УДК 531.396, 534.011

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ГАРПУНА, КИНУТОГО ВЕРТИКАЛЬНО ВГОРУ

А.М. Обухов, В.О. Паламарчук, В.С. Булига

Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ,
e-mail: vm@dgma.donetsk.ua

У загальному курсі вищої математики, який вивчають студенти технічних спеціальностей, тема „диференціальні рівняння” має традиційні застосування з геометрії, фізики, електротехніки, хімії та інше[1].

Поява у навчальних програмах спеціальності ІСПР (Інтеллектуальні системи прийняття рішень) окремих дисциплін „диференціальні рівняння” та „рівняння математичної фізики” дала можливість осучаснити ці курси за рахунок задач механіки, які є актуальними у технічному ВИШі.

Авторами проведені дослідження декількох задач механіки [2-5]. Дослідження виконані при єдиному підході до цих задач. Вихідними взяті рівняння Бернуллі або рівняння Лагранжа з відповідними початковими та граничними умовами, з яких отримані і розв’язані звичайні диференціальні рівняння.

Ціллю статті є продовження формування бази задач механіки і уніфікація методів їх розв’язання на прикладі задачі руху гарпуна.

Нехай гарпун масою m_0 , до кінця якого прикріплена гнучка нерозтяжна вагома нитка погонною щільністю ρ_0, починає рух вертикально вгору з початковою швидкістю V_0. Позначимо $x(t)$ - переміщення, $\dot{x}(t)$ - швидкість гарпуна у момент часу t.

Використовуючи рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial \Pi}{\partial x}=0, \tag{1}$$

отримали рівняння Бернуллі:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha x}V(x)=-\frac{g}{V(x)}, \tag{2}$$

Використовуючи начальні умови: при t = 0 X (0) = 0; V (0) = V_0, знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$V(x)=\sqrt{\frac{V_0^2+\frac{g}{\alpha}-\frac{g}{\alpha}(1+\alpha x)^2}{1+\alpha x}} \tag{3}$$

Прирівнюючи V (x) до нуля, знайшли найбільшу висоту підйому гарпуна, яку можна обчислити за формулою

$$x^* = \frac{V_0^2\left(\sqrt{1+\frac{\alpha V_0^2}{g}}+1\right)^{-1}}{g} \tag{4}$$

Відокремлюючи змінні в диференціальному рівнянні (3) (відносно x(t)) і інтегруючи, отримаємо формулу для обчислення часу, за яке гарпун досягне висоти x *.

$$t^* = \int_0^{x^*} \sqrt{\frac{1+\alpha x}{V_0^2+\frac{g}{\alpha}-\frac{g}{\alpha}(1+\alpha x)^2}}\,dx \tag{5}$$

Ввівши безрозмірні величини висоти η та часу τ^*,побудували графіки залежності η та τ^* від V_0 при різних значеннях $\alpha = \frac{\rho_0}{m_0}$

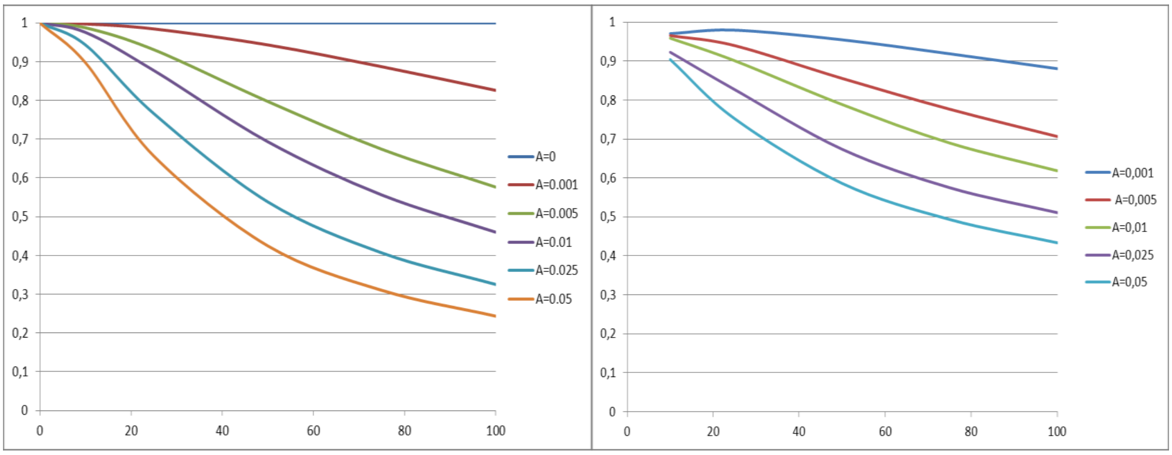

Рис. 1. Графіки залежності безрозмірних величин висоти η та часу τ^* від V_0 при різних значеннях $\alpha = \frac{\rho_0}{m_0}$.

На другому етапі дослідили рух гарпуна в середовищі, сили опору якого пропорційні квадрату швидкості перемещення.

Сили опору: $F_{1c} = k_1\dot{x}^2$ - сила, що діє на масу гарпуна; $F_{2c} = k_2 x\cdot\dot{x}^2$ - розподілена сила, що діє на нитку.

В цьому випадку диференціальне рівняння руху можна записати у вигляді:

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\alpha\left(1+\frac{2k_1}{\rho_0}+\frac{2k_2}{\rho_0}x\right)}{1+\alpha x}\dot{x}^2 = -g, \tag{6}$$

Розвязавши це диференціальне рівняння відносно функції $V(x) = \dot{x}(t)$ -швидкості руху гарпуна. Отримали

$$V(x)=\sqrt{\frac{V_0^2-2g\int\limits_0^x(1+\alpha\xi)^{2b}e^{\frac{2k}{\rho_0}\xi}d\xi}{(1+\alpha x)^{2b}e^{\frac{2k_2}{\rho_0}x}}} \tag{7}$$

Припустивши у рівності (7) $V(x^*)=0$, знайдемо рівняння для знаходження найбільшої висоти підйому гарпуна x^*.

$$\int\limits_0^{x^*}(1+\alpha\xi)^2 e^{\frac{2k}{\rho_0}\xi}d\xi=\frac{V_0^2}{2g}, \tag{8}$$

та формулу для обчислення часу, за який гарпун досягне висоти x *.

$$t^*=\int\limits_0^{x^*}\frac{(1+\alpha x)^b e^{\frac{k_2}{\rho}x}}{\sqrt{V_0\ -2g\int\limits_0^{x^*}\ (1+\alpha\xi)^2 e^{\frac{2k}{\rho_0}\xi}d\xi}}dx \tag{9}$$

Висновок: поставлена і розв’язана задача про вертикальний рух гарпуна без урахування і з урахуванням опору середовища.

Література

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука,1987, 160 с.

2. Обухов А.Н. Поперечные перемещения подвешенной нити в случае, когда точка подвеса движется горизонтально по заданному закону [Электронный ресурс] / А.Н.Обухов, В.А.Паламарчук // Научный вестник Донбасской государственной машиностроительной академии [Электронный ресурс]. - Краматорск, 2014. - № 1 (13Е). - С. 65-75. – режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/ science_public/science_vesnik /%E2%84 %961 (13%D0%95)_2014/article/11.pdf

3. Обухов А.Н. О поперечных перемещениях нити в среде с силой сопротивления движению, пропорциональной скорости перемещения её произвольного сечения / А.Н.Обухов, В.А.Паламарчук // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії [Електронний ресурс]. - Краматорськ, 2015. - № 1 (34). - С. 64-73. – режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/science _public/ddma/Herald_ 1(34)_2015/article/13.pdf

4. Обухов А.Н.. Математическое моделирование системы «тележка-груз» мостового крана / А.Н Обухов., В.А Паламарчук., Е.В Бережная //Научный вестник ДГМА.- № 3 (36), 2015 с.110-115

5. Обухов А.М. Вимушені коливання вагомої нитки, яка підвішена за один кінець, під дією вітрового навантаження / А.М Обухов., В.О Паламарчук //Науковий Вісник Донбаської державної машинобудівної академії № 1 (19Е), 2016 с 81-86