УДК 517.928

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ’ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗІ СТАЛИМ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

М.О. Рашевський

ДВНЗ «Криворізький національний університет», Кривий Ріг
e-mail: mora290466@gmail.com

Питання про асимптотичні розв’язки системи диференціальних рівнянь зі сталим запізненням аргументу

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon)+B(t,\varepsilon)x(t-\Delta,\varepsilon) \tag{1}$$

вивчалися у роботах [2-4] у зв’язку із практичними застосуваннями, зокрема у теорії автоматичного керування [3]. Системи вигляду (1) є модельними у задачах дослідження систем з повільно змінними параметрами. Тут $x(t, \varepsilon)$ – шукана вектор-функція, $A(t, \varepsilon)$ та $B(t, \varepsilon)$ – $n\times n$ – матриці, що зображуються збіжними рядами за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon > 0$: $A(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t)$, $B(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k B_k(t)$, $\Delta > 0$ – стале запізнення аргументу. Для системи (1) ставиться основна початкова задача:

$$x(t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon),\ -\Delta\le t\le 0, \tag{2}$$

де $\varphi(t, \varepsilon)$ – задана вектор-функція. Асимптотичні розв’язки задачі (1), (2) побудовано [2, 4] у таких припущеннях

1^0. Матриці $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ та вектор $\varphi(t, \varepsilon)$ є $m+1$ разів диференційовними відповідно на сегментах $[0; L]$ та $[-\Delta; 0]$; $m > 1$ – натуральне число.

2^0. Корені рівняння $\det\|A(t,0)-\lambda E\|=0$ $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_n(t)$ є такими, що

1) $\lambda_j(t) \neq 0$ для будь-яких $t \in [0; L]$, $j = 1, 2, \dots n$;

2) $\mathrm{Re}(\lambda_j(t)) \le 0$, $j = 1, 2, \dots n$;

3) $\lambda_i(t_1) \neq \lambda_j(t_2)$ для будь-яких $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0; L]$; $i, j = 1, 2, \dots n$.

Умова 2^0 вимагає стабільності спектра [1] матриці $A(t, 0)$. Системи звичайних диференціальних рівнянь із нестабільним спектром, і, зокрема, з точками повороту [1], вивчалися у роботах А. А. Дородніцина, В. П. Маслова, М. В. Федорюка, С. А. Ломова, В. Вазова та інших авторів у зв’язку із численними практичними застосуваннями. Нове століття розпочалося рядом робіт В. П. Маслова, А. І. Шафаревича, А. М. Самойленка, В. П. Яковця, В. Ф. Сафонова та ін., де вивчалися різні класи рівнянь із точками повороту. Окремі класи систем рівнянь з відхиленням аргументу при наявності простих і кратних точок повороту розв'язано І. Г. Ключник.

У цій роботі досліджено інший тип нестабільності спектру, не властивий для звичайних диференціальних рівнянь.

Умову 3) сформульовано в [2, 4] надто жорстко: досить вимагати, щоб для будь-яких $t \in [0; L]$, $i, j = 1, 2, \ldots n$, і $k > 0$

$$\lambda_i(t - k\Delta) \neq \lambda_j(t). \tag{3}$$

Поклавши у (3) формально $k = 0$ для $i \neq j$ матимемо класичне означення точки повороту для системи звичайних диференціальних рівнянь, отриманої з (1), де $B(t, \varepsilon) \equiv 0$. Тут k – крок інтегрування системи (1) методом кроків.

У припущеннях 1^0 – 2^0 побудуємо розв'язок системи (1) методом [2, 4] на першому кроці ($0 \leq t \leq \Delta$):

$$x(t,\varepsilon) = T(t)\left[U_{m,1}(t,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda_{m,1}(s,\varepsilon)ds\right\}c_1 + p_{m,1}(t,\varepsilon)\right] + \varepsilon^m \alpha_{m,1}(t,\varepsilon). \tag{4}$$

На другому кроці ($\Delta \leq t \leq 2\Delta$) система (1) запишеться так:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A_2(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + B_2(t,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\Delta}\Lambda_{m,1}(s,\varepsilon)ds\right\}c_1 + f_2(t,\varepsilon) + \varepsilon^m\alpha_{m,1}(t,\varepsilon), \tag{5}$$

де всі коефіцієнти розв'язку (4) і системи (5) визначено в [2, с. 256] та [4, с. 102].

Припустимо, що на другому кроці умову 3) порушено, а саме: існує ізольована точка $t_0 \in [\Delta; 2\Delta]$ така, що для деяких i, j виконується рівність $\lambda_i(t_0 - \Delta) = \lambda_j(t_0)$. Згідно з [2, 4] розв'язок системи (5) шукатимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = T(t)\left[U_{m,2}(t,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_\Delta^t \Lambda_{m,2}(s,\varepsilon)ds\right\}c_2 + p_{m,2}(t,\varepsilon)\right] + R_{m,1}(t,\varepsilon)\times$$
$$\times\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^{t-\Delta}\Lambda_{m,1}(s,\varepsilon)ds\right\}c_1 + \varepsilon^m\alpha_{m,2}(t,\varepsilon).$$

Всі невідомі матриці, за винятком $R_{m,1}(t, \varepsilon)$, визначається, як описано у [2, 4]. При визначенні згаданої матриці умова 3) є істотною, оскільки $R_{m,1}(t, \varepsilon)$ визначається із тотожності вигляду

$$(\Lambda_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \ldots)R_{m,1}(t,\varepsilon) - R_{m,1}(t,\varepsilon)(\Lambda_0(t-\Delta) + \varepsilon\Lambda_1(t-\Delta) + \ldots) - \varepsilon R'_{m,1}(t,\varepsilon) =$$
$$= F(t,\varepsilon).$$

Побудувавши шукану матрицю у вигляді $R_{m,1}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k R_{m,1}^{(k)}(t,\varepsilon)$ методом [2, 4], дістанемо: $R_{m,1}^{(0)}(t,\varepsilon) \equiv E$. Для елементів $R_{m,1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ матимемо рівності

$r_{ij}^{(1)}(t)=\dfrac{f_{ij}(t)}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t-\Delta)}$, і, як наслідок, дістанемо розривні елементи. Отже, система рівнянь, що отримується із тотожності прирівнюванням коефіцієнтів при степенях ε, не розв'язується методом [2, 4]. Використаємо метод В. Вазова [5] для інтегрування майже діагональних систем із точками повороту. Прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε, вважаємо доданок $\varepsilon R'_{m,1}(t,\varepsilon)$ вільним членом. При цьому елементи $r_{ij}^{(k)}(t)$ визначатимуться не з алгебричних, а з диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon\frac{dr_{ij}^{(k)}(t)}{dt}=(\lambda_i(t)-\lambda_j(t-\Delta))r_{ij}^{(k)}(t)+f_{ij}(t).$$

Порівняно із розв'язками, отриманими при виконанні умови 3), зміниться лише оцінка залишкового члена, а твердження теорем 5.1. – 5.3. із [2] та 3.1. – 3.3. із [4] справджуються.

Подамо оцінку для вектора $\alpha_{m,2}(t,\varepsilon)$, якщо $\lambda_i(t_0-\Delta)-\lambda_j(t_0)=(t-t_0)^q$: $\|\alpha_{m,2}(t,\varepsilon)\|=O\left(\varepsilon^{\frac{q}{q+1}}\right)$. Число q називають кратністю точки повороту. З урахуванням цієї оцінки можна дістати оцінку різниці між деяким точним розв'язком задачі (1), (2) $x(t,\varepsilon)$ та побудованим наближеним розв'язком $x_m(t,\varepsilon)$ на довільному r – му кроці:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)\|\le C\varepsilon^{\frac{m+1-r}{q+1}}.$$

Таким чином, нестабільність спектру істотно погіршує точність асимптотичного методу. У теорії асимптотичного інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь розроблено єдиний підхід, що ґрунтується на методі діаграм Ньютона (Г. С. Жукова, В. П. Яковець). Теорія асимптотичного інтегрування систем рівнянь із нестабільним спектром не має єдиного підходу, і кожна задача розв'язується спеціально розробленим методом. Саме цей напрям у теорії асимптотичного інтегрування потребує подальших досліджень.

Література

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М. : Наука, 1981. – 400 с.

2. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К. : Вища шк., 2000. – 294 с.

3. Солодов А. В. Системы с переменным запаздыванием / А. В. Солодов, Е. А. Солодова. – М. : Наука. Гл. Ред. физ.-мат. литературы, 1980. – 384 с.

4. Фещенко С. Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Ю. П Пидченко, Н. А. Сотниченко. – К. : Наук. Думка, 1981. – 296 с.

5. Wasow W. On a Turning Point Problems for Systems with Almost Diagonal Coefficient Matrix / W. Wasow // Funkc. Ekv. – 1966. – 8, №3. – P. 143-171.