УДК 517.5

ФРАКТАЛЬНА ФУНКЦІЯ, ЗМОДЕЛЬОВАНА ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІОСНОВНОГО ТРИСИМВОЛЬНОГО Q_3-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

І.В. Замрій[1], А.О. Веремчук[2]

[1]Державний університет телекомунікацій, Київ
e-mail:irina-zamrij@yandex.ru
[2]Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ
e-mail:alynaveremchuk14@gmail.com

Одним із ефективних способів конструювання функцій з фрактальними і сингулярними властивостями є використання класичного позиційного *s*-кового зображення дійсних чисел, зокрема, і класичного трійкового. Та узагальнення останнього – поліосновного три символьного Q_3-зображення дійсних чисел [4], яке визначається фіксованою множиною додатних дійсних чисел $Q_3 = (q_0, q_1, q_2)$, при чому $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, та розкладом:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_{\alpha_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \quad \alpha_k \in A_3 = \{0,1,2\}, \ \beta_0 = 0, \ \beta_{\alpha_i} = \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} q_j,$$

і співпадає з класичним трійковим при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$.

Період у Q_3 зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках. Існують числа, які мають два Q_3- зображення. Це числа з періодом (0) або (2), причому $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}[c_m-1](s-1)}$. Вони називаються Q_3 - *раціональними*, їх множина є зліченною.

В роботі [2] в термінах Q_3-зображення дійсних чисел вводиться в розгляд двопараметрична сім'я функцій, означених наступною рівністю:

$$y = f(x) = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}, \qquad \alpha_n, \gamma_n \in A_3,$$

де цифри γ_n Q_3-зображення числа y задовольняють умовам:

1) $\gamma_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n(x) = 1$;

2) якщо $\alpha_n(x) \neq 1$, то γ_n залежить від перших n Q_3-цифр аргумента x, тобто $\gamma_n = \gamma_n(x) = \varphi_n(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x))$.

В роботі [2] було доведено, що всі функції з P_c — множини неперервних функцій, які задовольняють умови 1)-2), є кусково-лінійними при $q_0 = q_2$ і кусково-сингулярними при $q_0 \neq q_2$, за виключенням тотожного перетворення та єдиної чисто сингулярної (при $q_0 \neq q_2$) функції —

інверсора $I(x)$ цифр Q_3-зображення дійсних чисел, ґрунтовно вивченого у роботі [1, 3]. В даній роботі, ми конструюємо клас функцій $f(x)$, які визначаються як єдиний розв'язок функціонального рівняння при заданих початкових умовах

$$\begin{cases} f(x) = f(I(x)), \\ f(\Delta^{Q_3}_{(0)}) = \Delta^{Q_3}_{20(02)}. \end{cases} \tag{1}$$

Функція $f(x)$, визначена системою рівностей (1), є коректно заданою на відрізку $[0;1]$, в тому числі і у Q_3-раціональних точках, тобто точках, що мають два формально різних Q_3-зображення.

Теорема 1. *Функція $f(x)$, визначена системою рівностей* (1), *є неперервною на відрізку* $[0;1]$ *і набуває значень з відрізка* $\left[\frac{q_0}{1-q_1}; q_0 + q_1 + \frac{q_0 q_2}{1-q_1}\right]$.

Теорема 2. *Функція $f(x)$, визначена системою рівностей* (1)*, є:*

1) *кусково-лінійною при $q_0 = q_2$ і кусково-сингулярною при $q_0 \neq q_2$;*

2) *набуває свого глобального максимуму у точках $x = \Delta^{Q_3}_{i(1)}$ та глобального мінімуму в точці $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$, причому $f(\Delta^{Q_3}_{(1)}) = \frac{q_0}{1-q_1}$ і $f(\Delta^{Q_3}_{i(1)}) = q_0 + q_1 + \frac{q_0 q_2}{1-q_1}$, локальних максимумів у точках виду $x^* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+2}(1)}$, а локальних мінімумів у $x_* = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{i\ldots i}_{2m+1}(1)}$, де $i \in A_3 \setminus \{1\}$, $1 \le m \in N$.*

Теорема 3. *Якщо $y_0 = \Delta^{Q_3}_{20(02)}$, то множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$ є зліченною, якщо $y_0 \neq \Delta^{Q_3}_{20(02)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною.*

Література

1. Замрій І. В., Працьовитий М. В. Сингулярність інверсора цифр Q_3 - зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання *(ISSN 1562-3076).* – **18**, 1. – Інститут математики НАН України. – 2015 р. – С. 55-70.

2. Працьовитий М. В., Замрій І. В. Неперервні функції, які зберігають цифру 1 Q_3 - зображення числа // Буковинський математичний журнал. − Т.3, № 3-4. − Чернівці: Чернівецький національний університет, 2015. − С. 142-159.

3. Працьовитий М. В., Замрій І. В. Інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013, № 15. – С. 156-167.

4. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. − Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.