

УДК 539.374.001.8

Чигиринский В. В.
Путноки А. Ю.
Левицкая В. А.

НАГРУЖЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ АСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Используя метод гармонических функций [1–3], показано решение прикладной задачи с достаточно сложными граничными условиями, которыми являются переменные асимметричные нагрузки, сопровождающие процесс прокатки. В полной мере использованы особенности замкнутого решения, позволившего расширить его возможности как по количеству параметров влияния, так и по общности постановки и решению самой задачи. Анализ показывает, что зоны отставания и опережения взаимно влияют друг на друга. Этот результат оказался несколько неожиданным, так как классические решения по теории прокатки рассматривают эти зоны отдельно.

В результате предложена единая формула подсчета напряжений для всего очага деформации. Известны решения линейной задачи теории пластичности для контактных напряжений в очаге деформации при простом процессе прокатки [4], [5]. В этих случаях очаг деформации разбивается на несколько зон, для каждой применяется свой закон трения, Амонтона и Кулона.

Такое усложнение задачи связано с отсутствием аналитических решений для более сложной задачи теории пластичности, к примеру, плоской.

Представленный в работах [6–9] новый метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций не использован в полной мере. Т. к. в прикладных задачах он был ограничен только одним процессом осадки с использованием простейших граничных условий. Усложнение условий на контакте не ограничивает возможности предлагаемого метода. Результат задачи применим к простому процессу прокатки, характеризующим асимметрию нагружения.

Общая постановка замкнутой плоской задачи теории пластичности известна [10], [11]. Она состоит из шести дифференциальных и алгебраических уравнений теории пластичности, граничных условий в напряжениях и скоростях деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2, \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F, \quad \xi_x + \xi_y = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}, \\ \tau_n = -k \cdot \text{Sin}[A\Phi - 2 \cdot \varphi], \quad \gamma_n = -2\beta \cdot \text{Sin}[B\Phi - 2 \cdot \varphi] \end{aligned} \quad (1)$$

Использование тригонометрической и фундаментальной подстановки позволяет в (1) определить аналитическое решение для напряжений в виде [9], [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -H_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi + k_0, \\ \sigma_y &= -3H_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \text{Cos} A\Phi + k_0, \\ \tau_{xy} &= H_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \text{Sin} A\Phi, \end{aligned} \quad (2)$$

при $\theta_x = -A\Phi_y, \theta_y = A\Phi_x; \theta_{xx} + \theta_{yy} = 0, A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0,$

где H_σ – функция координаты x , определяющая граничные условия на концах очага деформации;

θ и $A\Phi$ – координатные гармонические функции, определяемые очевидными условиями в очаге деформации. Нижние индексы координатных функций обозначают частные производные.

Из решений [6–9], [11] следует, что:

$$H_\sigma = \frac{C_0 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) + C_1 \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right)}{l}, \quad (3)$$

где C_0, C_1, l – постоянные, определяющие напряжения на входе и выходе из очага деформации, длина очага деформации. Подставляя условия на контакте в (2), с учетом условия пластичности, имеем:

$$C_0 = \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp \theta_0 \cdot \cos A\Phi_0}, \quad C_1 = \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp \theta_1 \cdot \cos A\Phi_1}, \quad (4)$$

где k_0, k_1 – сопротивления пластической деформации сдвига на входе и выходе из очага деформации;

θ_0, θ_1 – значение функции θ на входе и выходе из очага деформации;

$A\Phi_0, A\Phi_1$ – значение функции $A\Phi$ на входе и выходе из очага деформации;

ξ_0 и ξ_1 – постоянные, учитывающие влияние натяжения или подпора.

Из уравнения Лапласа с учетом граничных условий (1) получаем простейшее его решение для напряжений в виде:

$$A\Phi' = -\left[AA_6' \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right) \cdot y + AA_6'' \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot y - 2 \cdot \varphi \right], \quad (5)$$

где φ – угол наклона площадки контакта. С учетом соотношений Коши-Римана [3]:

$$\theta_x' = -A\Phi_y', \quad \theta_y' = A\Phi_x',$$

и уравнения Лапласа (1) определяем функцию θ , действительно:

$$\theta' = -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot [(x + x_0)^2 - y^2] - (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot (x - x_0). \quad (6)$$

С учетом (5) и граничных условий определим нейтральный угол, показывающий положение нейтрального сечения в очаге деформации и значение постоянной AA_6 . Действительно, в нейтральном сечении касательное напряжение на контакте равно нулю, т. е. при $x = x_0, y = h_\gamma / 2 \approx h_1 / 2, \varphi = \gamma, A\Phi' = 0$, тогда:

$$0 = -\left[AA_6' \cdot \left(x_0 + \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{h_\gamma}{2} + AA_6'' \cdot \left(x_0 - \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{h_\gamma}{2} - 2 \cdot \gamma \right],$$

где x_0 – координата, определяющая положение нейтрального сечения, при этом:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \frac{AA'_6 \cdot R \cdot \frac{h_1}{2}}{2 + (AA'_6 + AA''_6) \cdot R \cdot \frac{h_1}{2}}. \quad (7)$$

Для определения в (7) значения нейтрального угла необходимо знать постоянные величины AA_6 . Запишем граничные условия на краю очага деформации. На выходе из очага деформации:

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = h_1/2, \quad \varphi = 0, \quad A\Phi' = -A\Phi_1, \quad \theta = \theta_1;$$

на входе:

$$x = -\frac{l}{2}, \quad y = h_0/2, \quad \varphi = \alpha, \quad A\Phi' = A\Phi_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где h_1 – высота полосы на выходе из очага деформации;

l – длина очага деформации.

После подстановки граничных условий для значений AA_6 имеем:

$$AA'_6 = 2 \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{l \cdot h_1}, \quad AA''_6 = 2 \cdot \frac{A\Phi_0 + 2 \cdot \alpha}{l \cdot h_0}. \quad (8)$$

Из (5), с учетом (8) и упрощений, при $A\Phi_0 = A\Phi_1$, получим:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{(A\Phi_1 + \alpha) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon\right)}, \quad (9)$$

$$A\Phi_1 = f \cdot (1 - f).$$

Сравнивая численные значения для нейтрального угла (9) и формулу Экелунда-Павлова качественно и количественно получаем близкий результат. Однако необходимо учитывать, что формула Экелунда-Павлова получена при условии равномерности распределения контактных нормальных напряжений. Постоянные значения θ_0 и θ_1 , с учетом (6) и граничных условий, запишутся:

$$\begin{aligned} \theta_0' &= -\frac{1}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(l_{om}^2 - \frac{h_0^2}{4} \right) + (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot l_{om}, \\ \theta_1' &= -\frac{1}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(l_{on}^2 - \frac{h_1^2}{4} \right) - (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot l_{on}, \end{aligned} \quad (10)$$

учитывая, что $l_{om} = \frac{l}{2} + x_0$, $l_{on} = \frac{l}{2} - x_0$.

С учетом выражений (2), (3), (4), (5), (6), (8), (9), (10) были получены рабочие выражения для расчета напряженного состояния металла в очаге деформации при прокатке. Таким образом, имеем:

$$\sigma_x = -\frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x\right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x\right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A\Phi + k_0,$$

$$\sigma_y = -3 \frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x\right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x\right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A\Phi + k_0, \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x\right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x\right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \sin A\Phi.$$

Угол φ является переменной геометрической характеристикой условий на границе и может быть определен выражением:

$$\varphi = \frac{\frac{l}{2} - x}{R},$$

где R – радиус вала;

x – переменная координата.

Из выражения следует, что на входе в очаг деформации угол φ может принимать значение угла захвата α , а на выходе, $x = \frac{l}{2}$, нулю. По формулам (11) были подсчитаны значения относительных контактных напряжений, представленных на рис. 1–3.

Особенностью данного решения является асимметричный характер нагружения, который приводит к сдвигу экстремальных точек эпюр в сторону выхода металла из очага деформации как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Такой сдвиг определяется появлением в решении угла наклона давящей поверхности φ , являющейся переменной величиной. Кроме этого введение функции H_σ , (3), позволяет учесть в одном выражении сопротивление пластической деформации на входе и выходе из очага деформации. Выражения (11) определяют компоненты тензора напряжений в зоне пластического формоизменения для всего объема очага деформации, включая зоны отставания и опережения.

По оси ординат отложены безразмерные величины контактных нормальных напряжений $\sigma_y / 2k_0$ и контактных касательных напряжений $\tau_k / 2k_0$, абсцисс – относительная длина очага деформации x/l .

Имеет место сдвиг экстремальных значений контактных напряжений в сторону выхода металла из валков. При этом данный сдвиг разный и при изменении фактора формы и коэффициента трения. Представляет интерес влияния фактора формы.

При больших значениях фактора формы ($\frac{l}{h} = 15,49$) эпюра контактных напряжений максимально сдвинута вправо, определяя максимальную неравномерность контактных напряжений по длине очага деформации. В соответствии со сдвигом нормальных напряжений сдвинута координата нейтрального сечения в ту же сторону на эпюре касательных напряжений.

С уменьшением фактора формы величина и неравномерность распределения контактных напряжений уменьшается, при $\frac{l}{h} = 1$ имеет место равномерное распределение напряжений, что неоднократно подтверждалось экспериментальными исследованиями многих авторов, включая [12]. Пик эпюры нормальных напряжений постепенно перемещается к середине очага деформации.

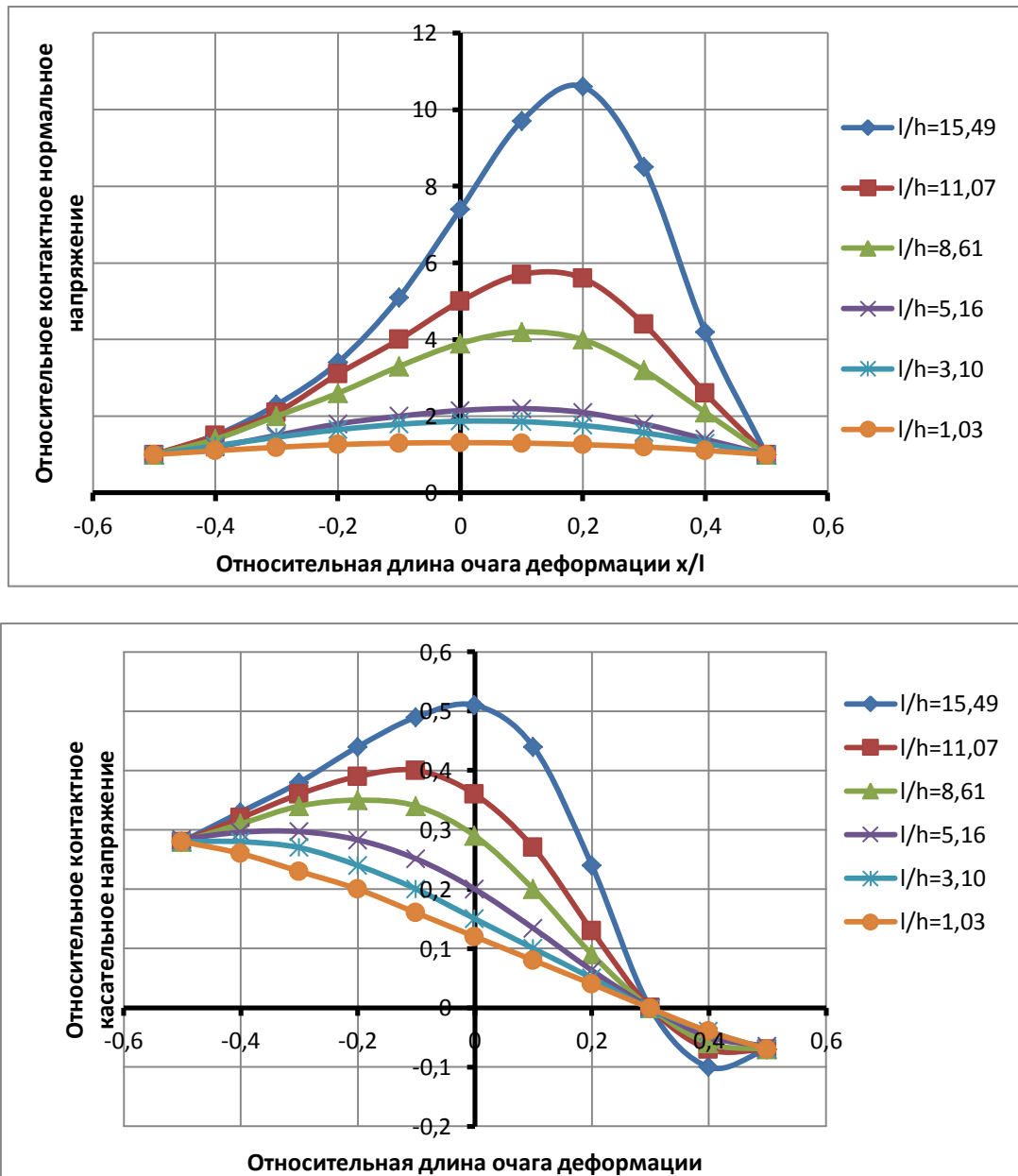


Рис. 1. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от фактора формы очага деформации $\frac{l}{h}$, ($f = 0,3$, $\alpha = 0,077$)

Предложенный подход имеет место тогда, когда очаг деформации рассматривается как единая система, без разрывов, учитывающая взаимное влияние зон пластического течения друг на друга. Анализ расчетов показывает, что граничные условия в зонах отставания и опережения, в крайних точках на контакте, влияют на распределение напряжений в смежных зонах.

Влияние коэффициента трения представлено на рис. 2. Видно, что с увеличением коэффициента трения растет величина нормального и касательного напряжений. Координата нейтрального сечения и максимум нормальных напряжений смещается постепенно в сторону входа металла в очаг деформации (зона опережения увеличивается).

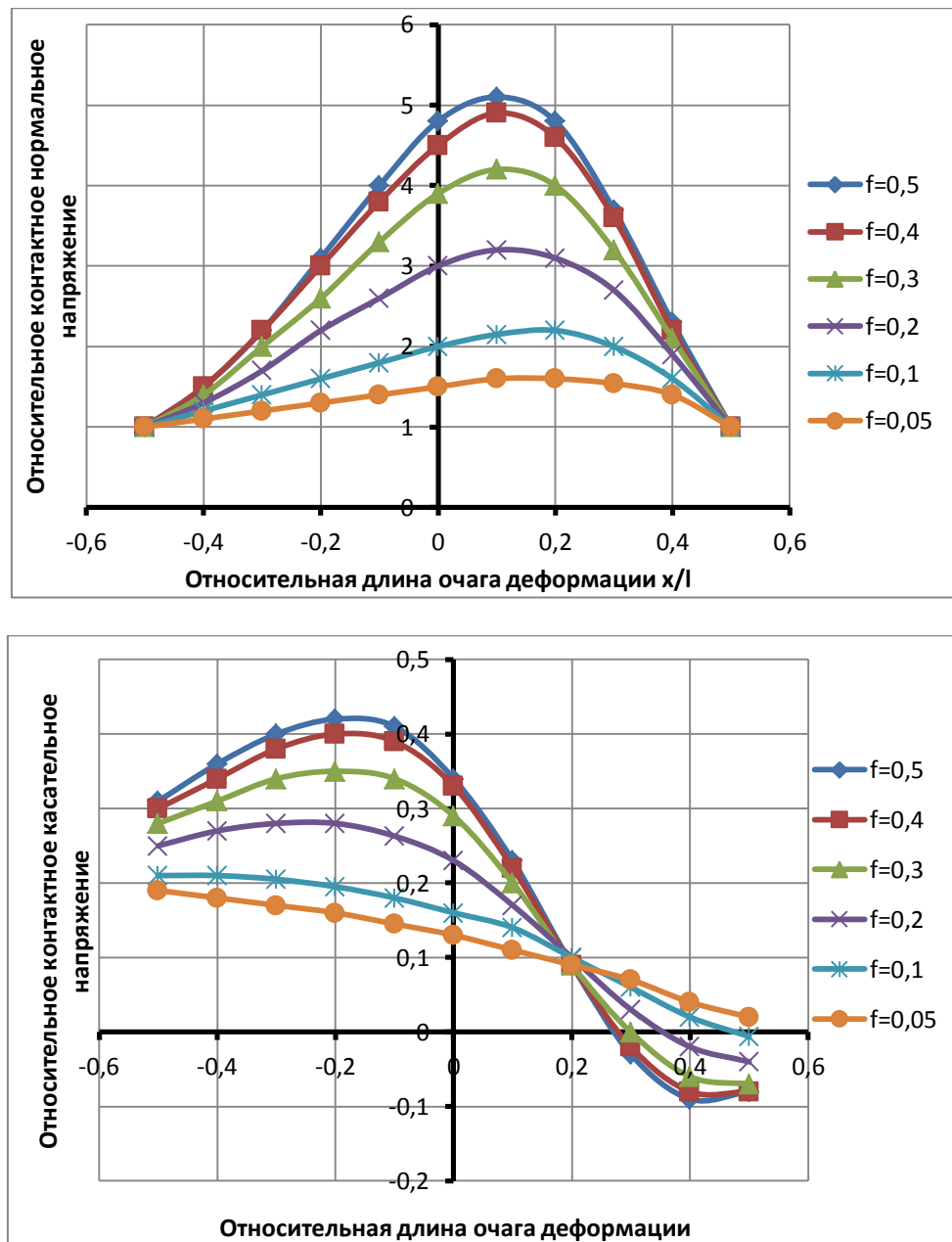


Рис. 2. Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения f , ($\frac{l}{h} = 8,61$, $\alpha = 0,077$)

Анализ формулы Павлова показывает аналогичные изменения. Следует подчеркнуть, что изменение напряжений происходит согласованно для всего очага деформации.

Выражение (11) учитывает влияние угла захвата на распределение напряжений. При этом его влияние необходимо рассматривать в сочетании с коэффициентом трения. На рис. 3 представлены эпюры распределения контактного давления с увеличением угла захвата. Асимметрия распределения напряжений усиливается.

Происходит резкое падение напряжения в зоне отставания, где увеличивается влияние выталкивающей силы нормального давления.

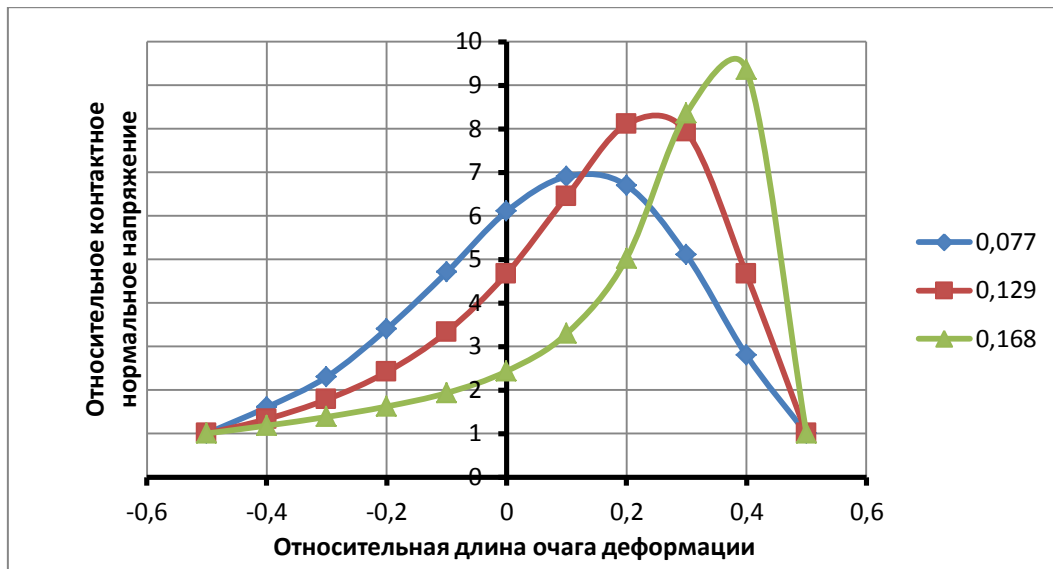


Рис. 3. Распределение контактных нормальных напряжений по длине очага деформации при изменении угла захвата α , при $f = 0,4$; $\frac{l}{h} = 11,04$

Вместе с этим увеличивается влияние продольного растягивающего напряжения. Максимальная точка напряжений перемещается в сторону выхода из очага деформации. Увеличивается и длина зоны отставания. Возможен анализ напряженного состояния в запредельной области прокатки. При прокатке более толстых полос запредельный случай просматривается только по касательным напряжениям, когда имеет место только одна зона – зона отставания. Реакция нормальных напряжений на это состояние отсутствует. Возможно, это связано с прокаткой полосы, при отрицательном опережении [13].

ВЫВОДЫ

На базе метода гармонических функций предложено решение асимметричной плоской задачи теории пластичности. Рассмотрено влияние факторов на асимметрию распределения и величину контактных напряжений. В зависимости от условий процесса величина нагружения и ее неравномерность по очагу деформации меняется. Напряженное состояние в очаге деформации определяется едиными выражениями без предварительной разбивки его на отдельные зоны.

Указанные исследования подтверждают правильность выбранного теоретического направления, связанного с новым методом решения задач теории пластичности – методом гармонических функций. Предложенное решение можно использовать в процессах обработки металлов давлением, в которых внешняя нагрузка имеет несимметричный характер приложения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // *Обработка металлов давлением : сб. науч. трудов.* – Краматорск : ДГМА, 2009. – № 1(20). – С. 41–49.
2. Chigirinskiy V. V. Generalized theory of plasticity // V. V. Chigirinskiy, A. Y. Kachan, I. Mamuzic // *Materials and technology.* – Ljubljana Slovenija. – 2010. – Vol. 44, №. 3. – P. 141–145.
3. Чигиринский В. В. Инварианты в решениях задач механики деформированного твердого тела / В. В. Чигиринский // *Обработка металлов давлением : сб. науч. трудов.* – Краматорск : ДГМА, 2012. – № 4 (33). – С. 33–39.
4. Целиков А. И. Теория прокатки / А. И. Целиков, А. И. Гришков. – М. : *Металлургия*, 1970. – 358 с.
5. Василев Я. Д. Теория продольной прокатки / Я. Д. Василев, А. А. Минаев. – Донецк : УНИТЕХ, 2009. – 488 с.
6. Чигиринский В. В. Определение напряженного состояния пластического тела в условиях плоской деформации / В. В. Чигиринский // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 1990. – № 7. – С. 48–49.

7. Чигиринский В. В. *Определение деформированного состояния пластического тела в условиях плоского течения* / В. В. Чигиринский // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 1990. – № 9. – С. 32–33.
8. Чигиринский В. В. *Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций* / В. В. Чигиринский // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 2009. – № 5. – С. 11–16.
9. Чигиринский В. В. *Аналитическое исследование модели пластической среды* / В. В. Чигиринский // *Изв. вузов. Черная металлургия.* – 2012. – № 1. – С. 55–57.
10. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести* / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 399 с.
11. Чигиринский В. В. *Производство тонкостенного проката специального назначения* / В. В. Чигиринский, Ю. С. Кресанов, А. Я. Качан, А. В. Богуслаев [и др.]. – Запорожье : ВАЛПИС, 2014. – 295 с.
12. Клименко П. Л. *Контактные напряжения при прокатке* / П. Л. Клименко, В. Н. Данченко. – Днепропетровск : ПОРОГИ, 2007. – 285 с.
13. Максименко О. П. *Развитие теории смазочного действия и совершенствование процесса прокатки на ее основе* : дис. д-ра техн. наук : 5.03.05 / О. П. Максименко. – Днепропетровск, 1992. – 564 с.

REFERENCES

1. Chigirinskij V. V. *O novyh podhodah reshenija zadach teorii plastichnosti* / V. V. Chigirinskij // *Obrabotka metallov davleniem : sb. nauch. trudov.* – Kramatorsk : DGMA, 2009. – № 1(20). – S. 41–49.
2. Chigirinskiy V. V. *Generalized theory of plasticity* // V. V. Chigirinskiy, A. Y. Kachan, I. Mamuzic // *Materials and technology.* – Ljubljana Slovenija. – 2010. – Vol. 44, № 3. – P. 141–145.
3. Chigirinskij V. V. *Invarianty v reshenijah zadach mehaniki deformirovannogo tverdogo tela* / V. V. Chigirinskij // *Obrabotka metallov davleniem : sb. nauch. trudov.* – Kramatorsk : DGMA, 2012. – № 4 (33). – S. 33–39.
4. Celikov A. I. *Teorija prokatki* / A. I. Celikov, A. I. Grishkov. – M. : Metallurgija, 1970. – 358 s.
5. Vasilev Ja. D. *Teorija prodol'noj prokatki* / Ja. D. Vasilev, A. A. Minaev. – Doneck : UNITEH, 2009. – 488 s.
6. Chigirinskij V. V. *Opredelenie naprjazhennogo sostojanija plasticheskogo tela v uslovijah ploskoj deformacii* / V. V. Chigirinskij // *Izv. vuzov. Chernaja metallurgija.* – 1990. – № 7. – S. 48–49.
7. Chigirinskij V. V. *Opredelenie deformirovannogo sostojanija plasticheskogo tela v uslovijah ploskogo techenija* / V. V. Chigirinskij // *Izv. vuzov. Chernaja metallurgija.* – 1990. – № 9. – S. 32–33.
8. Chigirinskij V. V. *Metod reshenija zadach teorii plastichnosti s ispol'zovaniem garmonicheskikh funkcij* / V. V. Chigirinskij // *Izv. vuzov. Chernaja metallurgija.* – 2009. – № 5. – S. 11–16.
9. Chigirinskij V. V. *Analiticheskoe issledovanie modeli plasticheskoy sredy* / V. V. Chigirinskij // *Izv. vuzov. Chernaja metallurgija.* – 2012. – № 1. – S. 55–57.
10. Malinin N. N. *Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti* / N. N. Malinin. – M. : Mashino-stroenie, 1975. – 399 s.
11. Chigirinskij V. V. *Proizvodstvo tonkostennogo prokata special'nogo naznachenija* / V. V. Chigirinskij, Ju. S. Kresanov, A. Ja. Kachan, A. V. Boguslaev [i dr.]. – Zaporozh'e : VALPIS, 2014. – 295 s.
12. Klimenko P. L. *Kontaktnye naprjazhenija pri prokatke* / P. L. Klimenko, V. N. Danchenko. – Dnepropetrovsk : POROGI, 2007. – 285 s.
13. Maksimenko O. P. *Razvitie teorii smazoch'nogo dejstvija i sovershenstvovanie processa prokatki na ee osnove* : dis. d-ra tehn. nauk : 5.03.05 / O. P. Maksimenko. – Dnepropetrovsk, 1992. – 564 s.

Чигиринский В. В. – д-р техн. наук, проф. ДГТУ;

Путноки А. Ю. – канд. техн. наук, докторант ЗНТУ;

Левицкая В. А. – преп. ОШ № 1, г. Вараж.

ДГТУ – Днепропетровский государственный технический университет, г. Днепр.

ЗНТУ – Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье.

E-mail: val.chig1948@gmail.com; lewalent@gmail.com.