

УДК 681.5:51-74

Разживин А. В., Белошапка Е. Д.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗАКАЛКИ ДЕТАЛИ В ТЕРМИЧЕСКОЙ ПЕЧИ

Металлургическая отрасль играет важную роль в формировании экономики Украины. В условиях постоянного повышения стоимости природных ресурсов, усиления требований к качеству металлургической продукции и экологической безопасности производства существует необходимость внедрения новых технологий закалки деталей. Проведение закалки в термической печи обеспечивает высокую степень закалки, позволяет внедрить полную механизацию и комплексную автоматизацию процесса, сокращает цикл закалки. Тепловой режим закалки является одним из основных параметров технологического процесса, т. к. в данный период закладываются основные физико-химические свойства закаляемой детали. Стабилизация теплового режима по зонам печи на уровне $\pm 10^\circ\text{C}$ является обязательным условием получения качественной продукции. Следовательно, необходима система управления температурным режимом закалки, которая будет поддерживать установленный директивный температурный график. Однако, есть сложности измерений показателей теплового состояния закаливаемой детали.

Целью работы является разработка математических моделей теплового состояния печи, которые достаточно полно описывают тепловые процессы при термической закалке деталей.

Такие математические модели основываются на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных, содержат граничные условия различного рода, а также условия для определения положения границы фазового перехода.

Рассматривая технологический процесс термической обработки детали и конструктивные особенности термических печей, можно представить печь двумя взаимодействующими между собой подсистемами:

- 1) источник тепла (горелка) от горения газозоудшной смеси (ГВС), непосредственно преобразующая энергию горения в подводимую к закаляющейся детали теплоту и характеризующаяся мощностью P_z ;
- 2) печь, в которой происходят процессы преобразования физико-химических свойств закаляющейся детали заданного качества и характеризующаяся мощностью тепловых потерь P_{mn} .

Анализ интегральных показателей энергетических процессов в газовой термической печи, учет их пространственного распределения может быть сделан путем решения дифференциальных уравнений в частных производных. Такое решение позволяет описать тепловые процессы, распределенные во времени и пространстве [1, 2].

Используя уравнения теплового баланса и пренебрегая тепловым потоком, выделяемым в закаляющейся детали за счет химических реакций, можно записать:

$$c_o \cdot M_o \cdot \frac{\partial T_o}{\partial \tau} = c_c \cdot M_c \cdot \frac{\partial T_c}{\partial \tau} + \lambda_s \frac{P_z(\tau) - P_{mn}(\tau)}{\pi r_{nl}^2}, \quad (1)$$

где C_o , C_c – удельные теплоемкости массы детали и внутренней среды, соответственно;

M_d, M_c – массы детали и внутренней среды, соответственно.

В уравнение (1) входит величина тепловых потерь $P_{mn}(\tau)$, которая состоит из сравнительно небольших постоянных потерь через футеровку и охлаждающую воду и значительных потерь переменного характера, связанных с отходящими газами [1, 3]. Большую роль в теплообмене рабочего пространства печи играет внутренняя среда, так как по мере нагрева внутренняя среда аккумулирует тепло закаляющейся детали. При этом внутренняя среда быстрее реагирует на изменение подводимого тепла, чем закаляющаяся деталь.

Анализ уравнения (1) показывает, что изменение температуры участвующих в теплообмене тел зависит от величины теплового потока, воздействующего в результате термического подогрева:

$$Q^*(t) = \lambda_{\text{пламя}} \frac{P_c(\tau) - P_{mn}(\tau)}{\pi r_{\text{пламя}}^2}. \quad (2)$$

При описании тепловых процессов, происходящих в термических установках, используют краевую задачу нестационарного теплообмена и моделирование трехмерного нестационарного распределения температуры в детали на основе интегрально-дифференциальных уравнений теплопроводности (уравнения Фурье) [2, 3].

Опишем процесс теплообмена в термической печи системой дифференциальных уравнений теплопроводности в частных производных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_c}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} \right) + \delta(r - r_1) Q^*, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_d}{\partial t} = a_2 \left(\frac{\partial^2 T_d}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_d}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_d}{\partial x^2} \right) + \delta(x) [F(r, t)], \end{array} \right. \quad (4)$$

где $\delta(r - r_1)$, $\delta(x)$ – дельта-функции по соответствующим координатам распространения тепла от горения ГВС;

$F(r, t) = \delta(r - r_1) Q^* + Q_1 [T_{in}^*(r, t)]$ – параметр, характеризующий мощность источника тепла, передаваемого детали;

$a_2 = 1/c_d M_d$, $a_1 = 1/c_n M_n$ – тепловые передаточные коэффициенты закаляющейся детали и внутренней среды, соответственно;

C_d, C_c – удельная теплоемкость детали и внутренней среды;

M_d, M_c – масса закаляющейся детали и внутривспечной среды.

В уравнения (3–4) приняты следующие допущения: об усреднении и равномерном распределении температуры закалки по зонам печи, цилиндрической форме печи. Такое предположение позволяет утверждать об усреднении температуры поверхностного слоя закаливаемой детали по слоям и равномерном ее распределении по всей длине печи.

Уравнение (3) описывает теплопроводность внутренней среды при наличии внутреннего источника тепла мощностью Q^* , излучаемой теплом от горения ГВС горячей непосредственно внутри печного пространства. Уравнение (4) описывает теплопроводность (изменение температуры) в объекте закалки в процессе нагрева до температуры выдержки.

Нагрев детали происходит путем непосредственного нагрева от горения ГВС и конвекционного теплообмена на поверхности внутривпечной среды и описывается мощностью источника тепла, входящим непосредственно в уравнение $F(r, t)$. На краях детали происходит конвекционный теплообмен с внутривпечной средой, температура которой измеряется встроенными термопарами.

Запишем начальные условия для уравнений (3) и (4):

$$T_c(r, 0) = T_\delta(x, r, 0) = T_0, \quad (5)$$

где T_0 – начальная температура детали и внутривпечной среды.

При решении уравнений (3) введем допущения, что внутривпечная среда является теплоизолированным по поверхности внутривпечная среда–деталь, теплоотдача проходит только по поверхности радиусом R , а теплообмен между внутривпечной средой и деталью учтем при решении уравнения (4).

Граничные условия для уравнения (3):

$$T_{c1}(0, t) < \infty; \quad \frac{\partial T_c}{\partial r} = -\alpha_1 T_c \Big|_{r=R}. \quad (6)$$

Граничные условия для уравнения (4):

$$\frac{\partial T_\delta}{\partial x} = -\alpha_3 T_\delta \Big|_{x=l}; \quad \frac{\partial T_\delta}{\partial r} = -\alpha_2 T_\delta \Big|_{r=R}; \quad \frac{\partial T_\delta}{\partial x} = \frac{\partial T_c}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (7)$$

Рассмотрим решение уравнения (3) с начальными (5) и граничными (6) условиями. Будем искать решение уравнения в виде:

$$T_c(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), \quad (8)$$

где μ_n – корни характеристического уравнения: $\alpha_1 R J_0(\mu_n) + \mu_n J_0'(\mu_n) = 0$;

$J_0(z)$ – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, причем $J_0'(z) = -J_1(z)$, т. к. $T_1(0, t) < \infty$.

Общее решение запишется:

$$Q_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{\alpha_1 \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q^* r_1}{a_1^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{\left[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2\right] J_0^2(\mu_n)}. \quad (9)$$

Решая относительно начальных условий, находим:

$$C_n = 2T_0 \left[\frac{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} - \frac{2Q^* r_1}{a_1^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} \right]. \quad (10)$$

Тогда аналитическое решение распределения температурного поля во внутривапечной среде с учетом (9) и (13) примет окончательный вид:

$$T_c(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2T_0 \frac{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\alpha_1 \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q^* r_1}{a_1^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} (1 - e^{-\left(\frac{\alpha_1 \mu_n}{R}\right)^2 t}) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right). \quad (11)$$

Перейдем к определению температурного поля в детали. Решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$T_o(x, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r, t) \cos \frac{p_k}{h} x. \quad (12)$$

Найдем для $\delta(x)$ разложения в ряд Фурье по $X_k(x)$:

$$\delta(x)F(r, t) = \frac{4F(r, t)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{2p_k + \sin 2p_k} \cos \frac{p_k}{h} x. \quad (13)$$

С учетом выражений (12) и (13) дифференциальное уравнение (4), при граничных условиях (5) и начальных условиях (7) примет вид:

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 R_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_k}{\partial r} - \left(\frac{p_k}{h} \right)^2 R \right) + 2\alpha_3 F(r, t) \left[\frac{\alpha_3 h \sin p_k}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} \right], \quad (14)$$

с граничными условиями $R_k(0, t)|_{r=0} < \infty$, и начальными условиями $\frac{\partial R_k}{\partial r} = -\alpha_2 R_k|_{r=R}$.

Решение уравнения (14) будем искать в следующем виде:

$$R_k(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{ki}(t) J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right), \quad (15)$$

где χ_i – корни характеристического уравнения $R\alpha_2 J_0(\chi_i) + \chi_i J_0'(\chi_i) = 0$.

Запишем разложение $F(r, t)$ в ряд Фурье по $J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right)$, полученное решение подставим в дифференциальное уравнение (24):

$$\dot{Q}_{ki} + \left[a_2^2 \left(\left(\frac{\chi_i}{R} \right)^2 + \left(\frac{p_k}{h} \right)^2 \right) \right] Q_{ki} = \frac{2\alpha_3}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} p_i(t), \quad (16)$$

Найдем решение (16), удовлетворяющее начальному условию. Общее решение уравнения имеет вид:

$$Q_{ki}(t) = C_{ki} e^{-a_{ki}t} + \frac{2\alpha_3}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} e^{-a_{ki}t} \int_0^t p_i(\tau) e^{a_{ki}\tau} d\tau. \quad (17)$$

Используя начальные условия, получим:

$$C_{ki} = 4T_0 \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{p_k [\alpha_3 h + \sin^2 p_k]} \cdot \frac{\chi_i J_1(\chi_i)}{[\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2 J_0^2(\chi_i)]}. \quad (18)$$

Окончательно температурное поле в детали записывается в виде:

$$T_o(x, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_{ki}(t) J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) \right) \cos \frac{p_k}{h} x. \quad (19)$$

где:

$$Q_{ki}(t) = 4T_0 \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{p_k [\alpha_3 h + \sin^2 p_k]} \cdot \frac{\chi_i J_1(\chi_i)}{[\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2 J_0^2(\chi_i)]} e^{-a_{ki}t} + \frac{2\alpha_3}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} e^{-a_{ki}t} \int_0^t p_i(\tau) e^{a_{ki}\tau} d\tau; \quad (20)$$

$$p_i(t) = \frac{2\chi_i^2}{[\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2] J_0^2(\chi_i)} \int_0^R r F(r, t) J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) dr. \quad (21)$$

Полученные динамические модели (11) и (21) являются нелинейными, и отражают специфическую реакцию многих термических установок. Специфическая реакция проявляется в наличии двух составляющих, одна из которых соответствует относительно быстрой реакции поверхностных слоев (внутренней среды), а вторая – более медленному распределению тепла в детали. Модель позволяет исследовать изменение температуры детали в зависимости от температуры, выделяемой при горении ГВС, массы закаляющейся детали M_o и объема внутривспечной среды M_c в печи. Входными параметрами модели являются удельные теплоемкости внутривспечной среды и детали, выходным параметром – температура.

По результатам теоретических исследований процесса теплообмена в замкнутом пространстве печи получены поверхности изменения температуры в процессе нагрева детали. При решении системы уравнений использован МПП MatLab и встроенная функция PDE. В процессе моделирования приняты следующие параметры: $M_0 = 72$ тонны, $M_c = 2$ тонны, $C_d = 0,263$ Дж/°С·кг. [2]. Результаты моделирования приведены на рис. 1.

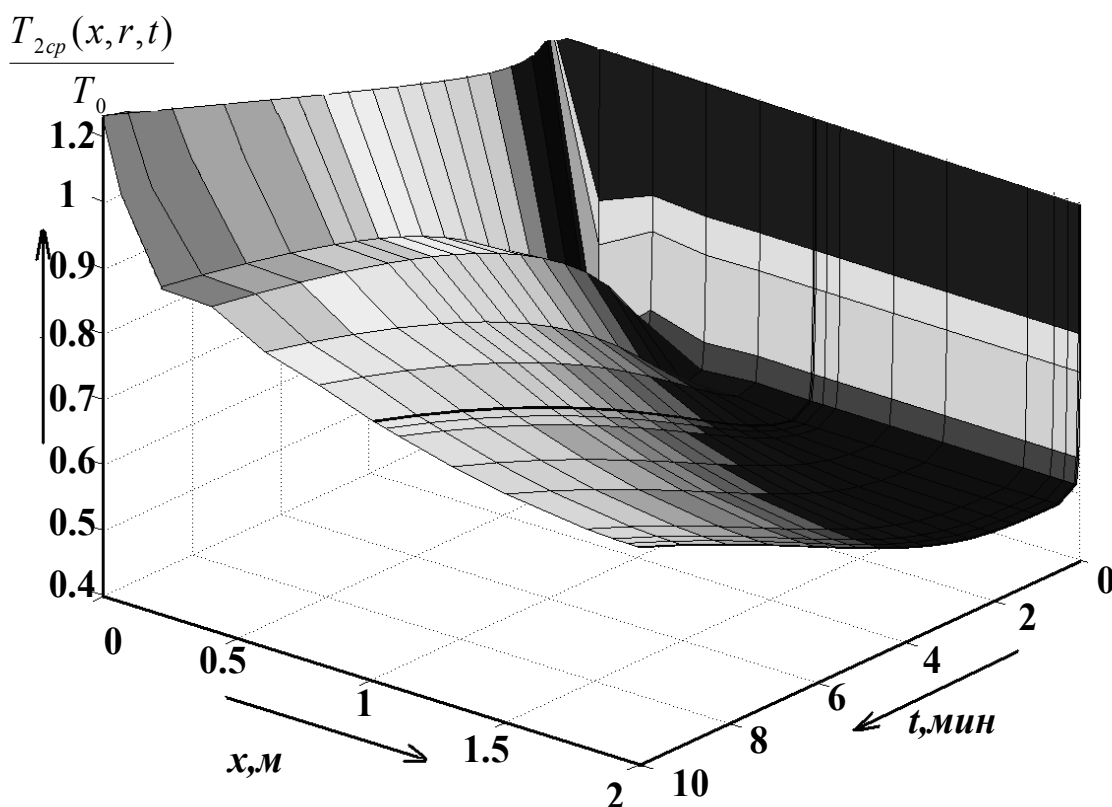


Рис. 1. Распределение температуры по глубине внутрипечной среды при $R = \frac{2}{3} R_{\text{внутрипечная-среда}}$

ВЫВОДЫ

Получена математическая модель тепловых параметров закалки технологического комплекса, которая учитывает изменяющиеся в процессе закалки тепловые, технологические параметры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров А. И. Основы теории управления / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504 с.
2. Дьяконов В. П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя / В. П. Дьяков. – М. : Солон-Пресс, 2002. – 800 с.
3. Краснокутская И. Н. Анализ направлений энергосбережения в нагревательных и термических камерных печах / И. Н. Краснокутская, В. Г. Рыжков // *Металлург.* – 2008. – № 12.