УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРУЖНОЇ КУСОЧНО-ОДНОРІДНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ДЕТАЛІ НЕСИМЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ

О.В. Лупаренко

ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь
e-mail: luparenko_elena@bk.ru

В інженерних розрахунках на міцність спостерігається припущення про ізотропію фізико-механічних властивостей матеріалів, з яких виготовлено деталь. У більшості випадків це припущення слід визнати правомірним. Однак у сучасних конструкціях для виготовлення деталей використовуються й анізотропні матеріали, у яких спостерігається велика відмінність в пружних властивостях для різних напрямків. Оскільки урахування анізотропії істотно ускладнює міцністний розрахунок, виникають питання про дослідження впливу міри анізотропії матеріалів на досліджувані динамічні ефекти при різних геометричних і структурних параметрах.

З дослідженням динамічних процесів в анізотропних неоднорідних пружних середовищах пов’язано також багато теоретичних та прикладних проблем акустичної дефектоскопії, гірничої механіки, сейсмології.

Крайові ефекти в анізотропних матеріалах досліджуються в основному в рамках континуального підходу. Застосування різних методів розв’язання задач визначення крайових ефектів в більшості випадків зводиться до аналізу коренів характеристичних рівнянь і побудови відповідних рішень, які мають затухаючий характер. Отримані таким способом результати часто дають лише крайні оцінки для параметрів загасання крайових ефектів, залишаючи відкритим питання про розподіл напружень у зоні крайового ефекту і про геометрію зони.

Крім того особливу увагу потрібно приділити дослідженню впливу фактору несиметричності структури перетину тіла на особливості хвильового поля.

Метою дослідження є розробка методу визначення й дослідження напружено-деформованого стану тіл, що моделюють елементи конструкцій, при деформації.

Основний алгоритм, який застосовується для розв’язку задачі, це модифікований метод суперпозиції [1,2].

Нехай перетин поперечно-неоднорідної пружної анізотропної деталі займає в системі координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \bigcup$ (рис. 1), де області $D^{(m)}$ зварені одна з одною, у загальному випадку анізотропні, мають різні пружні сталі та визначаються нерівностями:

$$D=\left\{(\alpha_1,\alpha_2):-c\le\alpha_1\le a;|\alpha_2|\le b\right\},$$
$$G^{(1)}=\left\{(\alpha_1,\alpha_2):-c\le\alpha_1<0;|\alpha_2|\le b\right\};\ G^{(1)}=\left\{(\alpha_1,\alpha_2):0\le\alpha_1\le a;|\alpha_2|\le b\right\},$$

де α_i - декартові координати, a,b,c - сталі.

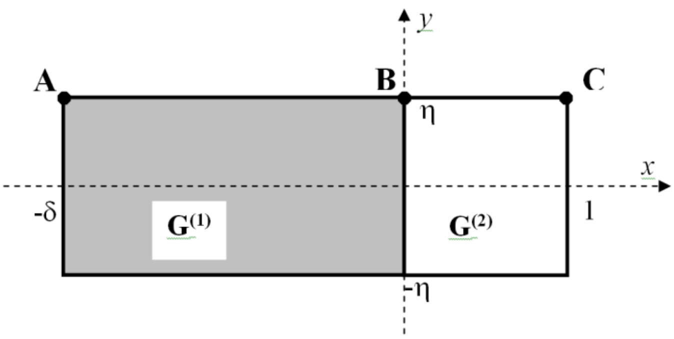

Рис.1 Геометрія області

Нехай на кордоні області задане нормальне самоврівноважуване навантаження інтенсивності $q_1(\alpha_2)$ та $q_2(\alpha_1)$ відповідно, що гармонійно змінюється у часі з частотою ω. Об'єктом дослідження будуть хвильові рухи, які повністю характеризуються двовимірним полем у площині.

Для опису поведінки деталі використовуємо рівняння руху суцільного середовища, що записані у безрозмірних координатах та функціях:

$$\begin{cases} C_{11}^{(m)}U_{1,11}^{(m)}+U_{1,22}^{(m)}+(C_{12}^{(m)}+1)U_{2,12}^{(m)}+\left[\Omega^{(m)}\right]^2U_1^{(m)}=0 \\ (C_{12}^{(m)}+1)U_{1,12}^{(m)}+U_{2,11}^{(m)}+C_{22}^{(m)}U_{2,22}^{(m)}+\left[\Omega^{(m)}\right]^2U_2^{(m)}=0 \end{cases}$$

де $U_\beta^{(m)}=\dfrac{\tilde{U}}{a}$, $C_{\alpha\beta}=\dfrac{C_{\alpha\beta}^{(m)E}}{C_{66}^{(m)E}}$, $f_{,1}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_{,2}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\left[\Omega^{(m)}\right]^2=\dfrac{a^2\omega^2\rho^{(m)}}{C_{66}^{(m)E}}$,

$\rho^{(m)}$ – щільність області $G^{(m)}$, $\tilde{U}$ амплітудні компоненти вектора переміщень, $\beta=1,2;\ m=1,2$.

Граничні умови задачі мають вигляд:

Область $G^{(1)}=\left\{(x,y):-\delta\le x<0;|y|\le\eta\right\}$:

$$\sigma_{11}^{(1)}(-\delta,y)=q_1^{(1)}(y),\quad \sigma_{12}^{(1)}(-\delta,y)=0 \text{ при } x=-\delta,\ |y|\le\eta$$
$$\sigma_{22}^{(1)}(x,\pm\eta)=q_2^{(1)}(x),\quad \sigma_{12}^{(1)}(x,\pm\eta)=0 \text{ при } -\delta\le x<0,\ y=\pm\eta$$

Область $G^{(2)} = \{(x,y): 0 \le x < 1; |y| \le \eta\}$:

$$\sigma_{11}^{(2)}(1,y) = q_1^{(2)}(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(1,y) = 0, \; \sigma_{1\gamma}^{(1)}(0,y) = r_{21}\sigma_{1\gamma}^{(2)}(0,y),$$

$$U_\gamma^{(1)}(0,y) = U_\gamma^{(2)}(0,y) \text{ при } x = 1, \; |y| \le \eta;$$

$$\sigma_{22}^{(2)}(x,\pm\eta) = q_2^{(2)}(x), \quad \sigma_{12}^{(2)}(x,\pm\eta) = 0 \text{ при } 0 \le x < 1, \; y = \pm\eta,$$

де $\gamma = 1,2$, $x, y, \eta -$безрозмірні координати та геометричний параметр, що введені за формулами: $x = \alpha_1/a$, $y = \alpha_2/a$, $\eta = b/a$.

Для розв'язку задачі застосуємо метод суперпозицій [2]. Замість сукупності початкових граничних умов, розглядаються допоміжні граничні умови, які зазвичай не відповідають початковій задачі, але дозволяють аналітично визначити довільні сталі у загальному розв'язку. У правих частинах допоміжних граничних умов будуть стояти невідомі функції $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4($, які визначають переміщення і дотичні напруження на границі розподілу середовищ й на зовнішній границі області.

Повернення до початкової задачі призводить до системи інтегральних рівнянь (СІР) відносно введених допоміжних функцій. Дослідження поведінки розв'язку СІР у кутових точках областей $G^{(m)}$ дозволяє визначити асимптотику коефіцієнтів Фур'є шуканих функцій, яка визначається показником локальної особливості λ, та вдало підібрати координатні функції у методі Бубнова-Гальоркіна.

Параметр локальної особливості дає можливість ефективно оцінити концентрацію динамічних напружень в околі сингулярних точок границі, що обумовлює міцністні характеристики усієї області.

В результаті стає можливим звести СІР до нескінченої системи алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є допоміжних функцій. А так як усі механічні характеристики задачі представлені через них, то у ході розв'язку отримаємо вирази для динамічних переміщень та напруг через коефіцієнти Фур'є введених допоміжних функцій.

Таким чином, незважаючи на складну геометрію, анізотропію та несиметрію області, запропонований метод дає можливість отримати усі динамічні характеристики задачі, завдяки проведенню асимптотичного аналізу поведінки допоміжних функцій в околі сингулярних точок границі.

Література

1. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А.В. Белоконь // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С. 56-59.
2. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры / Л.П. Вовк. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.
3. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.