

УДК 517, 621

DOI:

Подлесний С. В., Костіков О. А., Ерфорт Ю. О., Суботін О. В.

## ДИНАМІКА ПОВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Існує широке коло різноманітних явищ і феноменів різної фізичної природи, які можна описати на основі сучасної теорії нелінійних динамічних систем [1-9]. Ряд властивостей цих систем, такі, як нестійкість, нелінійність, відкритість, дисипація, породжують режими існування і еволюції, властиві широкому класу складних систем. В першу чергу це хаотичні режими, які зараз прийнято вважати характерними етапами розвитку будь-якої досить складної нелінійної системи.

Дана робота продовжує дослідження [10-14] динамічних моделей двох взаємодіючих систем. Властивостями таких систем є їх здатність демонструвати велике розмаїття динамічних станів і переходів, а також можливість забезпечити ефективний вплив на характеристики формованих коливань за допомогою зміни параметрів. Таким чином, дослідження поведінки різноманітних структурних реалізацій систем і динамічних процесів є важливим завданням нелінійної динаміки.

Вищевикладене визначило мету даної роботи: математичне моделювання та дослідження динаміки пов'язаних нелінійних осциляторів за участю сил різної фізичної природи.

Розглянемо електромеханічну систему із змінною індуктивністю [15], представлену на рис. 1.

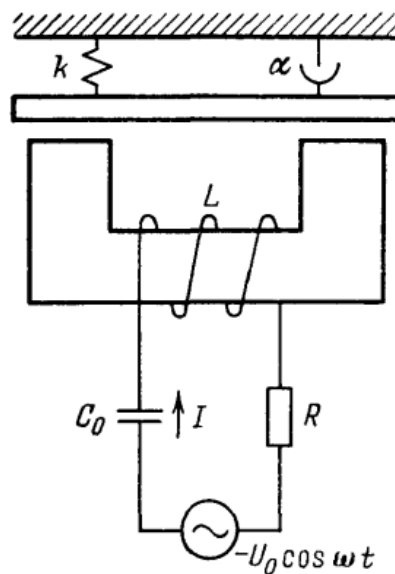


Рис. 1. Електромеханічна система із змінною індуктивністю

Рівняння системи мають вигляд

$$\frac{d^2}{dt^2}(L(x)I) + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C_0} = U_0 \omega \sin \omega t,$$

(1)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F(x, I).$$

де  $L(x)$  - індуктивність котушки з сердечником, яка залежить від величини зазору між плитою маси  $m$  і сердечником, яка визначається зміщенням плити  $x$ ,  $F(x, I) = (I/2) d\Phi/dx$  - пондеромоторна сила, що діє на плиту,  $\Phi = b(x)I$  - магнітний потік.

С достатньою точністю можна покласти  $d\Phi/dx = IdL/dx$ .

При малих  $x$  індуктивність  $L(x)$  можна представити у вигляді полінома

$$L(x) = L_0(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3).$$

Тоді

$$F(x, I) = L_0((a_1/2) + a_2x + (3/2)a_3x^2)I^2.$$

Очевидно, що через залежність  $L$  від  $x$  коливання струму в електричному коливальному контурі можуть бути квазіперіодичними з основною частотою  $\omega$  і квазіперіодом  $2\pi/\nu$ , де  $\nu$  - частота коливань механічної частини системи (змінної  $x$ ).

Проведено чисельне моделювання даної системи при наступних параметрах:  $m=0.005$ ,  $\alpha=500$ ,  $k_I=8000$ ,  $C_0=620 \cdot 10^{-8}$ ,  $U_0=220$ ,  $\omega_0=24\pi$ ,  $R=5$ ,  $a_1=2$ ,  $a_2=0.5$ ,  $a_3=0.2$ ,  $L_0=10^{-4}$  при нульових початкових умовах. Результати моделювання наведені на рисунках 2-4.

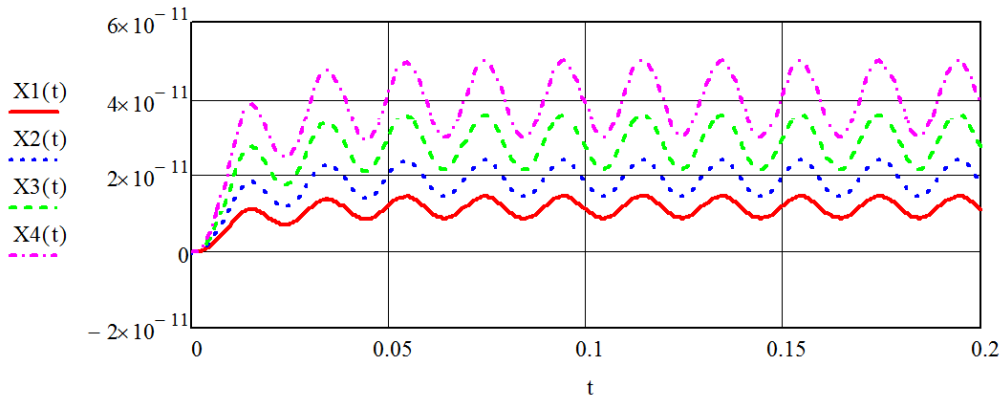


Рис. 2. Графік залежності координати  $x$  від часу при різних значеннях  $U_0$ : X1 ( $U_0=140$ ), X2 ( $U_0=180$ ), X3 ( $U_0=220$ ), X4 ( $U_0=260$ ),

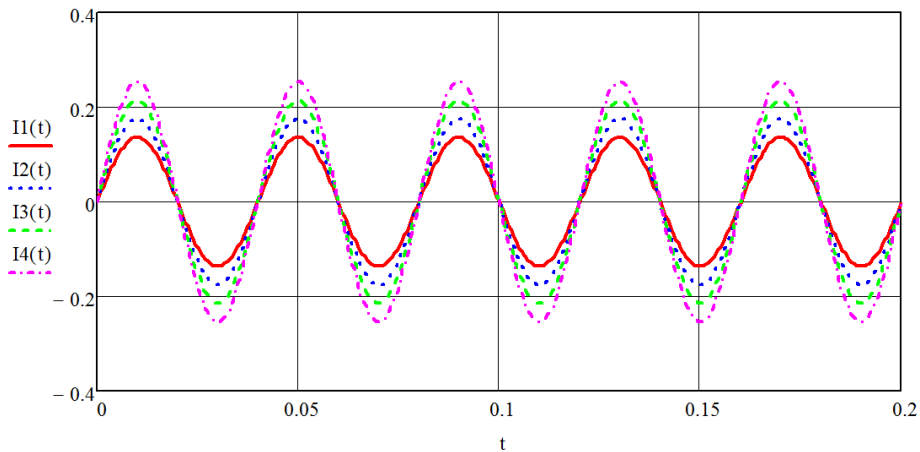


Рис. 3. Графік залежності сили струму  $I$  від часу при різних значеннях  $U_0$ : I1 ( $U_0=140$ ), I2 ( $U_0=180$ ), I3 ( $U_0=220$ ), I4 ( $U_0=260$ ),

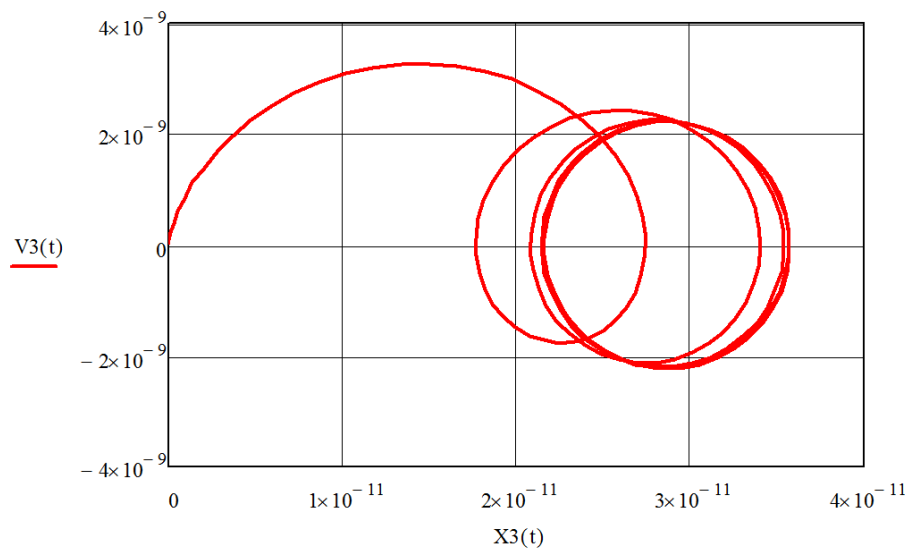


Рис. 4. Фазовий портрет, залежність швидкості  $v$  від координати  $x$  при  $U_0=220$

З рисунків 2 і 4 видно, що приблизно через 0,05 с система переходить в сталий режим незалежно від значення змінного параметру. Також чисельний експеримент показав дуже незначну залежність сили струму від параметрів механічної частини системи.

Розглянемо динаміку ємнісного датчика малих зсувів [15], представленого на рис. 5.

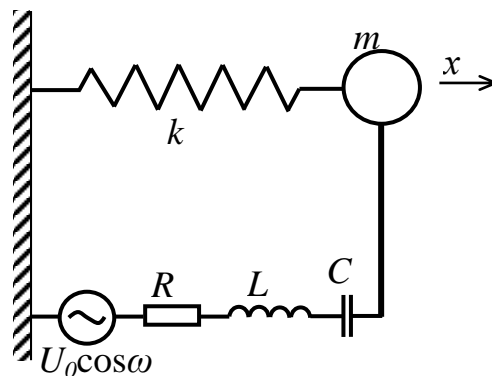


Рис. 5. Ємнісний датчик малих зсувів

Такий датчик являє собою конденсатор, одна з пластин якого з'єднана з тілом, зміщення якого потрібно виміряти. Конденсатор включений в ланцюг електричного коливального контуру, що містить джерело змінної напруги. Відомо, що в деякому діапазоні частот  $\omega$  при підвищенні напруги  $U_0$  вище критичної позначки виникають механічні автоколивання тіла маси  $m$ .

Рівняння системи мають вигляд

$$\ddot{q} + 2\delta_1 \dot{q} + \frac{C_0}{C(x)} \Omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t, \tag{2}$$

$$\ddot{x} + 2\delta_2 \dot{x} + \nu_0^2 x = -\frac{1}{m} F(x, q),$$

де  $q$  - заряд на конденсаторі, –  
 $C(x) = C_0 [1 + (x/d_0)]^{-1}$  - ємність конденсатора,

$\Omega_0=(L \cdot C_0)^{-1/2}$  - власна частота електричного коливального контуру при  $x=0$ ,  
 $d_0$  - відстань між пластинами конденсатора при недеформованій пружині,  
 $m$  — маса кульки.  
 Сила тяжіння між пластинами конденсатора

$$F(x, q) = \frac{Sq^2 \varepsilon_0 \varepsilon}{2C^2(x)(d_0 + x)^2} = \frac{q^2}{2C_0 d_0}$$

Було проведено обчислювальний експеримент для наступних параметрів:  $\delta_1 = 3,77 \cdot 10^5$ ,  $\delta_2 = 0,031$ ,  $C_0=14,166 \cdot 10^{-12}$ ,  $U_0=220$ ,  $\omega=2 \cdot \pi \cdot 50$ ,  $\nu_0=2 \cdot \pi \cdot 0,1$ ,  $d_0=0,001$  при нульових початкових умовах. Результати моделювання в середовищі Mathcad представлені на рисунках 6-9.

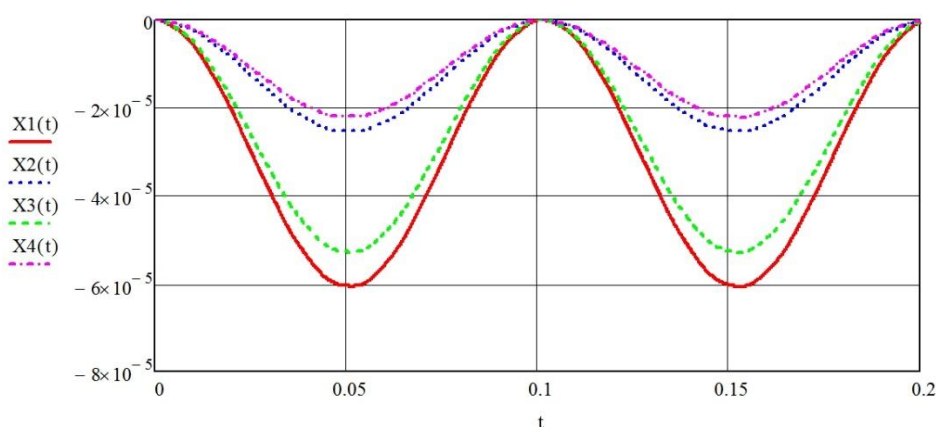


Рис. 6. Закон руху кульки в залежності від її маси і власна частота електричного коливального контуру:  $X1(m=0.0035, \Omega_0=\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $X2(m=0.0035, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $X3(m=0.004, \Omega_0=\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $X4(m=0.004, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$

З графіка на рис. 6 видно, що амплітуда коливань зменшується при збільшенні маси кульки і власної частоти електричного коливального контуру.

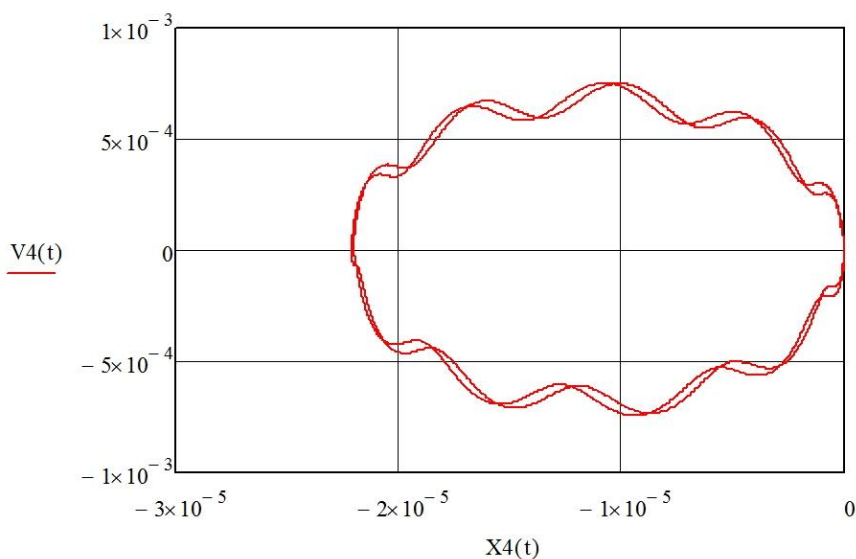


Рис. 7. Фазовий портрет, залежність швидкості кульки від її координати при:  $m=0.004$ ,  $\Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6$

Розрахунки показують, що при заданих параметрах коливання кульки переходять в

стаціонарний режим за 0,1 с.

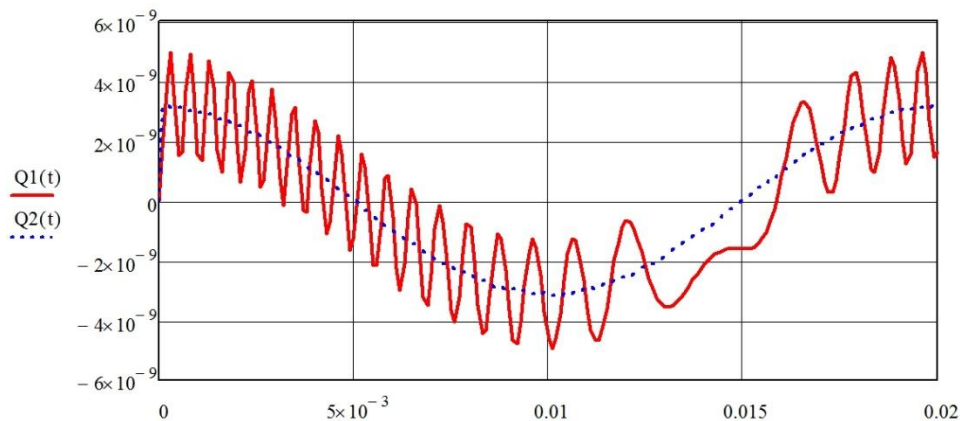


Рис. 8. Закон зміни заряду конденсатора з часом в залежності від маси кульки і власної частоти електричного коливального контуру:  $Q1(m=0.0035, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$ ,  $Q2(m=0.004, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6)$

З рис. 8 наочно видно залежність між механічними і електричними параметрами. Зміна маси кульки на 12,5% призвело до істотної зміни залежності заряду від часу.

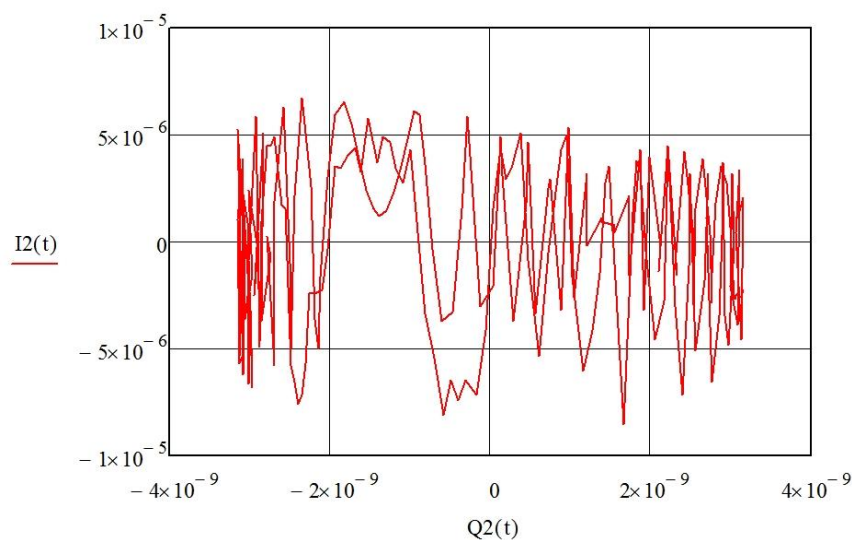


Рис. 9. Фазовий портрет для заряду і сили струму при:  $m=0.004, \Omega_0=2\pi \cdot 6 \cdot 10^6$

Електричні коливання виглядають явно хаотично (рис. 9) на відміну від механічних коливань, які носять досить плавний характер.

Розглянемо ще одну галузь використання електромеханічних аналогій Лагранжа-Максвелла. Палеомагнітні дослідження показали, що магнітне поле Землі зазнає зміни напрямку (полярності) на зворотне. Протягом останніх сотень мільйонів років зміна напрямку відбувалася нерегулярним чином. Базовою моделлю в теорії земного динамо є чотиривимірна модель Рікітакі спарених динамо, запропонована в 1955 році [16-17], як показано на рис. 10. У динамо з двома взаємопов'язаними дисками, ток з однієї котушки диска перетікає в іншу і виробляє збудження другого диска, і навпаки. У певний момент система починає давати збої і показувати непередбачувану поведінку. Цю модель використовують для дослідження зв'язку великих вихорів магнітних полів в ядрі Землі і хаотичної інверсії геомагнітного поля Землі.

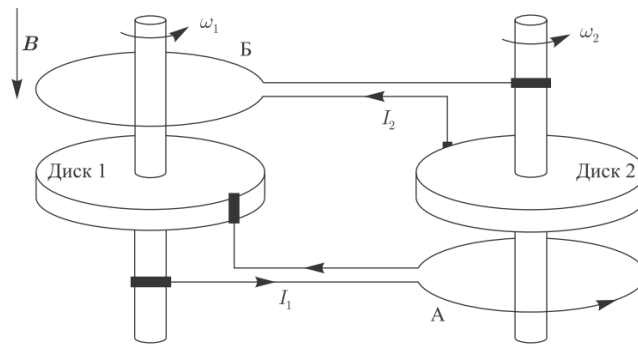


Рис. 10. Модель линамо Рікітакі

Модель Рікітакі в порівнянні з однодисковою не тільки могла самозбуджуватися, але і при критичних значеннях параметрів могла перебувати в нестійкому стані, яке призводило до зміни як величини, так і напрямку вектора збуджуваного нею магнітного поля. При обертанні обох дисків з кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$  в магнітному полі  $B$ , напрямок вектора якого збігається з віссю обертання, в кожному з дисків виникає електрорушійна сила (е.р.с.) і струм, спрямовані від периферії до центру або від центру до периферії, в залежності від напрямку  $\omega$  і  $B$ . Внаслідок цього в контурі А (рис. 10) потече струм, що порушується диском 1, який почне взаємодіяти з струмом в диску 2. І навпаки, струм в контурі Б почне взаємодіяти з струмом в диску 1. Така взаємодія призведе до перерозподілу як швидкостей  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , так і порушуваних струмів  $I_1$  та  $I_2$ , а отже, і магнітних полів, створюваних кожним контуром. Так в цій моделі буде здійснюватися процес генерації і регенерації магнітного поля. Теорія цього модельного процесу, дана Т. Рікітакі, зводиться до вирішення рівнянь руху дисків і їх електромагнітного стану. Ці рівняння за законами механіки та електродинаміки можуть бути записані у вигляді

$$\begin{cases} J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = M_{\omega_1} - M_{1,2} \cdot I_1 \cdot I_2, \\ J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = M_{\omega_2} - M_{2,1} \cdot I_1 \cdot I_2, \\ L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + R_1 \cdot I_1 = \omega_1 \cdot M_{1,2} \cdot I_2, \\ L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + R_2 \cdot I_2 = \omega_2 \cdot M_{2,1} \cdot I_1, \end{cases} \quad (3)$$

де  $L_1$  і  $L_2$  - індуктивності дисків 1 і 2, а  $J_1$  і  $J_2$  - їх моменти інерції;  $M_{1,2}$  і  $M_{2,1}$  - взаємні індуктивності між контуром А і диском 2, контуром Б і диском 1 відповідно;  $R_1$  і  $R_2$  - опори контурів А і Б;  $M_{\omega_1}$  і  $M_{\omega_2}$  - моменти обертання дисків, викликані зовнішніми силами.

Вважаємо, що  $L_1=L_2=L$ ,  $R_1=R_2=R$ ,  $M_{1,2}=M_{2,1}=M$ ,  $J_1=J_2=J$ , і  $M_{\omega_1}=M_{\omega_2}=M_{\omega}$ , і тоді в безрозмірних змінних  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  і  $\tau$ :

$$I_1 = \sqrt{\frac{M_{\omega}}{M}} \cdot x_1, \quad I_2 = \sqrt{\frac{M_{\omega}}{M}} \cdot x_2, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{M_{\omega} \cdot L}{J \cdot M}} \cdot x_3,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{M_\omega \cdot L}{J \cdot M}} \cdot x_4, \quad t = \sqrt{\frac{J \cdot L}{M \cdot M_\omega}} \cdot \tau, \quad (4)$$

система (3) з урахуванням тертя набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -\mu \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -\mu \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = 1 - x_1 \cdot x_2 - \nu_1 \cdot x_3, \\ \frac{dx_4}{d\tau} = 1 - x_1 \cdot x_2 - \nu_2 \cdot x_4, \end{cases} \quad (5)$$

де  $x_1$  і  $x_2$  - безрозмірні струми,  $x_3$  і  $x_4$  - безрозмірні кутові швидкості дисків,  $\mu$  - коефіцієнт омичний дисипації,  $\nu_1$  і  $\nu_2$  - коефіцієнти тертя в дисках 1 і 2 відповідно. Помічаємо, що реальний час пов'язано з безрозмірним співвідношенням:

$$t = \sqrt{\tau_e \cdot \tau_m} \cdot \tau, \quad (6)$$

де  $\tau_m$  - механічний час, що дорівнює

$$\tau_m = \frac{J \cdot R}{M_\omega \cdot M}, \quad (7)$$

це час, протягом якого диски розганяються до типового значення кутової швидкості

$$\omega = \frac{R}{M}, \quad (8)$$

а  $\tau_e$  — електромагнітний час, що дорівнює

$$\tau_e = \frac{L}{R}, \quad (9)$$

це час, протягом якого зникнуть магнітні поля в разі зупинки дисків.

Ставлення цих часів пов'язано з коефіцієнтом омичної дисипації:

$$\mu^2 = \frac{\tau_m}{\tau_e} = \frac{J \cdot R^2}{M_\omega \cdot L \cdot M}, \quad (10)$$

що збігається з відношенням запасеної механічної енергії до запасеної електричної енергії.

Проведемо комп'ютерне дослідження моделі Рікітакі.

Даючи параметрам значення  $\mu=1.1$ ,  $\nu_1=0.0022$ ,  $\nu_2=0.002$ , отримаємо графіки зміни параметрів, що представлені на рисунках 11-12.

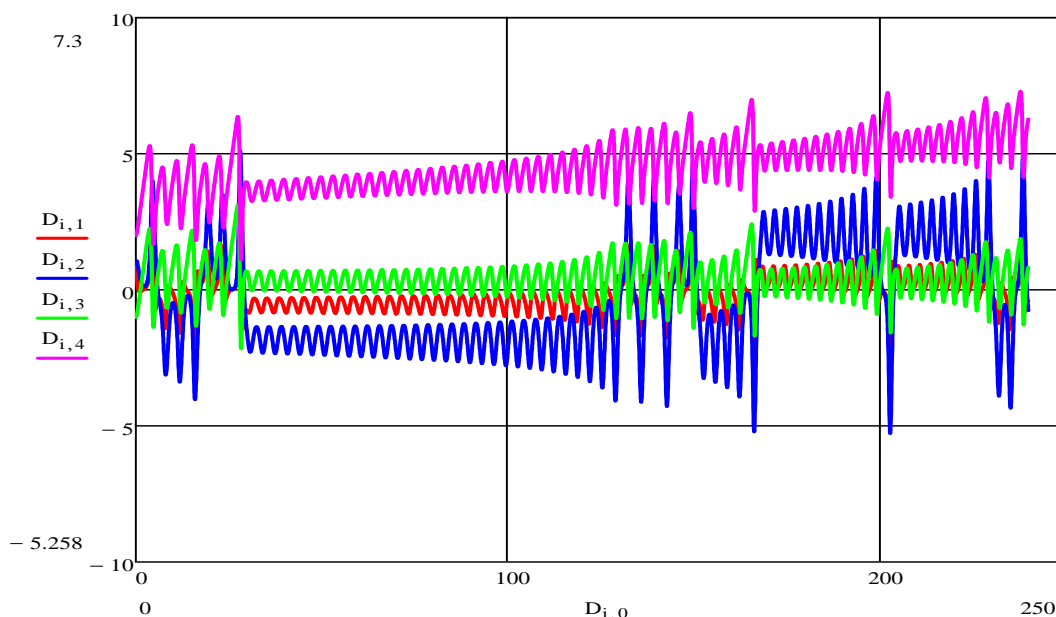


Рис. 11. Типові криві, що описують еволюцію параметрів в часі:  $D_{i,0}$  – час;  $D_{i,1}$  і  $D_{i,2}$  – це безрозмірні струми  $x_1$  і  $x_2$ ;  $D_{i,3}$  і  $D_{i,4}$  – це безрозмірні кутові швидкості  $x_3$  і  $x_4$  дисків

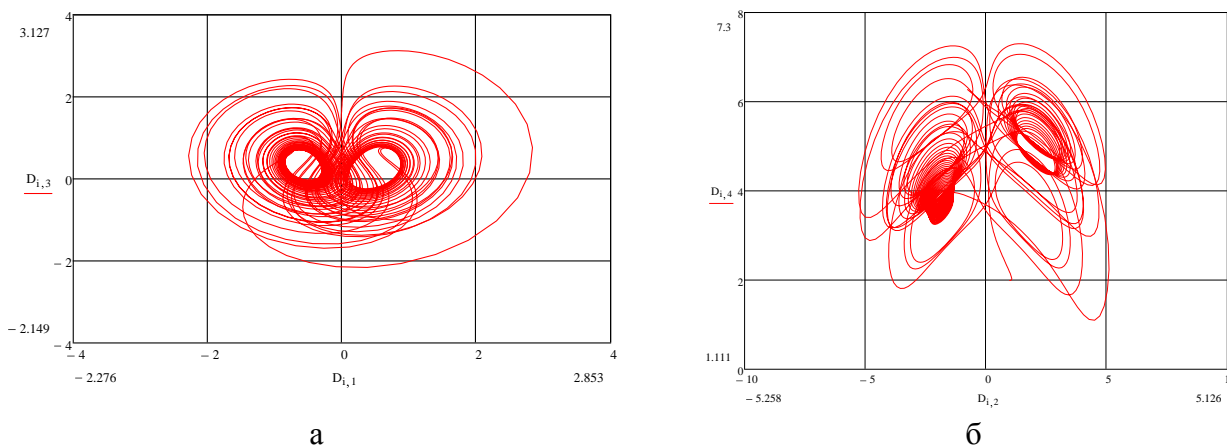


Рис. 12. Проекції траєкторій у фазовому просторі на площини: а)  $x_3$ - $x_1$ ; б)  $x_4$ - $x_2$

За рисунками 11-12 видно, що динамо Рікітаке здійснює стохастичні коливання і відноситься до дивних атракторів (таких як атрактор Лоренца, атрактор Пликіна, атрактор Росслера та ін.).

### ВИСНОВКИ

Динаміка складних систем різної природи і їх еволюція є одним із центральних напрямків досліджень в нелінійній динаміці і пов'язаних міждисциплінарних областях науки. Наведені в роботі моделі і результати їх дослідження показують, що чисельне моделювання різних технічних пристроїв у вигляді пов'язаних нелінійних осциляторів демонструє складну динаміку процесів. Моделі можна використовувати на етапі проектування технічних систем. Зокрема, можна рекомендувати використання розглянутих схем в комп'ютерних практикумах, а також при постановці експериментальних лабораторних робіт. Питання, пов'язані з виявленням різних типів синхронізації в різноманітних системах пов'язаних нелінійних осциляторів, знаходження особливих точок, умов переходу в різні режими, нелінійний резонанс, збудження квазіперіодичних коливань і інші можуть скласти предмет окремого дослідження.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.
2. Гринченко В. Т. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы / Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. — Киев: Наукова думка, 2005. — 264 с.
3. Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. / Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 560 с.
4. Каганов В. И. Колебания и волны в природе и технике. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. - М.: Горячая линия-Телеком, 2008. - 336 с.
5. Кузнецов А.П. Динамика систем связанных осцилляторов Спротта с неидентичными управляющими параметрами / А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов. *Изв. вузов «ПНД»*, т. 15, № 3, 2007. — С. 95-106.
6. Новожилова Н.В. Одномерные модели сложного поведения простых динамических систем / Новожилова Н.В., Федотов В.Х. *Вестник Чувашского университета*. 2018. № 1. — С. 153-161.
7. Пономаренко В.П. Особенности сложной динамики и переходы к хаотическим режимам в модели двух взаимодействующих систем с фазовым управлением. *Изв. вузов «ПНД»*, т. 14, № 5, 2006. — С. 73-93.
8. Кузнецов С.П. Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде MULTISIM. *Изв. вузов «ПНД»*, т. 19, № 5, 2011. С. 98-115.
9. Подлесний С. В. Динамічна модель електромеханічної системи електромагнітного гальма. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. № 1 (40), 2017. — С. 11-17. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma\\_2017\\_1\\_4](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2017_1_4)
10. Подлесний С. В. Динаміка електромагнітного і електростатичного підвісів ротора Подлесний С. В., Єрфорт Ю. О., Жук Я. А. *Научный вестник ДГМА*. № 1 (22Е), 2017. — С. 42-48. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma\\_2017\\_1\\_9](http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2017_1_9)
11. Подлесний С. В. Дослідження динаміки електровимірювальних приладів в системі MATHCAD Подлесний С. В., Жук Я. А., Криворучек В. В. *Научный вестник ДГМА*. № 2 (23Е), 2017. — С. 57-63. URL: [http://www.dgma.donetsk.ua/science\\_public/science\\_vesnik/%E2%84%962\(23%D0%95\)\\_2017/article/12.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%962(23%D0%95)_2017/article/12.pdf)
12. Подлесний С. В. Моделирование электромеханической системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока. *Научный вестник ДГМА*. № 1 (19Е), 2016. — С. 87-95. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma\\_2016\\_1\\_14](http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2016_1_14)
13. Подлесний С. В. Моделирование динамики униполярного генератора. *Научный вестник ДГМА*. № 3 (15Е), 2014. — С. 95-100. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma\\_2014\\_3\\_18](http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2014_3_18)
14. Подлесний С. В. Моделирование динамики электромеханических систем / Подлесний С. В., Стадник А. Н., Ларичкин А. В. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. № 3 (36), 2015. — С. 171-176. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma\\_2015\\_3\\_31](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2015_3_31)
15. Ланда П. С. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии / П. С. Ланда, Я. Б. Дубошинский. *Успехи физических наук*. Том 158, вып. 4. - 1989. С. 729-742.
16. Никитина Н. В. О бифуркациях и аналитическом решении в модели Рикитак. *Доповіди Національної академії наук України*, 2012, №10. — С. 56-63.
17. Потапов В. И. Визуализация фазовых траекторий динамической системы Рикитак. *Нелинейная динам.*, 2010, том 6, номер 2, - С. 255–265.

## REFERENCES

1. Anisichenko V.C. Complex vibrations in simple systems. - M.: Science, 1990. (in Russian).
2. Grinchenko V. T. Introduction to nonlinear dynamics: Chaos and fractals / Grinchenko V. T., Matsypura V. T., Snarsky A. A. - Kiev: Naukova Dumka, 2005. - 264 p. (in Russian).
3. Gukenheimer J. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. / Guckenheimer J., Holmes F. - Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research, 2002, 560 p. (in Russian).
4. Kaganov V. I. Oscillations and waves in nature and technology. Computerized Course: Textbook for universities. - M.: Hotline-Telecom, 2008. -- 336 p. (in Russian).
5. Kuznetsov A.P. Dynamics of systems of coupled Sprott oscillators with non-identical control parameters / A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov. *Izv. universities "PND"*, t. 15, No. 3, 2007. - pp. 95-106. (in Russian).
6. Novozhilova N.V. One-dimensional models of the complex behavior of simple dynamical systems / Novozhilova N.V., Fedotov V.Kh. *Bulletin of the Chuvash University*. 2018. No. 1. - pp. 153-161. (in Russian).
7. Ponomarenko V.P. Features of complex dynamics and transitions to chaotic regimes in the model of two interacting systems with phase control. *Izv. universities "PND"*, t. 14, No. 5, 2006. - pp. 73-93. (in Russian).
8. Kuznetsov S.P. Schemes of electronic devices with hyperbolic chaos and modeling of their dynamics in the MULTISIM software environment. *Izv. universities "PND"*, t. 19, No. 5, 2011. pp. 98-115. (in Russian).
9. Podlesny S. V. Dynamical model of electromechanical systems and electromagnetism. *Herald of the Donbass State Power Engineering Academy*. No. 1 (40), 2017.-- pp. 11-17. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma\\_2017\\_1\\_4](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2017_1_4) (in Ukrainian).

10. Podlesny S. V. Dynamo electromagnet and electrostatic rotors Podlesny S. V., Erfort Yu. O., Zhuk Ya. A. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 1 (22E), 2017.-- pp. 42-48. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma\\_2017\\_1\\_9](http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2017_1_9) (in Ukrainian)
11. Podlesny S. V. Retrieving the dynamics of electrical appliances in the MATHCAD system. Podlesny S. V., Zhuk Y. A., Krivoruchek V.V. // *Scientific Herald of the DSEA*. No. 2 (23E), 2017.-- pp. 57-63. URL: [http://www.dgma.donetsk.ua/science\\_public/science\\_vesnik/%E2%84%962\(23%D0%95\)\\_2017/article/12.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%962(23%D0%95)_2017/article/12.pdf) (in Ukrainian)
12. Podlesny S. V. Modeling of an electromechanical system for automatic regulation of the voltage of a direct current generator. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 1 (19E), 2016.-- pp. 87-95. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma\\_2016\\_1\\_14](http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2016_1_14) (in Russian).
13. Podlesny S. V. Modeling the dynamics of a unipolar generator. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 3 (15E), 2014.-- pp. 95-100. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma\\_2014\\_3\\_18](http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2014_3_18) (in Russian).
14. Podlesny S. V. Modeling the dynamics of electromechanical systems / Podlesny S. V., Stadnik A. N., Larichkin A. V. *Herald of the Donbass State Power Engineering Academy*. No. 3 (36), 2015.-- pp. 171-176. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma\\_2015\\_3\\_31](http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2015_3_31) (in Russian).
15. Landa P.S. Self-oscillating systems with high-frequency energy sources / P.S. Landa, Ya. B. Duboshinsky. *Advances in physical sciences*. Volume 158, no. 4. - 1989. pp. 729-742. (in Russian).
16. Nikitina N. V. On bifurcations and an analytical solution in the Rikitaki model. *Additional National Academy of Sciences of Ukraine*. 2012, No. 10. - pp. 56-63. (in Russian).
17. Potapov V. I. Visualization of phase trajectories of the dynamical system Rikitaki, // *Nonlinear Dynam.*, 2010, Volume 6, Number 2, - pp. 255–265. (in Russian).

## АВТОРИ / АВТОРЫ / AUTORS

Подлесний С. В. – канд. техн. наук, доц. ДДМА;  
 Подлесный С. В. – канд. техн. наук, доц. ДГМА;  
 Podlesny S. V. – Cand. tech. sciences, associate professor DSEA.  
 E-mail: [sergeypodlesny@gmail.com](mailto:sergeypodlesny@gmail.com) ; <https://orcid.org/0000-0001-8271-4004>

Костіков О. А. - канд. техн. наук, доц. ДДМА;  
 Костиков А. А. - канд. техн. наук, доц. ДГМА;  
 Kostikov A. A. - candidate of technical science, associate professor DSEA.  
 E-mail: [alexkst63@gmail.com](mailto:alexkst63@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-3503-4836>

Ерфорт Ю. О. – доц. ДДМА;  
 Ерфорт Ю. А. – доц. ДГМА;  
 Erfort Yu. A. – associate professor DSEA;  
 E-mail: [yura.erfort@gmail.com](mailto:yura.erfort@gmail.com).

Суботін О. В. – канд. техн. наук, доц. ДДМА;  
 Субботин О. В. – канд. техн. наук, доц. ДГМА;  
 Subotin O. V. – Cand. tech. sciences, associate professor DSEA;  
 E-mail: [o.v.subotin@ukr.net](mailto:o.v.subotin@ukr.net)

Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА), м. Краматорськ.  
 Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА), г. Краматорск.  
 Donbass State Engineering Academy (DSEA), Kramatorsk.

## АНОТАЦІЯ / АННОТАЦИЯ / ANNOTATION

**Подлесний С. В., Костіков О. А., Ерфорт Ю. О., Суботін О. В. Динаміка пов'язаних нелінійних осциляторів. Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. 2020. № 1 (48).**

У статті розглянуті нелінійні динамічні електромеханічні системи зі змінними індуктивністю і ємністю, а також динамо Т. Рікітакі. Ряд властивостей цих систем, такі як нестійкість, нелінійність, відкритість, дисипація, породжують режими існування і еволюції, властиві широкому класу складних систем. В першу чергу це хаотичні режими, які зараз прийнято вважати характерними етапами розвитку будь-якої досить складної нелінійної системи. Такі системи демонструють велике розмаїття динамічних станів і переходів, а також можливість забезпечити ефективний вплив на характеристики формованих коливань за допомогою зміни параметрів.

Розглянуті електромеханічні системи зі змінними індуктивністю і ємністю використовуються в електровимірювальних приладах. Модель дводискового динамо Рікітаке не тільки могла самозбуджуватися, але і при критичних значеннях параметрів могла перебувати в нестійкому стані, яке призводило до зміни як величини, так і напрямку вектора збуджуваного нею магнітного поля і демонструє процес генерації і регенерації магнітного поля Землі і зміну магнітних полюсів. Для досліджуваних систем на основі електродинамічних аналогій Лагранжа-Максвелла складені математичні моделі і проведено чисельні експерименти в системі Mathcad. Результати представлені у вигляді графіків і фазових портретів досліджуваних моделей. Отримані результати можуть бути використані при розробці технічних пристроїв, здатних демонструвати складну поведінку. У методичному плані пропонований матеріал цікавий для студентів і аспірантів, що спеціалізуються в області електромеханіки, в плані навчання принципам побудови та аналізу електромеханічних систем.

**Ключові слова:** динамічні системи, нелінійні коливання, пов'язані осцилятори, нестійкість, моделі, електромеханічні системи, динамо Рікітакі, електродинамічні аналогії, рівняння Лагранжа-Максвелла, біфуркації, хаос.

**Подлесный С. В., Костиков А. А., Ерфорт Ю. А., Субботин О. В. Динамика связанных нелинейных осцилляторов. Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии. 2020. № 1 (48).**

В статье рассмотрены нелинейные динамические электромеханические системы с переменными индуктивностью и емкостью, а также динамо Т. Рикитак. Ряд свойств этих систем, такие как неустойчивость, нелинейность, открытость, диссипация, порождают режимы существования и эволюции, присущие широкому классу сложных систем. В первую очередь это хаотические режимы, которые сейчас принято считать характерными этапами развития любой достаточно сложной нелинейной системы. Такие системы демонстрируют большое разнообразие динамических состояний и переходов, а также обеспечивают эффективное воздействие на характеристики формируемых колебаний с помощью изменения параметров. Рассмотренные электромеханические системы с переменными индуктивностью и емкостью используются в электроизмерительных приборах. Модель двухдискового динамо Рикитак не только могла самовозбуждаться, но и при критических значениях параметров могла находиться в неустойчивом состоянии, которое приводило к изменению как величины, так и направления вектора возбуждаемого ею магнитного поля и демонстрирует процесс генерации и регенерации магнитного поля Земли и изменение магнитных полюсов. Для исследуемых систем на основе электродинамических аналогий Лагранжа-Максвелла составлены математические модели и проведены многочисленные эксперименты в системе Mathcad. Результаты представлены в виде графиков и фазовых портретов исследуемых моделей. Полученные результаты могут быть использованы при разработке технических устройств, способных демонстрировать сложное поведение. В методическом плане предлагаемый материал интересен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области электромеханики, в плане обучения принципам построения и анализа электромеханических систем.

**Ключевые слова:** динамические системы, нелинейные колебания, связанные осцилляторы, неустойчивость, модели, электромеханические системы, динамо Рикитак, электродинамические аналогии, уравнения Лагранжа-Максвелла, бифуркации, хаос.

**Podlesny S. V., Kostikov A. A., Erfort Yu. A., Subotin O. V. Dynamics of coupled nonlinear oscillators. Herald of the DSEA. 2020. № 1 (48).**

The article considers nonlinear dynamic electromechanical systems with variable inductance and capacitance, as well as the dynamo T. Rikitaki. A number of properties of these systems, such as instability, nonlinearity, openness, dissipation, give rise to the modes of existence and evolution inherent in a wide class of complex systems. First of all, these are chaotic regimes, which are now considered to be characteristic stages of development of any rather complex nonlinear system. Such systems demonstrate a wide variety of dynamic states and transitions, and also provide an effective impact on the characteristics of the generated oscillations by changing the parameters. The considered electromechanical systems with variable inductance and capacitance are used in electrical measuring instruments. The Rikitake model of a double-disk dynamo could not only self-excite, but even at critical values of the parameters could be in an unstable state, which led to a change in both the magnitude and direction of the magnetic field excited by it and demonstrates the process of generation and regeneration of the Earth's magnetic field and a change in magnetic poles. For the systems under study, based on the Lagrange-Maxwell electrodynamic analogies, mathematical models have been compiled and numerous experiments have been conducted in the Mathcad system. The results are presented in the form of graphs and phase portraits of the studied models. The results can be used in the development of technical devices that can demonstrate complex behavior. In methodological terms, the proposed material is interesting for students and graduate students specializing in the field of electromechanics, in terms of teaching the principles of construction and analysis of electromechanical systems.

**Keywords:** dynamical systems, nonlinear oscillations, coupled oscillators, instability, models, electromechanical systems, Rikitaki dynamo, electrodynamic analogies, Lagrange-Maxwell equations, bifurcations, chaos.