УДК 517.928

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА ІЗ НЕСТАБІЛЬНИМ СПЕКТРОМ

І.Р. Срайчук

Криворізький економічний інститут, Кривий Ріг
e-mail: 1curt20@gmail.com
Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. М.О.Рашевський

Моделювання різноманітних систем приводить до необхідності досліджувати системи інтегро-диференціальних рівнянь.

Наприклад, розглянемо процес протікання електричного струму після підключення ідеального джерела ЕРС до кола, зображеного на рис.1.

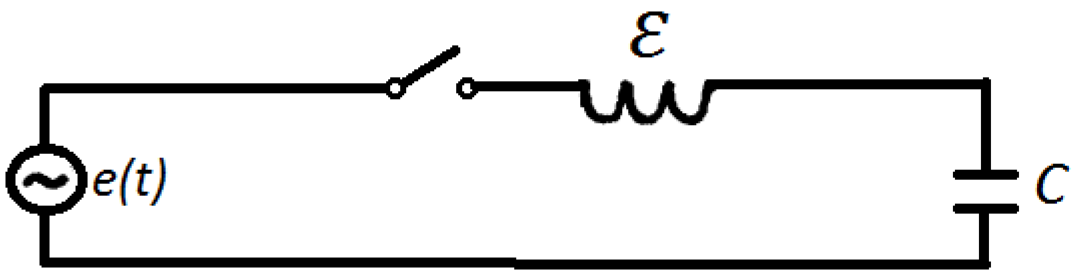

Рис. 1.Електричне коло

Рівняння залежностіелектричного струму від часу запишеться у вигляді[3,с .34]:

$$\varepsilon_1 \frac{di(t)}{dt} + \varepsilon_2 i\,(t) + \int_0^t K(t,\tau) i(\tau) d\tau = e(t),$$

Що є інтегро-диференціальним рівнянням Вольтера.

Розглянемо системуінтегро-диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon \frac{d\bar{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\bar{x}(t,\varepsilon) + \rho \int_0^t K(t,s,e)\bar{x}(s,\varepsilon)ds \quad (1)$$

Системи вигляду (1) неодноразово досліджувалась рядом авторів у різних припущеннях про спектр матриці $A(t,\varepsilon)$. Останні дослідження [2, 4] стосуються випадку нестабільного спектру.

У цій роботі розглянемо нестабільність спектру, яку мають майже діагональні системи при наявності точок повороту [2, 3].

Для системи (1) поставимо задачу Коші

$$\boldsymbol{x}(0, \varepsilon) = \boldsymbol{x}_0. \quad (2)$$

Вимагатимемо виконання таких умов.

1^0. Матриці $A_p(t)$ та $K_p(t, s)$ є нескінченно диференційованими відповідно на проміжку $[0, L]$ та в квадраті $R = \{0 \le t, s \le L\}$; $p \ge 0$.

2^0. Власні числа матриці $A_0(t)$ є різними при $t \in [0, L]/\{t = t_0\}$ і збігаються при $t = t_0$, $t_0 \in [0, L]$.

3^0. $A_0(t_0) = 0$

Формальний розв'язок системи (1) шукатимемо у вигляді

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\bar{z}(t,\varepsilon) + \rho\int_0^t P(t,s,\varepsilon)\bar{z}(s,\varepsilon)ds, \qquad (3)$$

де

$$U(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t), \qquad P(t,s,\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m P_m(t,s)$$

– невідомі $n \times n$ матриці. Надалі над невідомими вектор-функціями значок вектора не ставитимемо – із контексту зрозуміло, яка змінна є невідомою векторною величиною.

Щоб уникнути наявності у розв'язку узагальнених функцій, покладемототожно нульові розв'язки $P_k(t, s, \varepsilon) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Тоді система (1) запишеться в наступному вигляді

$$\varepsilon U(t,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = U(t,\varepsilon)\big(\Lambda(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\big)z + \rho\int_0^t \Omega(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds,$$

де

$$C_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i-1}\sum_{k=0}^{m}A_{i+m-k}U_k - \sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{i-1}\sum_{k=1}^{m}U_k\Lambda_{m+i-k}$$

До останньої системи застосуємо метод [8], виконавши підстановку

$$z(t,\varepsilon) = exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}w(t,\varepsilon)$$

Та зведемо систему до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$w(t,\varepsilon) = \int_0^t\left(\varepsilon^m C_{m,1}(s,\varepsilon)w(s,\varepsilon) + \frac{\rho}{\varepsilon}\int_0^s \Omega_1(s,s_1,\varepsilon)w(s_1,\varepsilon)ds_1\right)ds + x(0,\varepsilon) \qquad (4)$$

Застосуємо до системи інтегральних рівнянь метод послідовних наближень, взявши

$$w_0(t, \varepsilon) = x(0, \varepsilon),$$

$$w_k(t,\varepsilon) = \int_0^t (e^m C_{m,1}(s,\varepsilon) w_{k-1}(s,\varepsilon) + \frac{p}{\varepsilon}\int_0^s \Omega_1(s,s_1,\varepsilon) w_{k-1}(s_1,\varepsilon) ds_1) ds$$

Отже, для досить малих ε і значень ρ таких, що $\rho\varepsilon^{\frac{1-q}{q+1}} \to 0$ разом з ε, справджується таке твердження.

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1^0-3^0 і функції $\mathrm{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t))$ не змінюють знаку на $[0, L]$, то на вказаному проміжку майже діагональна система

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + \rho\int_0^t K(t,s,\varepsilon)x(s,\varepsilon)ds$$

має формальний розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\exp\{\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\} w(t,\varepsilon), \quad (5)$$

де $w(t, \varepsilon)$ –розв'язок системи (4).

Теорема 2. Якщовиконуютьсяумовитеореми 1, і $\mathrm{Re}(\lambda_k(t)) \le 0$, то для m– наближення$x_m(t, \varepsilon)$, $(x_m(0, \varepsilon) = x_0)$отриманого з(5),існує деякийточнийрозв'язок$x(t, \varepsilon)$такий,що

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \le C(\delta\varepsilon)^{\frac{m}{q+1}},$$

де C – стала, що не залежитьвідε, а $\delta = \max\{1, \rho\varepsilon^{-\frac{q}{q+1}}\}$.

Література

1. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Асимптотический анализ интегродифференциальных систем с нестабильным спектральным значением ядра интегрального оператора. // ЖВММФ. – 2007. – 47, № 1. – С. 67 - 82.
2. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами. // Матем. сб. – 2013. – 204, № 7. – С. 47-70.
3. Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. – Фрунзе: «Илим», 1981. – 144 с.
4. Розенблюм Г.В. Фундаментальное решение и спектральная асимптотика систем с точками поворота. // в кн. «Теория рассеяния. Теория колебаний» (Проблемы математической физики, вып. 9). – Л., 1979. – С. 122-128.
5. Grimm L.J., Harris W.A. Solutions of a singularly perturbed differential system with turning points // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec I. A.- 1989. - 36, №3. – P. 753-763.