

УДК 531, 621

DOI:

Подлесний С. В., Ерфорт Ю. О., Суботін О. В.

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРІВ ПІД ДІЄЮ СИЛ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ

Застосування нових технологій проектування, заснованих на використанні методів математичного моделювання та обчислювальної техніки, дозволяє забезпечити високу якість і швидкі терміни виконання проектно-конструкторських робіт. Застосування математичного моделювання при проектуванні в більшості випадків дозволяє відмовитися від фізичного моделювання, значно скоротити обсяги випробувань і доводочних робіт, забезпечити створення технічних об'єктів з високими показниками ефективності і якості. Одним з основних компонентів системи проектування в цьому випадку стає математична модель.

У природі і техніці зустрічається багато прикладів нелінійних осциляторів, що рухаються під дією сил різної фізичної природи (фізичної, біологічної, хімічної та іншої). З ними пов'язані такі поняття, як атрактори, хаос, біфуркації та ін. Вивчення динаміки нелінійних осциляторів здавна знаходиться в центрі уваги багатьох вчених механіків. І зокрема це стосується розгляду електромеханічних систем, таких як електричні прилади, деякі типи магнітоелектричних гасителів, гіроскопи, магнітні підвіси і підшипники, пристрої транспортування і орієнтування деталей, а також деякі види електричних машин, наприклад, уніполярні і ін. В даний час динамічно розвивається мехатроніка, в якій спостерігається тенденція мініатюризації розроблюваних мехатронних пристроїв на базі мікросистемних технологій (мікро- і наноелектромеханічних). Це дає можливість створювати мініатюрні резонансні чутливі елементи і прилади - гіроскопи, акселерометри, турбінні генератори і ряд інших. Більшість резонансних систем має один або два ступеня свободи. Рівняннями руху нелінійних осциляторів описують досить широкий клас різноманітних об'єктів – від макро- до мікрорівня.

Нелінійні системи мають ряд особливостей. При певних умовах можлива хаотична поведінка системи, а також можливі стани нетривіальної рівноваги. Одним з таких для маятника є верхнє положення рівноваги – в літературі такий маятник називається перевернутим чи маятником Капіци. У роботах [1 - 10] проведено дослідження динаміки різних електромеханічних систем.

Метою роботи є аналіз динаміки нелінійних моделей осциляторів при спільній дії сил різної фізичної природи.

Як приклад електромеханічної системи в змінному магнітному полі розглянемо маятникову систему [11], роль твердого тіла в якій грає замкнутий контур струму, жорстко з'єднаний з підвісом невагомим стрижнем (рис. 1).

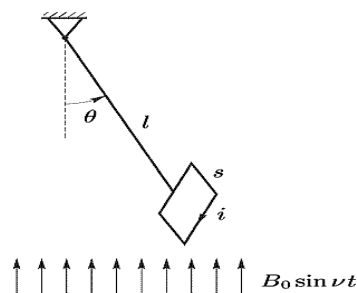


Рис. 1. Маятникова система в змінному магнітному полі

Припустимо, що маятник знаходиться в змінному магнітному полі, частота якого ν багато більше, ніж частота малих вільних коливань маятника. Позначимо θ кут відхилення

маятника від вертикальної осі, приймаючи, що $\theta = 0$ відповідає його нижньому положенню. Вирази для кінетичної енергії T , енергії магнітного поля W і потенційної енергії Π мають вигляд:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, W = \frac{1}{2} Li^2 + B_0 S \sin \nu t \sin \theta i, \quad \Pi = mgl(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

де I – момент інерції контуру щодо осі, що проходить через точку підвісу; m – маса контуру; l – довжина стрижня; L – коефіцієнт самоіндукції контуру струму i ; B_0 – амплітуда зовнішнього поля.

Рівняння Лагранжа-Максвелла досліджуваної електромеханічної системи:

$$\begin{aligned} I \ddot{\theta} - B_0 S \sin \nu t \cos \theta i + mgl \sin \theta &= 0, \\ Li + B_0 S \sin \nu t \cos \theta \dot{\theta} + B_0 S \nu \cos \nu t \sin \theta + Ri &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Вважаючи, що частота магнітного поля багато більше власної частоти коливань маятника $k = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \ll \nu$ введемо малий параметр $\varepsilon^2 = \frac{k^2}{\nu^2}$. Переходячи в рівняннях (2) до безрозмірного (швидкого) часу $\tau = \nu t$ і безрозмірного току $i_u = i/i_*$, де базисне значення струму $i_* = \frac{B_0 S}{L}$, отримаємо такі рівняння в безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \varepsilon^2 \gamma \sin \tau \cos \theta i_u + \varepsilon^2 \sin \theta &= 0, \\ i_u + \sin \tau \cos \theta \dot{\theta} + \cos \tau \sin \theta + r i_u &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

У цих рівняннях введені безрозмірні параметри $\gamma = \frac{(B_0 S)^2}{L m g l}$ та $r = \frac{R}{L \nu}$. Надалі збережемо за безрозмірними змінними колишні позначення. Маючи на увазі дослідження повільних рухів, близьких до вільних коливань маятника, перепишемо систему (3) як

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \varepsilon \omega, \quad \dot{\omega} = \varepsilon \gamma \sin \tau \cos \theta i - \varepsilon \sin \theta, \\ i + \sin \tau \cos \theta \dot{\theta} + \cos \tau \sin \theta + r i &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) – квазілінійна з однією некритичною швидкою змінною. Перше наближення асимптотичної процедури описує консервативну систему. Електромагнітні сили в першому наближенні мають потенціал – середню енергію вихрових струмів, обчислених в тому ж наближенні. Консервативність може бути порушена в другому наближенні до електромагнітних сил.

Виконаємо моделювання динаміки системи, прийнявши параметри: $\varepsilon = 2, \gamma = 0,1, r = 2$. На рис. 2-3 представлені графіки залежності $\theta(\tau)$ і $\omega(\tau) = d\theta/d\tau$.

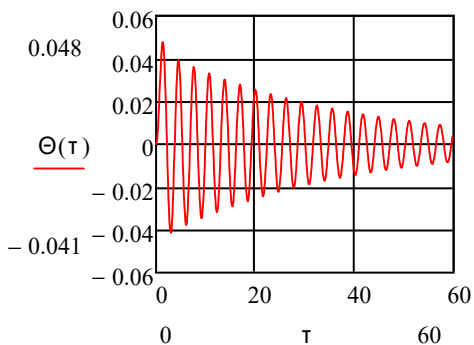


Рис. 2. Залежність кута θ від часу

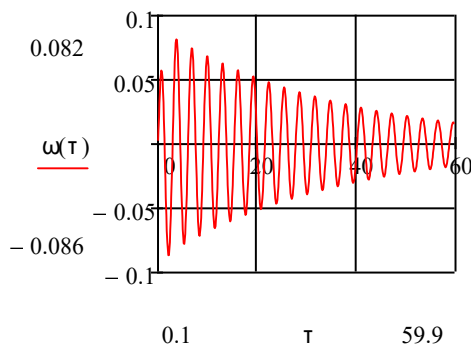


Рис. 3. Залежність кутової швидкості від часу

На наступному рис. 4 представлений фазовий портрет в координатах: $\omega(\tau) - \theta(\tau)$.

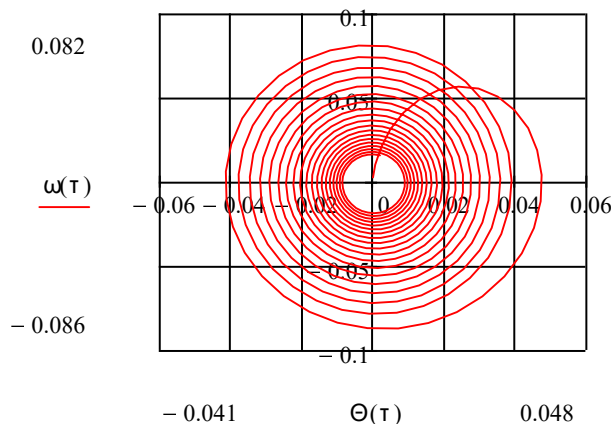


Рис. 4. Фазовий портрет в координатах: $\omega(\tau) - \theta(\tau)$.

Розглянемо нелінійний осцилятор під періодичним зовнішнім впливом. При наявності зовнішнього періодичного впливу в рівняннях коливань з'являються члени, що містять явну залежність від часу, і нелінійний осцилятор перетворюється в неавтономну систему, яка може демонструвати складну динаміку і перехід до хаосу. Якщо припустити, що нелінійна залежність відновлюваної сили для осцилятора має вигляд $f(x)$, а сила тертя пропорційна швидкості, то приходимо до рівняння

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = a \sin \omega t, \quad (5)$$

де γ – параметр дисипації, a й ω задають частоту і амплітуду впливу.

Інший варіант – параметричне збудження, коли ми маємо періодичну залежність коефіцієнта в рівнянні від часу:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + a \sin \omega t) f(x) = 0. \quad (6)$$

Прикладами можуть служити маятник з довжиною нитки, що періодично змінюється і нелінійний LCR -контур, в якому періодичним чином змінюють у часі ємність або індуктивність.

Як при силовому, так і при параметричному збудженні нелінійного дисипативного осцилятора, на площині параметрів зазвичай представлені області різних за характером періодичних і хаотичних режимів, біфуркації подвоєння періоду, складки, зборки і «перехрестя».

Прикладом може служити система типу (5) з кубічною нелінійною функцією $f(x)=x^3$. Її називають осцилятором Дуффінга або осцилятором Уеди. Механічна система, описувана рівнянням Дуффінга із зовнішнім періодичним впливом представлена на рис. 5 [12]. Шарик закріплений на встановленій вертикально пружній пластині, причому коефіцієнт пружності підібраний так, що при малих кутах відхилення повертаюча сила пружності в точності компенсує відхиляючий момент сили тяжіння. Осцилятор Уеди може бути реалізований так само у вигляді електричної схеми – коливального контуру з нелінійною індуктивністю.

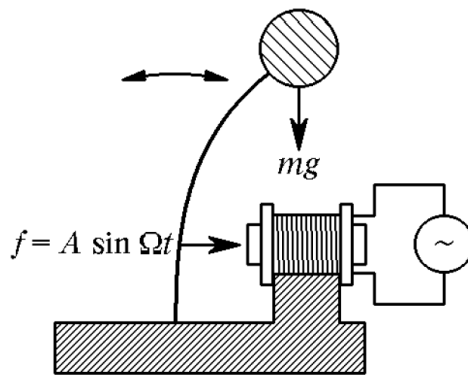


Рис. 5. Осцилятор Уеди

Нижче на рисунках 6-8 наведено графіки, що моделюють рішення рівняння (5) при $f(x)=x^3$. Тут прийнято: $a = 2, \gamma = 0,1, \nu = 0,5, v = dx/dt$.

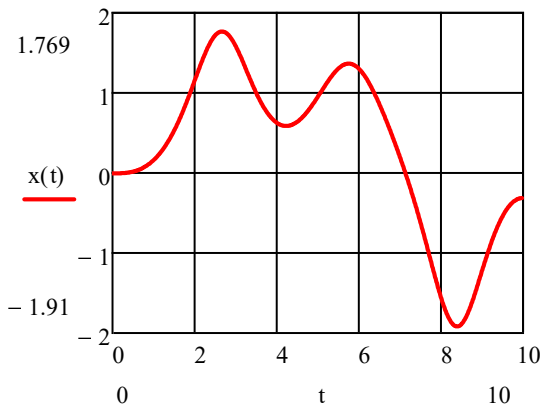


Рис. 6. Залежність координати x від часу

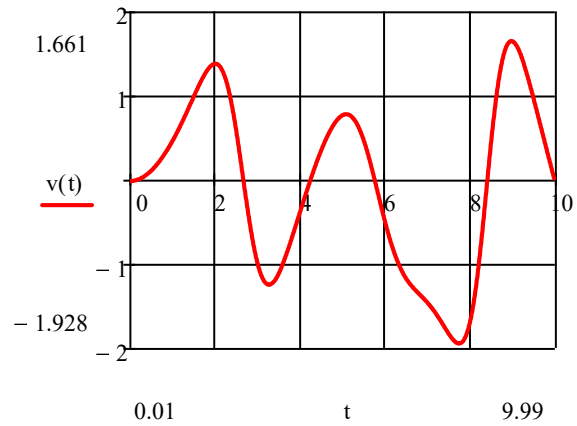


Рис. 7. Залежність швидкості від часу

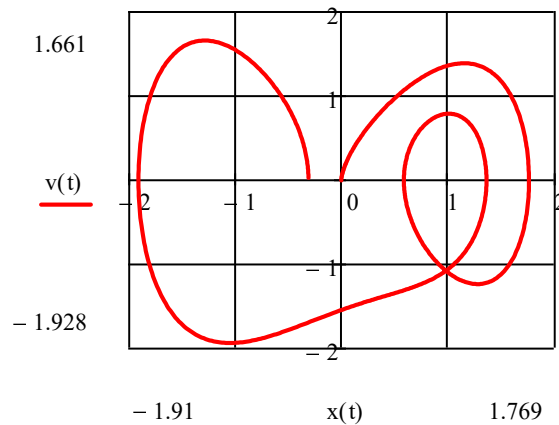


Рис. 8. Фазовий портрет в координатах $v(t)$ - $x(t)$

Розглянемо реакцію послідовного LRC ланцюга на підключення постійної вхідної напруги (рис. 9). Мається на увазі ферорезонансний ланцюг з індуктивністю, що залежить від струму [13].

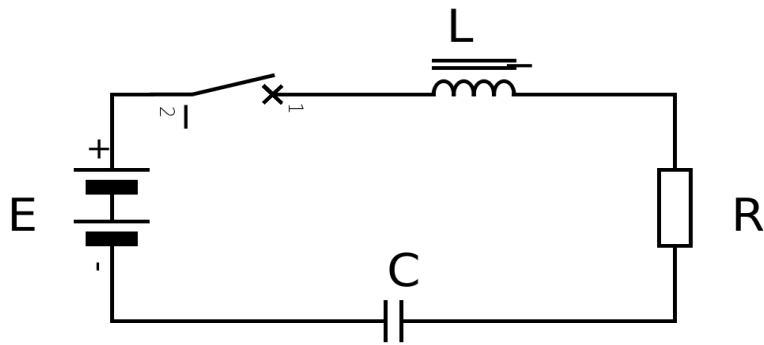


Рис. 9. LRC ланцюг

Рівняння ланцюга можна записати у вигляді

$$n \frac{d\varphi}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = E, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad (7)$$

де φ – магнітний потік сердечника, n – число витків обмотки сердечника, q – заряд конденсатора, R – омичний опір, i – струм, C – ємність конденсатора, E – електрорушійна сила (ЕРС), t – час. В даному випадку мається на увазі ферорезонансний ланцюг з індуктивністю, що залежить від струму.

Припустимо, що крива намагнічування сердечника визначається рівнянням

$$\varphi = c1 \cdot n \cdot i + c2 \cdot th(n \cdot i), \quad (8)$$

де $c1$ і $c2$ - постійні, залежні від матеріалу сердечника.

Вводячи чисельні значення параметрів

$n = 1, R = 0,2, C = 2,5, c1 = 0,08, c2 = 0,4$
і використовуючи рівняння (7) і (8), одержуємо

$$\left(1,2 - th^2 \frac{dq}{dt}\right) \frac{d^2q}{dt^2} + 0,5 \frac{dq}{dt} + q = 2,5E. \quad (9)$$

Результати моделювання у вигляді фазового портрета представлені на рис. 10.

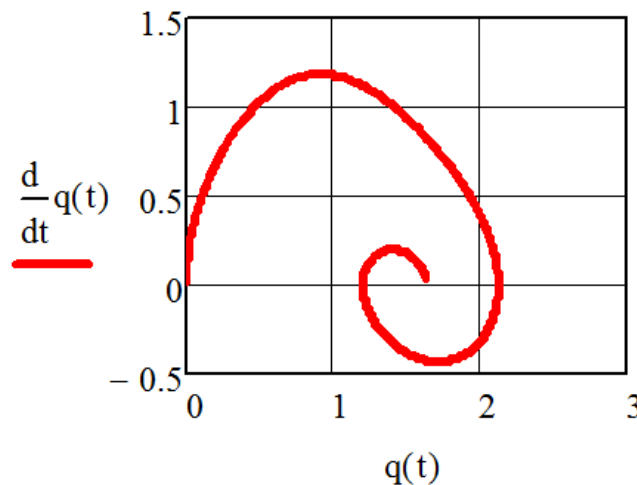


Рис. 10. Фазовий портрет залежності струму від заряду

Розглянемо маятник Дубошінського (рис. 11) – механічний маятник, що здійснює незгасаючі квазі-власні коливання за рахунок взаємодії з високочастотним змінним магнітним полем. [1, 2, 14]. Цей ефект був відкритий братами Данилом і Яковом Дубошінськими в 1968-1969 роках.

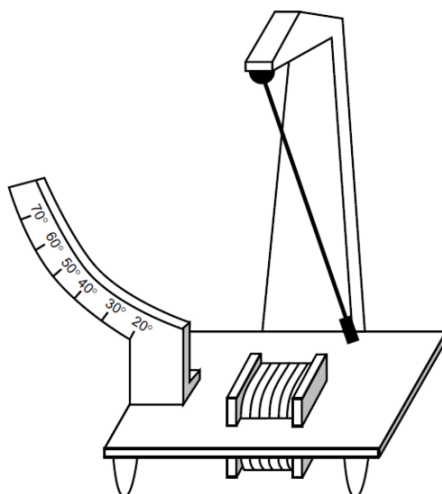


Рис. 11. Маятник Дубошінського

Маятник Дубошінського складається з двох взаємодіючих частин:

- механічного маятника з власної низькою частотою, з невеликим постійним магнітом, прикріпленим до його нижнього кінця;
- нерухомого електромагніта, що знаходиться під точкою рівноваги траєкторії маятника і що живиться змінним струмом з частотою від десятків до тисяч герц.

Постійний магніт на кінці маятника взаємодіє з магнітним полем соленоїда тільки на обмеженій частині траєкторії маятника над соленоїдом. Ця просторова неоднорідність взаємодії дозволяє маятнику регулювати свій обмін енергією з магнітним полем. Загасаючий рух маятника, спочатку відпущеного з будь-якого положення, може перейти в стійке, близьке до періодичного. При такому русі маятник за один або за кілька періодів коливань витягує з взаємодії з електромагнітом порцію енергії, в точності компенсуючу втрати на тертя за цей же час. Стійкість коливань підтримується самоподстройкою фазового співвідношення між маятником і високочастотним полем.

Амплітуда що встановилися коливань приймає одне стаціонарне значення з дискретної безлічі значень, можливих для даної частоти живлення електромагніту. Квантовані амплітуди практично не залежать від сили змінного струму, що живить електромагніт. У той же час амплітуди вельми чутливі до змін частоти цього струму. Чим вище ця частота, тим більше кількість квантованих амплітуд, які здатний реалізувати маятник.

Рівняння коливань розглянутого маятника при досить малих відхиленнях від положення рівноваги має вигляд

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(1 - \gamma x^2)x = f(x, t), \quad (10)$$

де $f(x, t)$ – сила взаємодії між маятником і електромагнітом.

У рівнянні (10) збережені лінійний і кубічний члени в повертаючій силі. Облік нелінійних членів вищого порядку не вносить нічого принципово нового в результати.

Для простоти припустимо, що сила взаємодії має вигляд

$$f(x, t) = A \cos \omega t \quad \text{при } |x| \leq b,$$

$$= 0 \quad \text{при } |x| > b,$$

тобто

$$f(x, t) = \mathcal{G}(b+x)\mathcal{G}(b-x)A \cos \omega t,$$

де $\mathcal{G}(z)$ – функція Хевісайда.

Будемо розглядати такі режими коливань маятника, для яких амплітуда a багато більше інтервалу взаємодії b .

Для прикладу розглянуто випадок з наступними параметрами: $a = 6, b = 0.4, \delta = 0.3, \gamma = 0.2, \omega_0 = 1.5, \omega = 4$. Результати моделювання представлені на рисунках 12-14. Тут $v(t) = dx(t)/dt$.

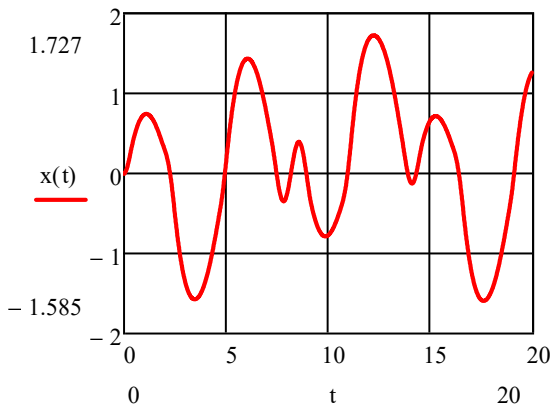


Рис. 12. Залежність координати x від часу

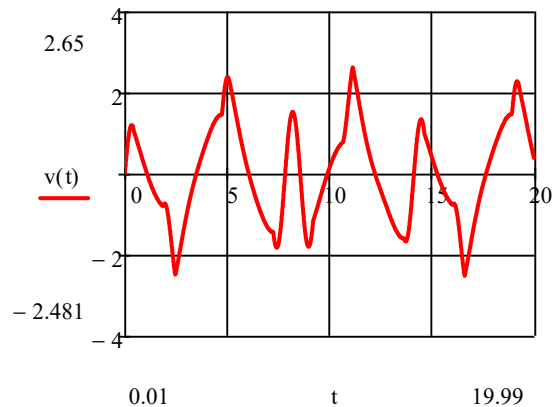


Рис. 13. Залежність швидкості від часу

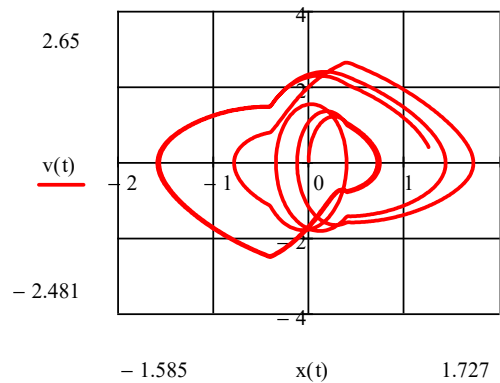


Рис. 14. Залежність швидкості від координати x

ВИСНОВКИ

Проведено аналіз динаміки нелінійних осциляторів при спільній дії електромагнітного і гравітаційного збурень. Дослідження виконано для нелінійної моделі без застосування асимптотичних методів, що дозволило виключити методичну похибку рішення. Побудовано графіки параметрів переміщень і швидкостей, а також фазові портрети. Маючи математичні моделі і програми розрахунку можна проводити подальші дослідження розглянутих систем, виявляючи положення стійкої та нестійкої рівноваги, режими автоколивань, виявляючи області різних за характером періодичних і хаотичних режимів, біфуркації, складки, зборки і ін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ланда П. С., Дубошинский Я. Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии. *Успехи физических наук*. Том 158, вып. 4. 1989. С. 729–742.
2. Damgov V., Popov I. "Discrete" Oscillations and Multiple Attractors in Kick-excited Systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 4, 2000. P. 99–124.
3. Мусалимов М. С., Петрищев М.С., Нгок Чау Чан. Динамические эффекты нелинейных маятников и их учет при проектировании чувствительных элементов мехатронных систем. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2006. Том 06, номер 8. С. 227-232.
4. Саранин В. А. Электростатические осцилляторы. *Успехи физических наук*. Том 182, № 7. 2012. С. 749–759.
5. Подлесный С. В. Динамічна модель електромеханічної системи електромагнітного гальма. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. № 1 (40), 2017. С. 11-17. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2017_1_4
6. Подлесный С. В., Ерфорт Ю. О., Жук Я. А. Динаміка електромагнітного і електростатичного підвісів ротора. *Научный вестник ДГМА*. № 1 (22E), 2017. С. 42-48. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2017_1_9
7. Подлесный С. В., Жук Я. А., Криворучек В. В. Дослідження динаміки електровимірювальних приладів в системі MATHCAD. *Научный вестник ДГМА*. № 2 (23E), 2017. С. 57-63. URL: [http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%962\(23%D0%95\)_2017/article/12.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%962(23%D0%95)_2017/article/12.pdf)
8. Подлесный С. В. Моделирование электромеханической системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока. *Научный вестник ДГМА*. № 1 (19E), 2016. С. 87-95. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2016_1_14
9. Подлесный С. В. Моделирование динамики униполярного генератора. *Научный вестник ДГМА*. № 3 (15E), 2014. С. 95-100. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2014_3_18
10. Подлесный С. В., Стадник А. Н., Ларичкин А. В. Моделирование динамики электромеханических систем. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. № 3 (36), 2015. С. 171–176. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2015_3_31
11. Скубов Д. Ю., Ходжаев К. Ш. Нелинейная электромеханика. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 360 с.
12. Бекман И.Н. Нелинейная динамика сложных систем: теория и практика. Материалы к курсу лекций и учебнику. Москва, 2018. Режим доступа: <http://profbeckman.narod.ru/NelDin/NelDinText.pdf>.
13. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. Москва: Мир, 1968. 432 с.
14. Маятник дубошинского. URL: https://ru.qwe.wiki/wiki/Doubochinski's_pendulum.

REFERENCES

1. Landa P.S., Duboshinsky Ya. B. Self-oscillating systems with high-frequency energy sources. *Advances in physical sciences*. Volume 158, no. 4. 1989. pp. 729-742. (in Russian).
2. Damgov V., Popov I. "Discrete" Oscillations and Multiple Attractors in Kick-excited Systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 4, 2000. pp. 99-124. (in Russian).
3. Musalimov M.S., Petrishchev M.S., Chan Ngok Chau. Dynamic effects of nonlinear pendulums and their accounting when designing sensitive elements of mechatronic systems. *Scientific and Technical Bulletin of Information Technologies*. Mechanics and Optics. 2006. Volume 06, Number 8. pp. 227-232. (in Russian).
4. Saranin V.A. Electrostatic oscillators. *Advances in physical sciences*. Volume 182, No. 7. 2012. pp. 749-759. (in Russian).
5. Podlesny S. V. Dynamical model of electromechanical systems and electromagnetism. *Herald of the Donbass State Power Engineering Academy*. No. 1 (40), 2017. pp. 11-17. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2017_1_4 (in Ukrainian).
6. Podlesny S. V., Erfort Yu. O., Zhuk Ya. A. Dynamo electromagnet and electrostatic rotors. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 1 (22E), 2017. pp. 42-48. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2017_1_9 (in Ukrainian)
7. Podlesny S. V., Zhuk Y. A., Krivoruchek V.V. Retrieving the dynamics of electrical appliances in the MATHCAD system. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 2 (23E), 2017. pp. 57-63. URL: [http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%962\(23%D0%95\)_2017/article/12.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%962(23%D0%95)_2017/article/12.pdf) (in Ukrainian)
8. Podlesny S. V. Modeling of an electromechanical system for automatic regulation of the voltage of a direct current generator. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 1 (19E), 2016. pp. 87–95. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2016_1_14 (in Russian).
9. Podlesny S. V. Modeling the dynamics of a unipolar generator. *Scientific Herald of the DSEA*. No. 3 (15E), 2014. pp. 95-100. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvdgma_2014_3_18 (in Russian).
10. Podlesny S. V., Stadnik A. N., Larichkin A. V. Modeling the dynamics of electromechanical systems. *Herald of the Donbass State Power Engineering Academy*. No. 3 (36), 2015. pp. 171-176. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vddma_2015_3_31 (in Russian).

11. Skubov D. Yu., Khodzhaev K. Sh. Nonlinear Electromechanics. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 360 p. (in Russian).
12. Beckman I.N. Nonlinear dynamics of complex systems: theory and practice. *Materials for the lecture course and textbook*. Moscow, 2018. Access mode: <http://profbeckman.narod.ru/NelDin/NelDinText.pdf>.
13. Hayashi T. Non-linear oscillations in physical systems. Moscow: Mir, 1968. 432 p. (in Russian).
14. Duboshinsky Pendulum. URL: https://ru.qwe.wiki/wiki/Doubochinski's_pendulum.

АВТОРИ / АВТОРЫ / AUTORS

Подлесний С. В. – канд. техн. наук, доц. ДДМА,
Подлесный С. В. – канд. техн. наук, доц. ДГМА
Podlesny S. V. – Cand. tech. sciences, associate professor DSEA;
E-mail: sergeypodlesny@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0001-8271-4004>

Ерфорт Ю. О. – доц. ДДМА;
Ерфорт Ю. А. – доц. ДГМА;
Erfort Yu. A. – associate professor DSEA;
E-mail: yura.erfort@gmail.com.

Суботін О. В. – канд. техн. наук, доц. ДДМА;
Субботин О. В. – канд. техн. наук, доц. ДГМА;
Subotin O. V. – Cand. tech. sciences, associate professor DSEA;
E-mail: o.v.subotin@ukr.net

Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА), м. Краматорськ.
Донбасская государственная машиностроительная академия (ДГМА), г. Краматорск.
Donbass State Engineering Academy (DSEA), Kramatorsk.

АНОТАЦІЯ / АННОТАЦИЯ / ANNOTATION

Подлесний С. В., Ерфорт Ю. О., Суботін О. В. Нелінійні коливання осциляторів під дією сил різної фізичної природи. Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. 2020. № 1 (48).

В електромеханіці, робототехніці, мехатроніці широко використовуються пристрої (магнітоелектричні гасителі, гіроскопи, акселерометри і ін.), в яких спостерігаються нелінійні коливання. В роботі розглянуто кілька видів нелінійних осциляторів, проведено чисельне дослідження їх динаміки при дії зовнішніх збурень різної фізичної природи (гравітаційної, електричної, магнітної). Розглянуто: маятник в змінному магнітному полі (частота магнітного поля багато більше власної частоти коливаний маятника); осцилятор Уєди (осцилятор Дуффінга); маятник Дубошінського; LRC ланцюг з індуктивністю (використаний ферорезонансний ланцюг), що залежить від струму. Побудовано математичні моделі на основі електромеханічних аналогій Лагранжа-Максвелла, що враховують особливості нелінійних систем. При певних умовах можлива хаотична поведінка систем, а також можливі стани нетривіальної рівноваги. У моделях взаємопов'язані як механічні характеристики (момент інерції, кутова швидкість і ін.) так і електромагнітні параметри пристроїв (електрорушійна сила, індуктивність, омичний опір і ін.). У загальному вигляді знайдені рішення для цих систем, що дозволяють виконувати подальше дослідження їх динаміки, задаючи його конкретні значення параметрів. Дослідження виконано для нелінійної моделі без застосування асимптотичних методів, що дозволило виключити методичну похибку рішення. Моделі можуть демонструвати складну динаміку. В моделях використаний перехід до безрозмірних параметрів. Отримано графіки і фазові портрети. Маючи математичні моделі і програми розрахунку можна проводити подальші дослідження розглянутих систем, виявляючи положення стійкої та нестійкої рівноваги, режими автоколиваний, виявляючи області різних за характером періодичних і хаотичних режимів, бифуркації, складки, зборки і ін.

Ключові слова: нелінійна динаміка, осцилятор, електромеханічні аналоги, рівняння Лагранжа-Максвелла, маятник, осцилятор Уєди, маятник Дубошінського, хаос, автоколивання, фазовий портрет.

Подлесный С. В., Ерфорт Ю. А., Субботин О. В. Нелинейные колебания осцилляторов под действием сил различной физической природы. Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии. 2020. № 1 (48).

В электромеханике, робототехнике, мехатронике широко используются устройства (магнитоэлектрические гасители, гироскопы, акселерометры и др.), в которых наблюдаются нелинейные колебания. В работе рассмотрено несколько видов нелинейных осцилляторов, проведено численное исследование их динамики при действии внешних возмущений различной физической природы (гравитационной, электрической, магнитной). Рассмотрены: маятник в переменном магнитном поле (частота магнитного поля много больше собственной частоты колебаний маятника); осциллятор Уеды (осциллятор Дуффинга); маятник Дубошинского; LRC цепь с индуктивностью, зависящей от тока (использована феррорезонансная цепь). Построены математические модели на основе электромеханических аналогий Лагранжа-Максвелла, учитывающие особенности нелинейных систем. При определенных условиях возможна хаотическое поведение систем, а также возможные состояния нетривиального равновесия. В моделях взаимосвязаны как механические характеристики (момент инерции, угловая скорость и др.), так и электромагнитные параметры устройств (электродвижущая сила, индуктивность, омическое сопротивление и др.). В общем виде найдены решения для этих систем, позволяющие выполнять дальнейшее исследование их динамики, задавая конкретные значения параметров. Исследование выполнено для нелинейных модели без применения асимптотических методов, что позволило исключить методическую погрешность решения. Модели могут демонстрировать сложную динамику. В моделях использован переход к безразмерным параметрам. Получены графики и фазовые портреты. Имея математические модели и программы расчета можно проводить дальнейшие исследования рассматриваемых систем, проявляя положения устойчивого и неустойчивого равновесия, режимы автоколебаний, выявляя области разных по характеру периодических и хаотических режимов, бифуркации, складки, сборки и др.

Ключевые слова: нелинейная динамика, осциллятор, электромеханические аналоги, уравнения Лагранжа-Максвелла, маятник, осциллятор Уеды, маятник Дубошинского, хаос, автоколебания, фазовый портрет.

Podlesny S. V., Erfort Yu. A., Subotin O. V. Nonlinear oscillations of oscillators under the action of forces of various physical nature. Herald of the DSEA. 2020. № 1 (48).

In electromechanics, robotics, mechatronics, devices (magnetolectric dampers, gyroscopes, accelerometers, etc.) are widely used in which nonlinear oscillations are observed. Several types of nonlinear oscillators are considered in the work, their dynamics under the influence of external perturbations of various physical nature (gravitational, electrical, magnetic) is numerically studied. Considered: a pendulum in an alternating magnetic field (the frequency of the magnetic field is much greater than the natural frequency of the pendulum); Ueda Oscillator (Duffing Oscillator); Duboshinsky pendulum; LRC circuit with current-dependent inductance (ferroresonant circuit used). Mathematical models based on the electromechanical analogies of Lagrange-Maxwell are constructed, taking into account the features of nonlinear systems. Under certain conditions, chaotic behavior of systems is possible, as well as possible states of nontrivial equilibrium. In the models, both mechanical characteristics (moment of inertia, angular velocity, etc.) are interconnected, and electromagnetic parameters of devices (electromotive force, inductance, ohmic resistance, etc.). In general terms, solutions were found for these systems, which allow further investigation of their dynamics, setting specific values of the parameters. The study was performed for non-linear models without the use of asymptotic methods, which allowed us to exclude the methodological error of the solution. Models can exhibit complex dynamics. The models used the transition to dimensionless parameters. Received graphs and phase portraits. Having mathematical models and calculation programs, it is possible to carry out further studies of the systems under consideration, exhibiting the positions of stable and unstable equilibrium, self-oscillation modes, revealing areas of periodic and chaotic modes of different nature, bifurcation, folding, assembly, etc.

Keywords: nonlinear dynamics, oscillator, electromechanical analogues, Lagrange-Maxwell equations, pendulum, Ueda oscillator, Duboshinsky pendulum, chaos, self-oscillations, phase portrait.

Стаття надійшла до редакції 11.09.2019 р.