УДК 517.5

# НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОВТОРНИМИ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

**Новіков О.О.[1], Ровенська О.Г.[2]**

[1]Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
*e-mail: sgpi@slav.dn.ua*
[1]Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ
*e-mail: o.rovenskaya@mail.ru*

Роботу присвячено дослідженню питань наближення в рівномірній метриці періодичних аналітичних функцій дійсної змінної тригонометричними поліномами, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена.

Нехай $L$ — множина сумовних $2\pi$-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції $f$, $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$.

Найбільш простим і разом із тим найбільш природним прикладом лінійного процесу апроксимації неперервних періодичних функцій дійсної змінної може служити наближення цих функцій елементами послідовностей частинних сум ряду Фур'є $S_n(f;x)$. Проте, як добре відомо, послідовності частинних сум Фур'є не є рівномірно збіжними на всьому класі $C$ неперервних $2\pi$-періодичних функцій. У зв'язку із цим значну кількість робіт цього напряму присвячено вивченню апроксимативних властивостей інших методів наближення, які для функції $f$ породжуються певними перетвореннями частинних сум її ряду Фур'є та дозволяють побудувати послідовності тригонометричних поліномів, які рівномірно збігалися б для кожної функції $f \in C$. Суми Фейєра $\sigma_n(f;x)$ функції $f(x)$ задаються співвідношенням

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x),$$

тобто є середніми арифметичними перших $n$ частинних сум Фур'є цієї функції. Як відомо, послідовність поліномів $\sigma_n(f;x)$ рівномірно збігається до своєї функції для будь-якої $f \in C$. Суми Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

є певним узагальненням сум $\sigma_n(f;x)$ і мають апроксимативні властивості істотно залежні від параметра $p$. Тригонометричні поліноми $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена

$$V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}V_{k+1,p_2}(f;x)=\frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}S_m(f;x),$$

являють собою подальше узагальнення класичних методів Фур'є, Валле Пуссена та Фейєра. При певному виборі параметрів $p_1$ та $p_2$ ці поліноми збігаються з сумами $S_n(f;x)$, $V_{n,p}(f;x)$ і $\sigma_n(f;x)$. Роботу присвячено вивченню апроксимативних властивостей таких методів наближення.

Значну кількість методів наближення можна подати у вигляді лінійних середніх рядів Фур'є, які породжуються нескінченними трикутними матрицями таким чином. За допомогою нескінченної трикутної матриці чисел $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$, $k=0,1,2,\ldots,$ $\lambda_0^{(n)}=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)}=0$ за умови $k\geq n$, кожній функції $f\in L$ можна поставити у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$U_n(f;x;\Lambda)=\frac{a_0(f)}{2}\lambda_0^{(n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx).$$

Кажуть, що матриця $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$ породжує лінійний метод наближення $U_n(\Lambda)$.

У вигляді тригонометричних поліномів $U_n(f;x;\Lambda)$ можна подати звичайні $V_{n,p}(f;x)$ та повторні $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ суми Валле Пуссена функції $f(x)$. Наприклад, за виконання умови $p_1\geq p_2$ елементи відповідної матриці $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$ для поліномів $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ задаються таким співвідношенням:

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1, & 1\leq k\leq n-p_1-p_2,\\ 1-\frac{(k-n+p_1+p_2-1)(n-k+p_2-p_1)}{2p_1p_2}, & n-p_1-p_2+1\leq k\leq n-p_1,\\ 1-\frac{2k-2n+2p_1+p_2-1}{2p_1}, & n-p_1+1\leq k\leq n-p_2\\ 1-\frac{2p_1p_2-(n-k)(n-k+1)}{2p_1p_2}, & n-p_2+1\leq k\leq n-1.\end{cases}$$

Якщо $p_1=1$ і $p_2=1$, то ці поліноми є частинними сумами ряду Фур'є $S_n(f;x)$, коли ж $p_1=1$ або $p_2=1$ — сумами Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$. У випадку $p_1=n-1$ ($p_1\geq p_2$) повторні суми Валле Пуссена збігаються із сумами Фейєра $\sigma_n(f;x)$.

Нехай далі $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і $\beta$ — фіксоване дійсне число. Множина неперервних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{-1}(k)(a_k\cos(kx+\beta\pi/2)+b_k\sin(kx+\beta\pi/2))$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_\beta^\psi(x)$, позначається $C_\beta^\psi$. Якщо $f\in C_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi(x)\in S_M^0$, тобто виконано умови $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t)dt=0,\quad \operatorname{ess\,sup}|f_\beta^\psi(t)|\leq 1$, то множина таких функцій позначається $C_{\beta,\infty}^\psi$. Вважається, що $f\in C_\beta^\psi H_\omega$ у випадку, якщо $f_\beta^\psi(x)\in H_\omega$, тобто виконується умова $|f_\beta^\psi(t')-f_\beta^\psi(t'')|\leq\omega(|t'-t''|),\quad \forall\, t',\ t''\in\mathbb{R}$, де $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності.

Позначимо символом $D_q$ множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in (0;1).$$

У цьому випадку множини $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ складаються з $2\pi$-періодичних функцій, що дозволяють продовження до функцій $F(z) = F(x+iy)$, аналітичних у смузі $|\Im z| < \ln \frac{1}{q}$. Важливим прикладом таких класів функцій є класи неперервних $2\pi$-періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t)P^{q}_{\beta}(t)dt, \quad P^{q}_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

у якій $P^{q}_{\beta}(t)$ — відоме ядро Пуассона. В цьому випадку класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ позначаються $C^{q}_{\beta,\infty}$ і $C^{q}_{\beta}H_{\omega}$ відповідно і називаються класами інтегралів Пуассона (див., напр., [1]). Детально ознайомитися з історією дослідження питань наближення класів аналітичних функцій лінійними методами можна у роботах [2, 3].

**Теорема.** *Нехай $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n - \Sigma_{\overline{p}} \to \infty$, $\Sigma_{\overline{p}} = p_1 + p_2$ має місце*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{8\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi p_1 p_2 (1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) +$$

$$+O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\left(\frac{1}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^4} + \frac{q^{p_1-1}+q^{p_2-1}}{p_1p_2(1-q)^3} + \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}}{(1-q)^2}\right),$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) + O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+2)\times$$

$$\times\left(\frac{\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{p_1p_2(n-\Sigma_{\overline{p}})(1-q)^5} + \frac{q^{p_2-1}\omega((n-p_1)^{-1}) + q^{p_1-1}\omega((n-p_2)^{-1})}{p_1p_2(1-q)^3} + \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}}\omega((n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})}{(1-q)^2}\right),$$

*де $\Pi(n;k)$ — повний еліптичний інтеграл третього роду,*

$$e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) = \theta_n(\omega)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1})\sin\tau d\tau, \quad \varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}} = \sup_{k\geq n-\Sigma_{\overline{p}}}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,$$

*$\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, причому $\theta_n(\omega) = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо $n$, $q$, $\beta$, $p_1$, $p_2$ і $\psi(k)$.*

**Література**


1. Степанец А.И. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 3. — С. 375–395.

2. Новиков О.А. Приближение классов интегралов Пуассона $r$-повторными суммами Валле Пуссена / О.А. Новиков, О.Г. Ровенская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2014. —Т. 19, Вип. 3(23). —С. 14–26.

3. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций / В.И. Рукасов // Укр. мат. журн. —2003. — Т. 55, № 6. — С. 806—816.