

УДК 539.3 / 6

Холодняк Ю. С., Подлесний С. В., Капорович С. В.

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ СПРОЩЕНОЇ ДВОВИМІРНОЇ МОДЕЛІ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ У СИЛОВИХ РОЗРАХУНКАХ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Науково-технічний прогрес вимагає від проєктантів застосування все більш досконалих розрахункових методів, що стосуються міцності та енергосилових параметрів створюваних виробів. Найбільш актуальні такі вимоги для конструкцій, які перебувають під дією змінних у часі зовнішніх навантажень.

У промисловості значно поширені стрижневі конструкції – балки, плоскі рами і ферми, які експлуатуються в умовах вимушених коливань, тобто таких, що виникають внаслідок дії так званих збуджуючих сил. Найбільш часто джерелом таких сил є робота різного обладнання, встановленого на цих конструкціях, – насосів, пресів, копрів, тощо. Збуджуючі сили виникають внаслідок руху центра мас такого обладнання і мають періодичний, часто гармонійний характер.

У конструкціях, що перебувають в умовах вимушених коливань, виникають додаткові (динамічні) зусилля і напруження, котрі в ряді випадків досягають значних величин. Звідси – важливість адекватного їх врахування в силових розрахунках названих конструкцій.

У навчально-методичній літературі з опору матеріалів аналізуються, як правило, вимушені коливання невагомої балки з закріпленою на ній точковою масою [1–3]. Така (спрощена) модель коливної системи є одновимірною. Вона, незважаючи на свою простоту, дає зазвичай прийнятну для практики точність силових розрахунків. Поряд з нею в університетських курсах опору матеріалів і будівельної механіки пропонуються також більш складні одновимірні моделі, в яких окрім точкової маси враховуються і маса балки [4–6]. Однак пропонувані при цьому методики розрахунку для широкого практичного застосування досить складні, оскільки вимагають поглибленої математичної підготовки, що зазвичай виходить за рамки учбових планів вищих інженерних навчальних закладів.

Вимушені коливання плоских рам і ферм розглядаються, як правило, в університетських курсах будівельної механіки [7–9]. При цьому застосовуються складні двовимірні моделі, які також є мало прийнятними для широкого практичного використання. Для цього потрібні більш прості методики розрахунку, що не потребують спеціальної математичної підготовки, але забезпечують при цьому прийнятну для практики точність.

Саме така двовимірна модель вимушених коливань була створена авторами і пристосована до розрахунків на міцність плоских рам [10–12].

У цій моделі коливною масою і джерелом коливань є електричний двигун зі статично незбалансованим ротором, але можливі й інші варіанти.

При роботі такого двигуна виникає відцентрова сила інерції \vec{H} , яка і є збуджуючою силою коливань. Вона обертається разом з ротором двигуна з коловою. Крім неї і сили ваги $m\vec{g}$ на коливну масу m діють сили інерції $\vec{\Phi}_1$ і $\vec{\Phi}_2$, сили опору середовища \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , реакції пружного елемента \vec{R}_1 і \vec{R}_2 . Коливання відбуваються навколо положення статичної рівноваги – точки O (рис. 1).

Згідно з принципом Даламбера [14] коливна маса у будь-який момент часу перебуває в кінетостатичній рівновазі під дією прикладеної до неї системи сил (див. рис. 1). Векторне рівняння цієї рівноваги:

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{H} = 0. \quad (1)$$

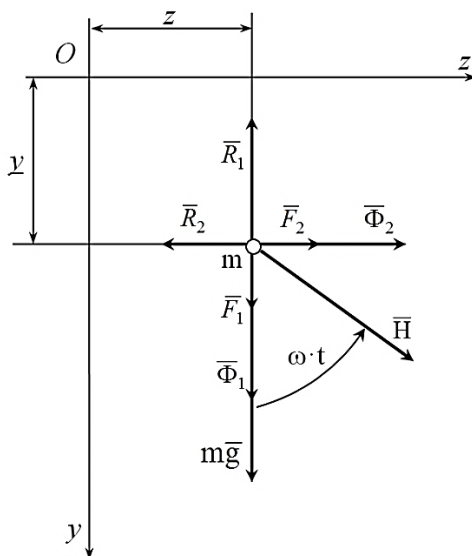


Рис. 1. Схема навантаження коливної маси

Диференціальні рівняння руху коливної маси є перетвореними проекціями на осі координат векторного рівняння (1):

$$m \cdot \ddot{y} + \mu \cdot \dot{y} + f_1(y, z) = mg + H \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (2)$$

$$m \cdot \ddot{z} + \mu \cdot \dot{z} + f_2(y, z) = H \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (3)$$

де \dot{y} і \dot{z} – поточні проекції швидкості коливної маси на відповідні осі координат;
 \ddot{y} і \ddot{z} – поточні проекції прискорення коливної маси на відповідні осі координат;
 μ – коефіцієнт опору середовища;
 t – час від початку руху, тобто виходу маси m з положення статичної рівноваги;

$$f_1(y, z) = R_1 = P_1 = mg + \frac{z}{\delta_{21}} - \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}}; \quad (4)$$

$$f_2(y, z) = R_2 = P_2 = \frac{y \cdot \delta_{21} - z \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}}; \quad (5)$$

де P_1 і P_2 – сили, з якими коливна маса діє на пружний елемент;

$\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12} = \delta_{21}$ – своєрідні показники жорсткості пружного елемента; для рам їх визначають за правилом Верещагіна або за універсальною формулою перемножування трапецій (так званою формулою крайніх ординат), використовуючи відповідні епюри згинальних моментів [3].

Диференціальні рівняння (2) і (3) для свого інтегрування потребують залучення якоїсь із існуючих обчислювальних систем. Найбільш простою і прийнятною в даному разі є система Mathcad, яка дозволяє виконати увесь комплекс необхідних обчислень. Для інтегрування зазначених рівнянь зручно прийняти нульові початкові умови, також умову $\omega_0 = \omega$, тобто вважати період розгону електродвигуна відсутнім.

При чисельному інтегруванні вказаних рівнянь визначаються в неявному вигляді закони руху коливної маси $y = y(t)$ і $z = z(t)$, а через них і закони зміни сил дії коливної маси на пружний елемент $P_1 = P_1(t)$ і $P_2 = P_2(t)$ та їх максимальні значення, котрі надалі служать для оцінки міцності конструкції.

Створена модель дозволяє також визначати колові частоти власних коливань конструкції, які для короткості називають резонансними частотами. Вони розраховуються за формулою:

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) \pm m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}}. \quad (6)$$

Як бачимо, створена модель має великі можливості й цілком придатна для використання в силових розрахунках плоских ферм за умови адекватного врахування їх конструктивних особливостей.

Метою даної роботи є внесення необхідних доповнень в описану двовимірну модель вимушених коливань і розробка на цій основі спрощеної методики силових розрахунків плоских ферм.

Головною відмінністю ферм від рам є те, що стрижні у фермах зв'язані між собою в так званих вузлах за допомогою шарнірів, а в рамах – жорсткими кріпленнями, внаслідок чого стрижні ферм працюють на розтягання – стискання, тоді як стрижні рам (якщо не брати до уваги подовжніх сил) перебувають в умовах плоского згину. Тому показники жорсткості ферм на відміну від рам, у яких зазначені показники залежать переважно від згинальних моментів, визначаються через зусилля (подовжні сили) N .

До відмінностей ферм слід віднести також можливість появи у стиснутих стрижнів подовжнього згину, тобто втрати стійкості, яка неминуче робить конструкцію непридатною до подальшої експлуатації.

Для визначення показників жорсткості ферм використовуються залежності, що витікають із правила Верещагіна для епюр подовжніх сил [13]:

$$\begin{cases} \delta_{11} = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{N}_i^2 \cdot \ell_i; \\ \delta_{22} = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{N}'_i)^2 \cdot \ell_i; \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \cdot \bar{N}'_i \cdot \ell_i, \end{cases} \quad (7)$$

де i – номер стрижня;

n – кількість стрижнів у фермі;

\bar{N}_i – зусилля в i -му стрижні від дії вертикальної одиничної сили $P_1=1$, яка прикладена до ферми в місці розташування коливної маси;

\bar{N}'_i – зусилля в i -му стрижні від дії горизонтальної одиничної сили $P_2=1$, що прикладена в тому самому місці;

ℓ_i – довжина i -го стрижня;

E – модуль пружності матеріалу стрижнів;

F – площа перерізу стрижнів ферми.

Звернемо увагу на те, що тут і надалі розглядаються ферми, які розташовані у вертикальній площині і мають однакові форму і розміри поперечних перерізів усіх стрижнів.

Для визначення значень \bar{N}_i та \bar{N}'_i слід попередньо розрахувати опорні реакції ферми, а потім застосувати до неї метод вирізання вузлів або метод перерізів, запропонований Ріттером [14].

Визначивши таким чином вказану пару зусиль в кожному із стрижнів і проаналізувавши комбінації їх значень, необхідно виявити стрижні, які є потенційно небезпечними з точок зору міцності й стійкості при стисканні. Саме на них слід звернути увагу на відповідних

етапах силових розрахунків.

Специфіку і деталі перевірочних та проектних розрахунків плоских ферм на міцність і стійкість з використанням спрощеної двовимірної моделі вимушених коливань проілюструємо наступними прикладами.

Приклад 1. Нехтуючи опором середовища, перевірити на міцність, стійкість і резонанс плоску ферму (рис. 2), що виготовлена із труб зовнішнім діаметром $d = 100$ мм і товщиною стінки $s = 5$ мм. Матеріал труб – сталь Ст.3, $[\sigma] = 160$ МПа. Маса встановленого на фермі статично незбалансованого електричного двигуна $m = 2000$ кг, колова частота його обертання $\omega = 31,4$ с⁻¹ (300 обертів за хвилину), модуль створюваної ним збурюючої сили $H = 0,3mg$.

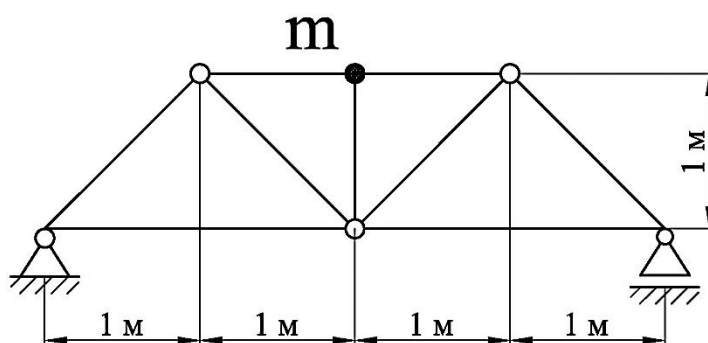


Рис. 2. Схема ферми

Розв'язання

1. Позначаємо на схемі ферми номери стрижнів і вузлові точки, визначаємо довжини стрижнів: $l_1 = l_6 = 2$ м, $l_2 = l_3 = l_7 = l_8 = 1,41$ м, $l_4 = l_5 = l_9 = 1$ м (рис. 3).

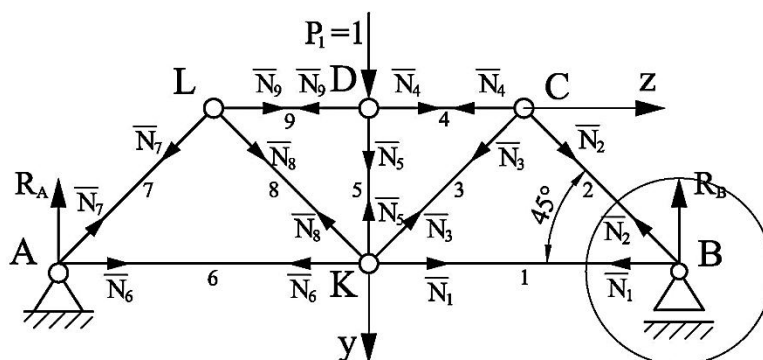


Рис. 3. Схема до визначення зусиль у стрижнях ферми від дії одиничної сили $P_1 = 1$

2. Прикладаємо до ферми в місці розташування двигуна (вузол D) вертикальну одиничну силу $P_1 = 1$ і визначаємо від неї реакції ферми R_A і R_B (див. рис. 3):

$$\begin{cases} \sum M_A = -P_1 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0; & R_B = \frac{P_1 \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5; \\ \sum M_B = P_1 \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0; & R_A = \frac{P_1 \cdot 2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{4} = 0,5. \end{cases}$$

Перевірка: $\sum P_y = P_1 - R_A - R_B = 1 - 0,5 - 0,5 = 0$. Реакції визначені вірно.

3. Для визначення зусиль у стрижнях ферми використовуємо метод вирізання вузлів. Починаємо з вузла B , у якому збігаються два невідомих зусилля \bar{N}_1 і \bar{N}_2 . Для нього:

$$\begin{cases} \sum P_y = -R_B - \bar{N}_2 \cdot \sin 45^0 = 0; & \bar{N}_2 = -\frac{R_B}{\sin 45^0} = -\frac{0,5}{0,71} = -0,71; \\ \sum P_z = -\bar{N}_1 - \bar{N}_2 \cdot \cos 45^0 = 0; & \bar{N}_1 = -\bar{N}_2 \cdot \cos 45^0 = 0,71 \cdot 0,71 = +0,5. \end{cases}$$

Знаки \bar{N}_1 і \bar{N}_2 вказують на те, що стрижень 1 є розтягненим, а стрижень 2 – стиснутим.

4. Послідовно переходимо до вузлів C, D, L, A і аналогічно визначаємо усі інші зусилля: $\bar{N}_3 = +0,71$; $\bar{N}_4 = -1$; $\bar{N}_5 = +1$; $\bar{N}_6 = -1$; $\bar{N}_8 = +0,71$; $\bar{N}_7 = -0,71$; $\bar{N}_9 = +0,5$.

5. Для перевірки розглянемо рівновагу вузла K :

$$\begin{cases} \sum P_y = \bar{N}_5 - \bar{N}_3 \cdot \sin 45^0 - \bar{N}_8 \cdot \sin 45^0 = 1 - 0,71 \cdot 0,71 - 0,71 \cdot 0,71 = 1 - 0,5 - 0,5 = 0; \\ \sum P_z = \bar{N}_1 - \bar{N}_6 + \bar{N}_3 \cdot \cos 45^0 - \bar{N}_8 \cdot \cos 45^0 = 0,5 - 0,5 + 0,71 \cdot 0,71 - 0,71 \cdot 0,71 = \\ = 0,5 - 0,5 + 0,5 - 0,5 = 0. \end{cases}$$

Зусилля в усіх стрижнях знайдені вірно.

6. Прикладаємо до ферми в місці розташування двигуна (вузол D) горизонтальну одиничну силу $P_2 = 1$ і аналогічним шляхом визначаємо від неї реакції ферми і зусилля в стрижнях (рис. 4).

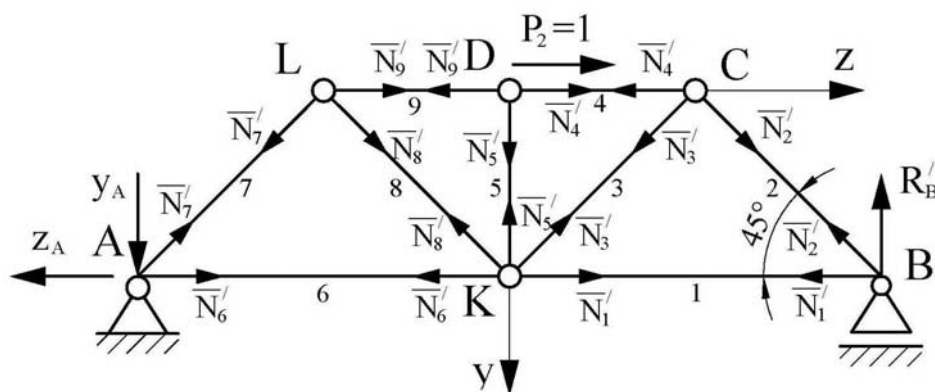


Рис. 4. Схема до визначення зусиль у ферми від дії одиничної сили $P_2 = 1$

Цього разу маємо: $y_A = 0,25$; $z_A = 1$; $R_B' = 0,25$; $\bar{N}_1' = +0,25$; $\bar{N}_2' = -0,35$; $\bar{N}_3' = +0,35$; $\bar{N}_4' = -0,5$; $\bar{N}_5' = 0$; $\bar{N}_6' = +0,5$; $\bar{N}_7' = -0,35$; $\bar{N}_8' = +0,35$; $\bar{N}_9' = +0,75$.

7. Отримані значення внутрішніх зусиль вносимо в таблицю 1 і визначаємо показники жорсткості ферми.

Із табл. 1 видно, що значення δ_{12} є додатним. Це свідчить про те, що напрямки одиничної сили $P_2 = 1$ і осі z вибрані вірно [10].

8. Аналізуючи отримані дані (див. табл.1), бачимо, що найбільші за модулем зусилля під час роботи двигуна будуть мати місце в стрижні 4, який і є небезпечним з точки зору міцності. Закон зміни цих зусиль:

$$N_4(t) = \bar{N}_4 \cdot P_1(t) + \bar{N}'_4 \cdot P_2(t) = -1 \cdot P_1(t) - 0,5 \cdot P_2(t), \quad (8)$$

де $P_1(t)$ і $P_2(t)$ – закони зміни сил P_1 і P_2 , які в неявному виді визначає комп'ютер.

Таблиця 1

Визначення показників жорсткості ферми

| Номер стрижня | \bar{N}_i | \bar{N}'_i | $\ell_i, \text{м}$ | $(\bar{N}_i)^2 \cdot \ell_i, \text{м}$ | $(\bar{N}'_i)^2 \cdot \ell_i, \text{м}$ | $\bar{N}_i \cdot \bar{N}'_i \cdot \ell_i, \text{м}$ |
|---------------|-------------|--------------|--------------------|---|---|---|
| 1 | +0.5 | +0.25 | 2 | 0,5 | 0,125 | 0,25 |
| 2 | -0.71 | -0.35 | 1,41 | 0,711 | 0,173 | 0,35 |
| 3 | +0.71 | +0.35 | 1,41 | 0,711 | 0,173 | 0,35 |
| 4 | -1 | -0.5 | 1 | 1 | 0,25 | 0,5 |
| 5 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | +0.5 | +0.75 | 2 | 0,5 | 1,25 | 0,75 |
| 7 | -0.71 | +0.35 | 1,41 | 0,711 | 0,173 | -0,35 |
| 8 | +0.71 | -0.35 | 1,41 | 0,711 | 0,173 | -0,35 |
| 9 | -1 | +0.5 | 1 | 1 | 0,25 | -0,5 |
| | | | | $\Sigma = 6,844$ | $\Sigma = 2,442$ | $\Sigma = 1$ |
| | | | | $\delta_{11} = \frac{6,844}{E \cdot F}$ | $\delta_{22} = \frac{2,442}{E \cdot F}$ | $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot F}$ |

9. Отримані дані (див. табл.1) вказують на те, що потенційно небезпечними з точки зору втрати стійкості є стрижень 4, у якого найбільші стискаючі зусилля, а також стрижень 2, у якого стискаючі зусилля дещо менші, а довжина більша.

Закон зміни зусиль у стрижні 2:

$$N_2(t) = \bar{N}_2 \cdot P_1(t) + \bar{N}'_2 \cdot P_2(t) = -0,71 \cdot P_1(t) - 0,35 \cdot P_2(t). \quad (9)$$

10. Визначаємо площу поперечних перерізів стрижнів ферми:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{s}{d} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

$$F = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{0,005}{0,1} \right)^2 \right] = 1,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

11. Вводимо в розрахункову програму [10] вирази для показників жорсткості ферми (див. табл. 1), закон зміни зусиль (6), значення F і отримуємо для стрижня 4:

$$\sigma_{min} = -2,24 \cdot 10^7 \text{ Па} = -22,4 \text{ МПа}, \omega_1 = 145,27 \text{ с}^{-1}, \omega_2 = 258,751 \text{ с}^{-1} \text{ (рис. 5).}$$

Аналогічно для стрижня 2:

$$\sigma_{min} = -1,589 \cdot 10^7 \text{ Па} = -15,89 \text{ МПа}, \omega_1 = 145,27 \text{ с}^{-1}, \omega_2 = 258,751 \text{ с}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
 g &:= 9.81 & m &:= 2000 & H &:= 0.3 \cdot m \cdot g & \omega &:= 31.4 & E &:= 2 \cdot 10^{11} \\
 d &:= 100 \cdot 10^{-3} & F &:= 0.149 \cdot d^2 & F &:= 1.49 \times 10^{-3} \\
 \delta_{11} &:= \frac{6.844}{E \cdot F} & \delta_{22} &:= \frac{2.442}{E \cdot F} & \delta_{12} &:= \frac{1.0}{E \cdot F} & \delta_{21} &:= \delta_{12} \\
 \delta_{11} &= 2.297 \times 10^{-8} & \delta_{22} &= 8.195 \times 10^{-9} & \delta_{21} &= 3.356 \times 10^{-9} & \delta_{12} &= 3.356 \times 10^{-9} \\
 a &:= \frac{\delta_{22}}{(\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22}) \cdot m} & b &:= \frac{\delta_{12}}{(\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22}) \cdot m} & d &:= g \cdot \left[1 + \frac{\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21}}{(\delta_{12} \cdot \delta_{21} - \delta_{11} \cdot \delta_{22})} \right] \\
 k &:= \frac{\delta_{21}}{(\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21}) \cdot m} & n &:= \frac{\delta_{11}}{(\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21}) \cdot m} \\
 \text{Given} \\
 y''(t) - a \cdot y(t) + b \cdot z(t) &= \frac{H}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) + d & z''(t) - k \cdot y(t) + n \cdot z(t) &= \frac{H}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\
 y(0) = 0 & y'(0) = 0 & z(0) = 0 & z'(0) = 0 \\
 \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &:= \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, t, 4 \right] & t &:= 0, 0.002 \dots 4 \\
 P1(t) &:= m \cdot g + \frac{z(t)}{\delta_{21}} - \frac{y(t) \cdot \delta_{21} - z(t) \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \cdot \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}} & P2(t) &:= \frac{y(t) \cdot \delta_{21} - z(t) \cdot \delta_{11}}{\delta_{21}^2 - \delta_{22} \cdot \delta_{11}} \\
 N(t) &:= -P1(t) \cdot 1 - P2(t) \cdot 0.5 \\
 \text{ORIGIN} &:= 1 & i &:= 1..4000 & t_i &:= 0 + \frac{i}{1000} & Y_i &:= y(t_i) & Z_i &:= z(t_i) \\
 PP1_i &:= P1(t_i) & PP2_i &:= P2(t_i) & NN_i &:= N(t_i) \\
 N_{\max} &:= \max(NN) & N_{\max} &= -5.901 \times 10^3 & N_{\min} &:= \min(NN) & N_{\min} &= -3.338 \times 10^4 \\
 \sigma_{\min} &:= \frac{N_{\min}}{F} & \sigma_{\min} &= -2.24 \times 10^7 \\
 \omega_{R1} &:= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) + m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} & \omega_{R1} &= 145.27 \\
 \omega_{R2} &:= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \cdot (\delta_{11} + \delta_{22}) - m \cdot \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \cdot (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} & \omega_{R2} &= 258.751
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Динамічний розрахунок стрижня 4

12. Перевіряємо стрижень 4 на виконання умови міцності:

$$|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]. \quad (11)$$

У нашому разі $|\sigma_{\min}| = 22,4 \text{ МПа} < [\sigma]$, тож міцність стрижня 4 і рами в цілому забезпечена.

13. Визначаємо гнучкість стиснутих стрижнів :

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}, \quad (12)$$

де μ – коефіцієнт приведення довжини стрижня;
 i_{\min} – мінімальний радіус інерції перерізу стрижня.

Оскільки в фермах обидва кріплення кінців стрижнів шарнірні, $\mu = 1$ [15]. Переріз стрижнів – кільцевий, тому

$$i_{\min} = i_x = i_y = i_{oc}; \quad i_{oc} = \sqrt{\frac{J_{oc}}{F}}; \quad J_{oc} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{s}{d} \right)^4 \right]. \quad (13)$$

З урахуванням цього:

$$J_{oc} = \frac{3,14 \cdot 0,1^4}{64} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{0,005}{0,1} \right)^4 \right] = 1,687 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4; \quad i_{oc} = \sqrt{\frac{1,687 \cdot 10^{-6}}{1,49 \cdot 10^{-3}}} = 0,034 \text{ м}.$$

Тоді для стрижнів 4 і 2 відповідно маємо:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1}{0,034} = 29,4;$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1,41}{0,034} = 41,5.$$

14. Перевіряємо стрижні 4 і 2 на стійкість.

Умова стійкості має вигляд [4]:

$$|\sigma_{\min}| \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (14)$$

де φ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження, який залежить від гнучкості стрижня λ .

З відповідної таблиці [15] знаходимо для стрижня 4: $\varphi = 0,941$, для стрижня 2: $\varphi = 0,916$. Таким чином, допустимі напруження на стійкість стрижнів 4 і 2 відповідно складають:

$$\varphi \cdot [\sigma] = 0,941 \cdot 160 = 150,56 \text{ МПа},$$

$$\varphi \cdot [\sigma] = 0,916 \cdot 160 = 146,56 \text{ МПа},$$

Порівнюючи значення $|\sigma_{\min}|$ у стрижнів 4 і 2 з допустимими на стійкість, бачимо, що умова стійкості цих стрижнів і ферми в цілому виконується.

15. Перевіряємо ферму на резонанс.

Резонанс виникає внаслідок збігу колової частоти збудовуючої сили і резонансних частот конструкції: $\omega = \omega_1$, або $\omega = \omega_2$. У нашому разі $\omega = 31,4 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 145,27 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 258,751 \text{ с}^{-1}$, тож резонанс відсутній.

Існує точка зору [3 та ін.], що для надійного запобігання резонансу величина ω повинна бути мінімум на 30% меншою за величину ω_1 :

$$\omega \leq 0,7\omega_1. \quad (15)$$

Перевіримо і цю умову.

У нашому випадку: $0,7\omega_1 = 0,7 \cdot 145,27 = 101,689 \text{ c}^{-1}$, що більше за ω . Тож і ця умова виконується. Перевірка цієї умови стосовно ω_2 не має сенсу, бо $\omega_2 > \omega_1$.

Таким чином, всі умови завдання виконані.

На завершення порівняємо отримані результати з опублікованими в збірнику [13], де наведено приклад подібного розрахунку тієї ж самої ферми з використанням одновимірної моделі, яка враховує лише вертикальні коливання. У тому прикладі резонансна частота дорівнює $46,577 \text{ c}^{-1}$, а найбільші за модулем стискаючі напруження в стрижні 4 складають $20,4 \text{ МПа}$.

Як бачимо, одновимірна модель значно занижує результати обчислень, особливо в частині визначення резонансних частот.

Приклад 2. Нехтуючи опором середовища, підібрати для ферми, зображеної на рисунку 2, необхідні розміри перерізу труб з відношенням $s/d = 0,2$. Матеріал труб – сталь Ст. 3, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Маса встановленого на фермі статично незбалансованого електричного гуна $m = 1400 \text{ кг}$, колова частота його обертання $\omega = 104,667 \text{ c}^{-1}$ (1000 об/хв), модуль створюваної ним збурюючої сили $H = 0,3mg$. Визначити резонансні частоти конструкції.

Розв'язання

1. Пункти 1–9 такі самі, як і в прикладі 1.

10. Із формул (8), (10), (11) і умови прикладу 2 виражаємо величини F , J_{oc} , i_{oc} та λ через зовнішній діаметр труби d :

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{s}{d} \right)^2 \right] = \frac{3,14 \cdot d^2}{4} \cdot \left[1 - (1 - 2 \cdot 0,2)^2 \right] = 0,502 \cdot d^2; \quad (16)$$

$$J_{oc} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{s}{d} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot d^4}{64} \cdot \left[1 - (1 - 2 \cdot 0,2)^4 \right] = 0,043 \cdot d^4; \quad (17)$$

$$i_{oc} = \sqrt{\frac{0,043 \cdot d^4}{0,502 \cdot d^2}} = 0,292 \cdot d; \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{oc}} = \frac{1 \cdot \ell}{0,292 \cdot d} = 3,425 \cdot \frac{\ell}{d}. \quad (19)$$

11. З умови міцності при статичному навантаженні ферми вагою непрацюючого двигуна визначаємо потрібну величину d :

$$F = 0,502 \cdot d^2 \geq \frac{|\bar{N}|_{\max} \cdot mg}{[\sigma]} = \frac{1 \cdot 1400 \cdot 9,81}{160} = 85,8 \text{ мм}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{85,8}{0,502}} = 13,1 \text{ мм}.$$

Із нормального ряду лінійних розмірів (Ra 20, ГОСТ 6636 – 69) [15] приймаємо: $d = 14 \text{ мм}$. З нього і почнемо динамічний розрахунок, який складається з послідовних переві-

рок на міцність і стійкість стрижнів 4 і 2 при значеннях $d \geq 14$ мм за методикою, викладеною в прикладі 1, з урахуванням виразів (16) – (19). Результати динамічного розрахунку представлені в таблицях 2 і 3.

Як видно з таблиць 2 і 3, міцність і стійкість обох стрижнів, а разом з ними і ферми в цілому, забезпечує труба 40×8 мм. У цьому разі резонансні частоти дорівнюють: $\omega_1 = 127,481 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 227,065 \text{ c}^{-1}$, що досить далеко від резонансу. Найближчі до нього значення $d = 32$ мм і $d = 18$ мм, при яких напруження в обох стрижнях найбільші.

Таблиця 2

Результати динамічного розрахунку стрижня 4

| d , мм | F , мм ² | $N(t) = -P_1(t) \cdot 1 - P_2(t) \cdot 0,5$ | | | | | ω_1 , с ⁻¹ | ω_2 , с ⁻¹ |
|-------------|--------------------------|---|---------------------------|-----------|-----------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| | | $ N_{min} $, Н | $ \sigma_{min} $, МПа | λ | φ | $\varphi \cdot [\sigma]$, МПа | | |
| 14 | 98,4 | 18660 | 189,7 | 245 | < 0,19 | < 30,4 | 44,618 | 79,473 |
| 16 | 128,5 | 22950 | 178,6 | 214 | < 0,19 | < 30,4 | 50,992 | 90,826 |
| 18 | 162,6 | 61880 | 380,5 | 190 | 0,210 | 33,6 | 57,366 | 102,179 |
| 20 | 200,8 | 30790 | 153,3 | 171 | 0,257 | 41,1 | 63,740 | 113,533 |
| 22 | 243,0 | 25690 | 105,7 | 156 | 0,302 | 48,3 | 70,114 | 124,886 |
| 25 | 313,8 | 27750 | 88,4 | 137 | 0,372 | 59,5 | 79,675 | 141,916 |
| 28 | 393,6 | 38760 | 98,5 | 122 | 0,440 | 70,4 | 89,237 | 158,946 |
| 32 | 514,0 | 181600 | 353,3 | 107 | 0,544 | 87,0 | 101,985 | 181,652 |
| 36 | 650,6 | 67570 | 103,9 | 95 | 0,645 | 103,2 | 114,733 | 204,359 |
| 40 | 803,2 | 41400 | 51,5 | 86 | 0,714 | 114,2 | 127,481 | 227,065 |

Таблиця 3

Результати динамічного розрахунку стрижня 2

| d , мм | F , мм ² | $N(t) = -P_1(t) \cdot 0,71 - P_2(t) \cdot 0,35$ | | | | | ω_1 , с ⁻¹ | ω_2 , с ⁻¹ |
|-------------|--------------------------|---|---------------------------|-----------|-----------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| | | $ N_{min} $, Н | $ \sigma_{min} $, МПа | λ | φ | $\varphi \cdot [\sigma]$, МПа | | |
| 14 | 98,4 | 13190 | 134,1 | 345 | < 0,19 | < 30,4 | 44,618 | 79,473 |
| 16 | 128,5 | 16170 | 125,8 | 302 | < 0,19 | < 30,4 | 50,992 | 90,826 |
| 18 | 162,6 | 43110 | 265,1 | 268 | < 0,19 | < 30,4 | 57,366 | 102,179 |
| 20 | 200,8 | 21620 | 107,7 | 241 | < 0,19 | < 30,4 | 63,740 | 113,533 |
| 22 | 243,0 | 18140 | 74,7 | 220 | < 0,19 | < 30,4 | 70,114 | 124,886 |
| 25 | 313,8 | 19660 | 62,7 | 193 | 0,204 | 32,6 | 79,675 | 141,916 |
| 28 | 393,6 | 27470 | 69,8 | 172 | 0,254 | 40,6 | 89,237 | 158,946 |
| 32 | 514,0 | 128800 | 250,6 | 151 | 0,317 | 50,7 | 101,985 | 181,652 |
| 36 | 650,6 | 47910 | 73,6 | 134 | 0,384 | 61,4 | 114,733 | 204,359 |
| 40 | 803,2 | 29360 | 36,6 | 121 | 0,445 | 71,2 | 127,481 | 227,065 |

ВИСНОВКИ

Розроблено вдосконалену методику силових розрахунків плоских ферм на основі раніше створеної і реалізованої в системі Mathcad спрощеної двовимірної моделі вимушених коливань, яка суттєво підвищує точність і надійність визначення динамічних зусиль і напружень та резонансних частот конструкції в порівнянні з поширеною на практиці одновимірною моделлю, що враховує лише вертикальні коливання, ігноруючи горизонтальні.

Розроблена методика дозволяє визначати максимальні динамічні зусилля і напруження в коливній фермі, розраховувати її резонансні частоти, перевіряти виконання умов міцності й стійкості, підбирати потрібні розміри поперечного перерізу стрижнів для гарантування зазначених умов.

Методика проілюстрована прикладами перевірного та проектного розрахунків і може бути рекомендованою студентам та виробничим фахівцям для використання в навчальних цілях й інженерній практиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ковтун В. В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи: Навчальний посібник / В. В. Ковтун. – Львів: Афіша, 2002. – 280 с.
2. Ицкович Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов : учеб.пособ. для вузов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров. – М. : Высш. шк., 2001. – 592 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов : учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: підр. для техн. ВНЗ / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К. : Вища шк., 2004. – 655 с.
5. Шевченко Ф. Л. Курс опору матеріалів. Порада до вивчення теорії та розв'язання задач : навч. посібник / Ф. Л. Шевченко. – Донецьк : ДонНТУ, 2013. – 260 с.
6. Ламси Б. Б. Сборник задач и упражнений по динамике стержневых систем : учеб. пособие / Б. Б. Ламси и др. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2016. – 96 с.
7. Довнар Е. П. Расчет рам на статические и динамические нагрузки : учеб. пособие / Е. П. Довнар, Л. Б. Климова. – Минск : БНТУ, 2004. – 186 с.
8. Поляков А. А. Строительная механика: учеб. пособие / А. А. Поляков, Ф. Г. Лялина, Р. Г. Игнатов. – Екатеринбург : УрФУ, 2014. – 424 с.
9. Гайджуrow П. П. Расчет стержневых систем на устойчивость и колебания : учеб. пособие / П. П. Гайджуrow. – Новочеркасск : ЮРГТУ, 2009. – 195 с.
10. Холодняк Ю. С. Упрощенная методика силового расчёта плоских рам в условиях вынужденных колебаний / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, С. В. Капорович. // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – № 1(43). – С. 198–213.
11. Холодняк Ю. С. Розвиток методології силових розрахунків плоских рам в умовах вимушених коливань / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесний, С. В. Капорович // Научный Вестник ДГМА. – Краматорск : ДГМА, 2018. – № 1(25Е). – С. 96–97.
12. Kholodniak Yu.S. Elaboration of a Methodology of Pover Calculations of Flat Frames Under Conditions of Forced Oscillations / Yu. S. Kholodniak, S. V. Kaporovych, Ye. D. Korotenko // Contemporary Innovation Technique of Engineering Personnel Training for the Mining and Transport Industry 2019 (CITEPTMTI'2019). Conference Proceedings (2019). – Ukraine, Dnipro: NTUDP. – P. 92–100.
13. Кутувий Л. В. Збірник розрахунково – графічних завдань з курсу "Опір матеріалів" (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання) / Л. В. Кутувий та ін. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 220 с.
14. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: учеб. для машиностроит. и приборостроит. ВУЗов / Н. Н. Никитин. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
15. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко и др. – К. : Наукова думка, 1988. – 704 с.