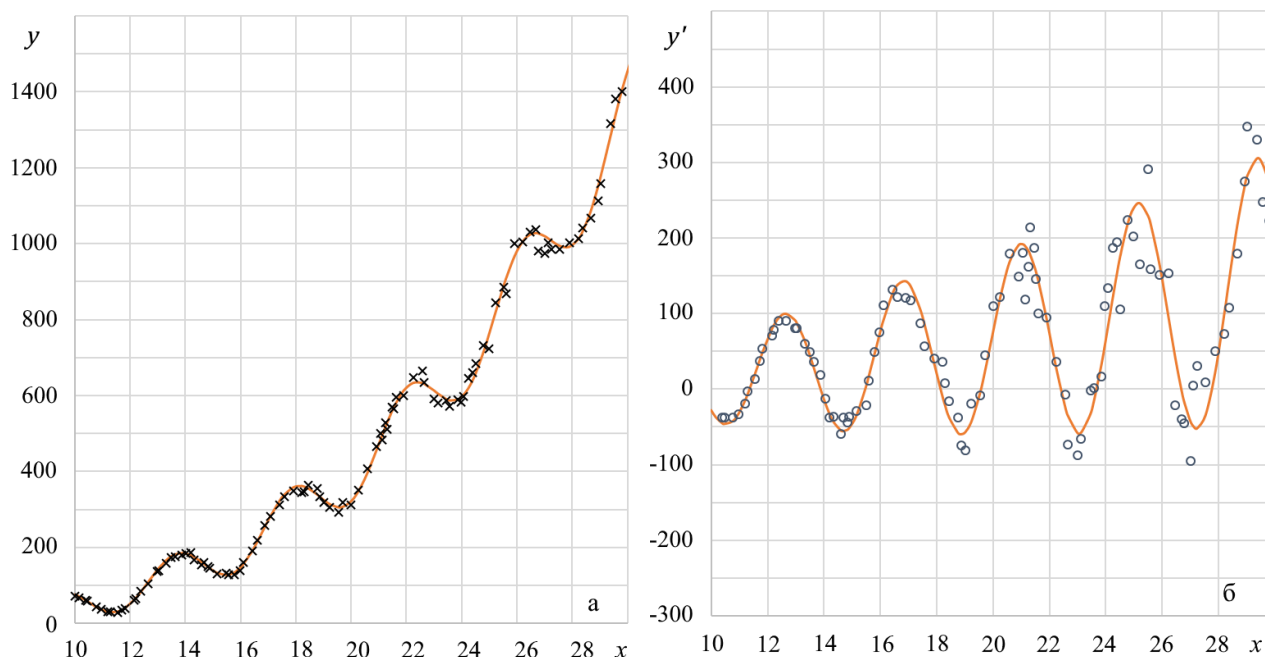


Рис. 4. Пример одной реализации («прогона») моделирования процесса, подчиняющегося функции (16) с параметрами $c_1 = 0,05$, $c_2 = 4$ и $c_3 = 1.5$:

а – данные по зависимой переменной y : сплошная линия – график функции $y(x)$ в соответствии с (16), точки – гипотетические эмпирические значения y_i рассчитанные по формуле (13) с $\varepsilon = 0,05$, т.е. полученные со случайными отклонениями в пределах $\pm 5\%$ от графика $y(x)$, в неравноотстоящих точках по времени x_i с базовым значением шага $h_m = 0,2$ и пределом его относительной вариации $\Delta = 0,75$; б – первая производная функции: сплошная линия – график функции $y'(x)$ согласно (17), точки – конечно-разностные оценки первой производной по формуле (9) при $n = 0.75$

Полученные данные показывают, что если предел случайной ошибки измерений функции составляет $\pm 2\%$ и более (т.е. $\varepsilon \geq 2\%$) для совершенно различных функций и разных параметров дискретизации (h_m, Δ) оптимальные значения весового коэффициента n находятся в узком диапазоне: примерно от 0,5 до 0,75. При значениях n внутри этого диапазона достигается наилучшее соответствие между конечно-разностными по формуле (9) и теоретическими значениями первой производной. Здесь отметим, что при $n = 0,5$ и равном шаге между точками, т.е. при $h_i = \text{const} \equiv h$, формула (9) становится идентичной выражению, приведенному в работе [13, с. 328].

Принимая $n = 2/3$ в формуле (9) как значение в середине оптимального диапазона 0,5...0,75, мы получили итоговый вид простой инженерной формулы для аппроксимации первой производной при анализе неравномерно распределенных эмпирических данных с ошибками:

$$(y'_i)_{5us} = \frac{3y_{i+2} + 2y_{i+1} - 2y_{i-1} - 3y_{i-2}}{3x_{i+2} + 2x_{i+1} - 2x_{i-1} - 3x_{i-2}} \quad (18)$$

На рис. 5 показаны результаты расчетов по формуле (18) в сравнении с результатами по формулам (1) и (3). Видно, что при малейших погрешностях измерений функции предложенная инженерная формула дает существенно более точные результаты благодаря тому, что она одновременно учитывает сглаживание эмпирических данных. Например, согласно рис. 5, а, если предел погрешности измерений функции (11) составляет $\pm 2,5\%$, то при оценке первой производной по формуле (18) обеспеченность поля отклонений $\pm 25\%$ составит выше 60%, тогда как при оценкам по формулам (1) и (3) – ниже 30%.

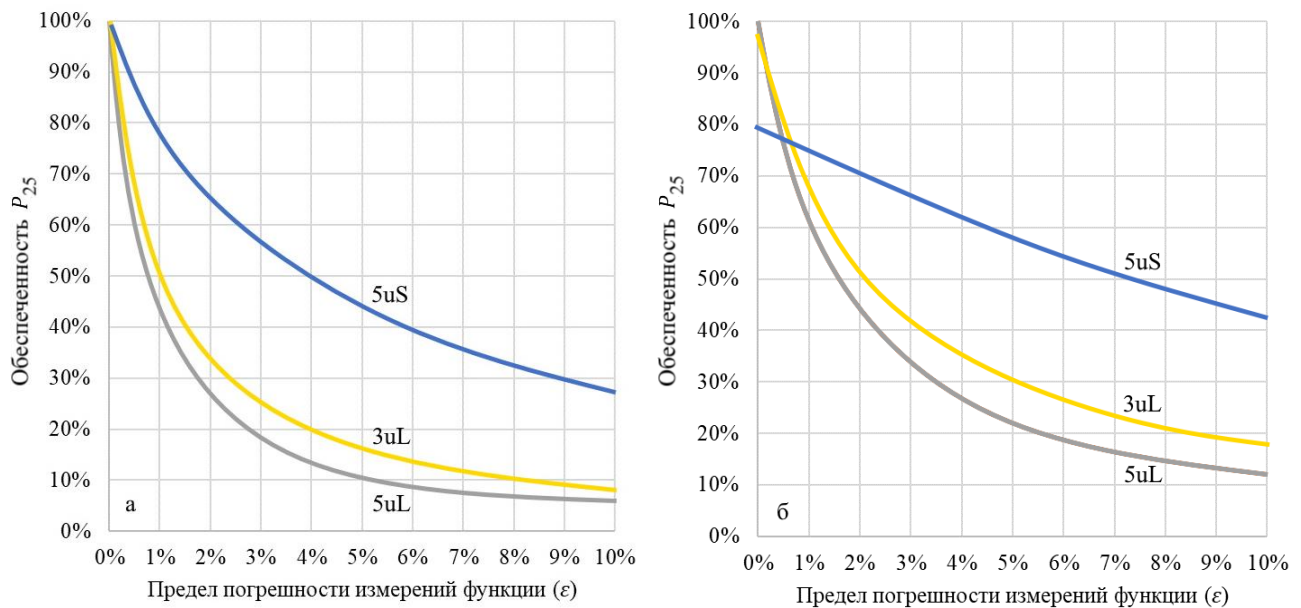


Рис. 5. Обеспеченность поля отклонений $\pm 25\%$ от истинных значений первой производной неизвестной функции в случаях расчета по эмпирическим данным с ошибками: 3uL – по формуле (1), 5uL – по формуле (3), 5uS – по формуле авторов (18):

а – имитационное моделирование на тестовой функции (11) с параметрами $a_1 = 200$; $a_2 = 5$; $h_m = 0,1$; $\Delta = 0,75$; б – имитационное моделирование на тестовой функции (16) с параметрами $c_1 = 0,05$; $c_2 = 4$; $c_3 = 1,5$; $h_m = 0,2$; $\Delta = 0,75$

ВЫВОДЫ

Использование в самых разных задачах ОМД известных формул для оценки производной неизвестной функции по ее значениям, измеренным в дискретных точках, приводит к ошибкам. Объясняется это тем, что такие формулы либо учитывают неравные интервалы между точками измерений, но не учитывают погрешность самих измерений, либо наоборот, учитывают возможную погрешность измерений, но не учитывают неравномерность расположения точек измерений.

Авторами предложена эвристическая формула (18), которая учитывает одновременно оба фактора, присущих для любой табулированной эмпирической функции: 1) неравноотстоящие значения аргумента и 2) погрешность измеренных значений.

Результаты имитационного моделирования на различных тестовых функциях показывают, что даже при небольшой случайной погрешности измерений (от $\pm 1\%$) формула (18) позволяет кардинально повысить точность оценки первой производной эмпирической функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дель Г.Д., Новиков Н.А. Метод делительных сеток. Москва: Машиностроение. 1979. 144 с.
2. Tu Sh., Ren X., He J., Zhang Zh. Stress-strain curves of metallic materials and post-necking strain hardening characterization: A review. *Fatigue Fract Eng Mater Struct.* 2020. 43. pp. 3–19. <https://doi.org/10.1111/ffe.13134>
3. Klinzing W.P., Rozzi J.C., Mudawar I. Film and Transition Boiling Correlations for Quenching of Hot Surfaces with Water Sprays. *J. Heat Transfer.* 1992. 9. pp. 91–103. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02833145>
4. Kotrbáček P., Chabičovský M., Komínek J., Resl O., Bellerova H. Influence of water temperature on spray cooling at high surface temperatures. *Applied Thermal Engineering.* 2022. 216. 119074. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119074>
5. Kotrbacek P., Bellerova H., Luks T., Raudensky M. Heat Transfer Correlations for Secondary Cooling in Continuous Casting. *Steel Research Int.* 2020. 2000465. DOI: <https://doi.org/10.1002/srin.202000465>
6. Wendelstorf J., Wendelstorf R., Spitzer K.-H. Spray Cooling Heat Transfer and Calculation of Water Impact Density for Cooling of Steel Sheet Materials by Inverse Process Modelling: *Steel Res. Int.* 2009. 9 (80). pp. 639–644. DOI: <https://doi.org/10.2374/SRI09SP054>

7. Beygelzimer E., Beygelzimer Y. Generalized estimates for thermal expansion of oxide scale in the range from 0 °C to 1300 °C with account for movability of phase transitions in its component. 2021. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2110/2110.08528.pdf>
8. Beygelzimer E., Beygelzimer Y. Heat capacity of oxide scale in the range from 0 °C to 1300 °C: Generalized estimates with account for movability of phase transitions. 2021. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2110/2110.11101.pdf>
9. Bharadwaj R., Sarkar A., Rakshe B. Effect of Cooling Rate on Phase Transformation Kinetics and Microstructure of Nb–Ti Microalloyed Low Carbon HSLA Steel. *Metallogr. Microstruct. Anal.* 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13632-022-00864-9>
10. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. Київ: Либідь. 1996. 287 с.
11. Ram Babu Saksena. Engineering Mathematics III: For UPTU. India: Pearson Education. 2010. 556 p.
12. Singh Ashok K., Bhadauria B.S. Finite Difference Formulae for Unequal Sub-Intervals Using Lagrange's Interpolation Formula. *Int. J. Math. Anal.* 2009. 3 (17). pp. 815–827.
13. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы. 1961. 524 с.
14. Остапенко А.Л., Бейгельзимер Э.Е., Козленко Д.А., Гриценко С.А., Гончаров Н.В. Экспериментальная оценка охлаждения листа при обработке в роликовой закалочной машине. *Сталь.* 2016. 5. С. 29–34.

REFERENCES

1. Del G.D., Novikov N.A. Dividing grid method. Moscow: Mechanical engineering. 1979. 144 p. (*in Russian*).
2. Tu Sh., Ren X., He J., Zhang Zh. Stress–strain curves of metallic materials and post-necking strain hardening characterization: A review. *Fatigue Fract Eng Mater Struct.* 2020. 43. pp. 3–19. <https://doi.org/10.1111/ffe.13134>
3. Klinzing W.P., Rozzi J.C., Mudawar I. Film and Transition Boiling Correlations for Quenching of Hot Surfaces with Water Sprays. *J. Heat Transfer.* 1992. 9. pp. 91-103. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02833145>
4. Kotrbáček P., Chabičovský M., Komínek J., Resl O., Bellerova H. Influence of water temperature on spray cooling at high surface temperatures. *Applied Thermal Engineering.* 2022, 216, 119074. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119074>
5. Kotrbacek P., Bellerova H., Luks T., Raudensky M. Heat Transfer Correlations for Secondary Cooling in Continuous Casting. *Steel Research Int.* 2020. 2000465. DOI: <https://doi.org/10.1002/srin.202000465>
6. Wendelstorf J., Wendelstorf R., Spitzer K.-H. Spray Cooling Heat Transfer and Calculation of Water Impact Density for Cooling of Steel Sheet Materials by Inverse Process Modelling: *Steel Res. Int.* 2009. 9 (80). pp. 639-644. DOI: <https://doi.org/10.2374/SRI09SP054>
7. Beygelzimer E., Beygelzimer Y. Generalized estimates for thermal expansion of oxide scale in the range from 0 °C to 1300 °C with account for movability of phase transitions in its component. 2021. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2110/2110.08528.pdf>
8. Beygelzimer E., Beygelzimer Y. Heat capacity of oxide scale in the range from 0 °C to 1300 °C: Generalized estimates with account for movability of phase transitions. 2021. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2110/2110.11101.pdf>
9. Bharadwaj R., Sarkar A., Rakshe B. Effect of Cooling Rate on Phase Transformation Kinetics and Microstructure of Nb–Ti Microalloyed Low Carbon HSLA Steel. *Metallogr. Microstruct. Anal.* 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13632-022-00864-9>
10. Lyaschenko M.Ya., Golovan M.S. Numerical Methods. Kyiv: Lybid. 1996. 287 p.
11. Ram Babu Saksena. Engineering Mathematics III: For UPTU. India: Pearson Education. 2010. 556 p.
12. Singh Ashok K., Bhadauria B.S. Finite Difference Formulae for Unequal Sub-Intervals Using Lagrange's Interpolation Formula. *Int. J. Math. Anal.* 2009. 3 (17). pp. 815–827.
13. Lanczos C. Applied Analysis. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature. 1961. 524 p. (*in Russian*).
14. Ostapenko A.L.; Beygelzimer E.E.; Kozlenko D.A.; Gritsenko S.A.; Goncharov N.V. Sheet cooling in a roller quenching machine. *Steel Transl.* 2016. 46. pp. 349–355. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0967091216050119>

Beygelzimer E., Beygelzimer Y. A simple way to estimate the derivative of an empirical function by its values at unequally spaced points

A heuristic formula for 5-point approximation of the first derivative of an unknown function whose values are measured with an error at unequally spaced points is proposed. The derivative at a given point is calculated using the effective increments of the function and argument, taking into account the different weight coefficients for near and far measurement points. Simulation modeling on test functions with known derivatives is applied to determine rational values of weight coefficients. The results of simulation on two test functions are described in detail, one of which simulates the process of water cooling of a hot steel sheet, the second is a complex oscillatory process with variable frequency and amplitude. It is found that the optimal values of weight coefficients remain approximately the same for significantly different functions, which allows us to recommend the same formula for all cases. In contrast to classical methods of numerical differentiation of functions tabulated at unequally spaced nodes, the proposed formula simultaneously takes into account the smoothing of empirical data. It is shown that this significantly increases the accuracy of the numerical estimate of the derivative even in cases where the random error of the function is a very small value, from $\pm 1\%$. The obtained formula is recommended for use in any plastic forming problems that require the estimation of the derivative of

an empirical function, including the calculation of the stress-strain state of metal, the description of thermal processes, the determination of the thermophysical properties of materials, etc.

Keywords: mathematical modeling, derivative of tabulated function, unequally spaced nodes, measurement error, smoothing of empirical data.

Бейгельзімер Е. Ю., Бейгельзімер Я. Ю. Простий спосіб оцінки похідної емпіричної функції за її значеннями в нерівно відстаючих точках

Запропоновано евристичну формулу 5-точкової апроксимації першої похідної невідомої функції, значення якої вимірено з похибкою в нерівно відстаючих точках. Розрахунок похідної в даній точці виконується за ефективними прирощеннями функції та аргументу, що враховують різні вагові коефіцієнти для ближніх і віддалених точок вимірювань. Для визначення раціональних значень вагових коефіцієнтів застосовано імітаційне моделювання на тестових функціях із відомими похідними. Детально описані результати моделювання на двох тестових функціях, одна з яких імітує процес водяного охолодження гарячого сталевого листа, друга – складний коливальний процес із змінною частотою та амплітудою. Встановлено, що оптимальні значення вагових коефіцієнтів залишаються приблизно однаковими для суттєво різних функцій, що дозволяє рекомендувати одну й ту саму формулу для всіх випадків. На відміну від класичних методів чисельного диференціювання функцій, табульованих у нерівновіддалених вузлах, запропонована формула одночасно враховує згладжування емпіричних даних. Показано, що це суттєво підвищує точність чисельної оцінки похідної навіть у випадках, коли випадкова похибка вимірювання функції становить дуже малу величину, - від $\pm 1\%$. Отримана формула рекомендується до використання при вирішенні будь-яких задач ОМД, що вимагають оцінки похідної емпіричної функції, у тому числі при розрахунку напружено-деформованого стану металу, опису теплових процесів, визначенні теплофізичних властивостей матеріалів.

Ключові слова: математичне моделювання, похідна табульованої функції, нерівно відстаючі вузли, похибка вимірювань, згладжування емпіричних даних.

Бейгельзімер Еммануїл Ефимович – канд. техн. наук, ООО «ОМД-інжиніринг», г. Дніпр

Beygelzimer Emmanuil – Candidate of Technical Sciences, OMD-engineering LLC, Dnipro

Бейгельзімер Еммануїл Юхимович – канд. техн. наук, ТОВ «ОМД-інжиніринг», Дніпро

E-mail: emmanuilomd@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0838-7249>

Бейгельзімер Ян Ефимович – д-р техн. наук, проф. ДонФТИ ім. А. А. Галкіна НАН України, г. Київ

Beygelzimer Yan – Doctor of Technical Sciences, Professor DonFTI named after O. O. Galkin National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

Бейгельзімер Ян Юхимович – д-р техн. наук, проф., доц. ДонНТУ. ім. О. О. Галкіна НАН України, м. Київ

E-mail: yanbeygel@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1321-8565>

ДонФТИ – Донецький фізико-технічний інститут ім. А. А. Галкіна НАН України, г. Київ, Україна

DonFTI – Donetsk Institute For Physics And Engineering named after O.O. Galkin National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

ДонНТУ – Донецький фізико-технічний інститут ім. О. О. Галкіна НАН України, м. Київ, Україна

Стаття постуила в редакцію 10.05.22 г.