

УДК 517

ПОКРАЩЕННЯ НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ШЛЯХОМ ПОВТОРНОГО УСЕРЕДНЕННЯ

О.Г. Ровенська, В.О. Соляник

Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ
¹e-mail: o.rovenskaya@mail.ru, ²e-mail: vadim.solyanik@mail.ru

Інтерес до питань наближення аналітичних функцій, до яких, зокрема, належить інтеграл Пуассона, обумовлений їх численними застосуваннями як у різних галузях математики, так і в прикладних дисциплінах. Добре відомо (див, напр., [1]), що у вигляді інтегралу Пуассона представляється розв'язок рівняння Лапласа, до якого приводять задачі в яких розглядається потенційні поля в неоднорідних середовищах різноманітної фізичної природи (напр., стаціонарне поле температур, магнітне поле в неоднорідному середовищі, електростатичне поле, поле швидкостей рідини при фільтрації та інші). Дослідження розв'язку таких задач потребує використання методів і результатів із різних галузей сучасного аналізу. Напр., до інтегралу Пуассона приводить задача про відшукання стаціонарного розподілу температури $t(r, \varphi)$ всередині високого кругового циліндру R , якщо на його поверхні підтримується температура $T = f(\varphi)$. Оскільки вздовж кожної граничної утворюючої циліндра підтримується постійна температура, то можна вважати, що розподіл температури не залежить від середнього горизонтального перерізу і може бути описаний у вигляді розв'язку $t = t(r, \varphi)$ рівняння Лапласа

$$\Delta t = 0, \quad t(r) = R = f(\varphi). \quad (1)$$

Рівняння (1) у полярних координатах має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2)$$

Частинні розв'язки рівняння (2) шукаємо у вигляді

$$t = Z(r)\Phi(\varphi). \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (2), отримаємо

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad (4)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dZ}{dr} \right) - \lambda Z = 0. \quad (5)$$

Оскільки $t(r, \varphi + 2\pi) = t(r, \varphi)$, то $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, і з (4) знаходимо $\sqrt{\lambda} = n$ (n – ціле), та $\Phi(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$. Тоді із (5), покладаючи $Z(r) = r^\alpha$, маємо $a^2 = n^2$, $\alpha = \pm n$ ($n > 0$), та, отже,

$$Z_n(r) = ar^n + b^{-n}$$

За умови $n=0$ ($\lambda=0$) із (5), маємо $Z(r) = C_0 \ln r + C$. Оскільки при $r \rightarrow +0$ виконується $r^{-n} \rightarrow \infty$ та $\ln r \rightarrow -\infty$, то треба покласти $Z_n(r) = ar^n$ ($n = 1, 2, \dots$) та $Z_0 = C$. Розв'язок задачі у вигляді ряду

$$t(r, \varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (6)$$

де коефіцієнти A_n та B_n визначаються граничною умовою:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi.$$

Підсумовуючи ряд (6), отримаємо шуканий розподіл температури у вигляді інтегралу Пуассона:

$$t(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + R^2} d\psi.$$

У роботі наведено приклад наближення функції, коефіцієнти Фур'є якої прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії, сумами Фур'є та тригонометричними поліномами, що утворюються усередненням сум Фур'є. Розглянемо неперервну періодичну функцію (рис. 1)

$$f = 30 \frac{169 \sin x + 624 \sin x \cos x - 720 \sin x \cos^2 x - 864 \sin x^3}{(13 - 12 \cos x)^4}.$$

Її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n n^3 \sin nx$$

Розглянемо наближення вказаної функції 20-ти частковою сумою ряду Фур'є (рис. 2).

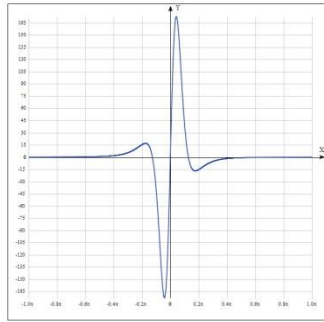


Рис. 1. Графік $f(x)$

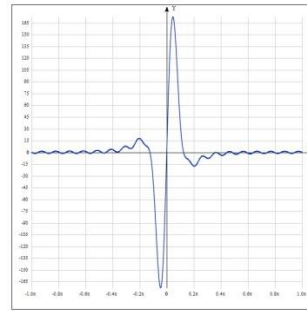


Рис. 2. Графік S_{20}

Середні арифметичні сум Фур'є задаються таким чином:

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

$$V_{n,p_1,p_2}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^k S_m(f;x),$$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Запишемо усереднені суми для вказаної функції за фіксованого значення параметрів і побудуємо їх графіки (рис. 3-5).

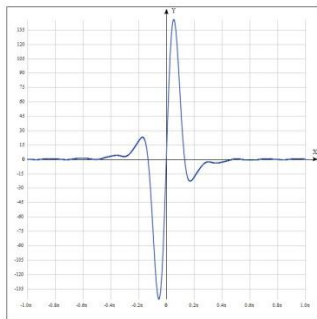


Рис. 3. Графік $V_{20,5}$

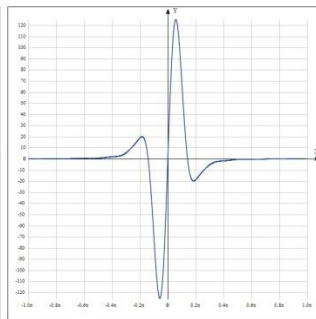


Рис. 4. Графік $V_{20,6,8}$

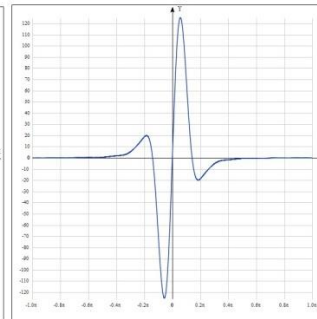


Рис. 5. Графік σ_{20}

На підставі наведених побудов, можна зробити висновок про те, що повторне усереднення сум Фур'є в певному розумінні покращує їх апроксимаційні властивості по наближенню гладких періодичних функцій.

Література

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики / Сергей Львович Соболев. М. : Наука, 1966. - 443 с.
2. Новиков О. А. Приближение классов интегралов Пуассона r -повторными суммами Валле Пуссена / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2014. —Т. 19, Вип. 3(23). —С. 14–26.