УДК 517.54

ПРО ВАРІАЦІЮ КВАЗІКОНФОРМНИХ АВТОМОРФІЗМІВ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

С.П. Десятський

ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», Маріуполь
e-mail: sergedes@gmail.com

Як відомо, конформними автоморфізмами розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$, що не мають додаткових нормувань, є лише дробово-лінійні відображення. Узагальненням конформних відображень є так звані квазіконформні відображення [1, 2, 3].

Позначимо через $L_\infty(D)$ простір вимірних на $D\subset\mathbb{C}$ функцій $\mu(z)$ з нормою

$$\|\mu\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{z\in D}|\mu(z)|.$$

Визначення. Квазіконформним відображенням області D називається гомеоморфний узагальнений розв'язок $w=f(z)$ рівняння Бельтрамі

$$w_{\bar z} = \mu w_z,\ \mu\in L_\infty(D),\ \|\mu\|_\infty<1 \qquad (1)$$

що зберігає орієнтацію.

Функція μ називається комплексною характеристикою відображення .

Розглянемо асімптотичне розкладення $w = f(z)$ у випадку близьких до нуля значень $\|\mu\|_\infty$ та додаткових умов, пов'язаних з симетрією.

Має місце наступна

Теорема 1. *Для кожної вимірної комплексної характеристики* μ *в області* D, $\|\mu\|_\infty<1$, *існує квазіконформне відображення* $f^\mu : D\to\overline{\mathbb{C}}$. *Кожне інше квазіконформне відображення с тою ж характеристикою має вигляд* $\varphi\circ f^\mu$, *де* φ *- конформне в* $f^\mu(D)$ *відображення.*

Теорема 2. *Нехай* $R_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *і* $\mu(z,\varepsilon)=\varepsilon a(z)+\varepsilon\alpha(z,\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, *причому* $\|a\|_\infty<\infty$, $\|\alpha(\cdot,\varepsilon)\|_\infty\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Тоді квазіконформний автоморфізм $\tilde\omega:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, *такий, що*

$$\mu^{\tilde{\omega}}(z)=\mu(z,\varepsilon)$$
$$\tilde{\omega}(0)=0,\tilde{\omega}(\infty)=\infty,\tilde{\omega}(R_0)=R_0$$

може бути представлений формулою

$$\tilde{\omega}(z)=z-\frac{\varepsilon z(z-R_0)}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta-R_0)(\zeta-z)}dm_\zeta+o(\varepsilon). \tag{2}$$

Наступна теорема уточнює теорему 2 у випадку симетрії комплексної характеристики $\mu=\mu(z,\varepsilon)$.

Теорема 3. *Нехай* $\mu(z,\varepsilon)=\varepsilon a(z)+\varepsilon\alpha(z,\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, *причому* $\|a\|_\infty<\infty$, $\|\alpha(\cdot,\varepsilon)\|_\infty\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Тоді існує $\omega(z,\varepsilon)$ *- квазіконформний автоморфізм розширеної комплексної площини* $\overline{\mathbb{C}}$ *з комплексною характеристикою* $\mu(z,\varepsilon)$, *такий, що* $\omega(0,\varepsilon)=0$, $\omega(\infty,\varepsilon)=\infty$, *представимий у вигляді*

$$\omega(z,\varepsilon)=z-\frac{\varepsilon z}{\pi}\iint_{|\zeta|\le R}\frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}dm_\zeta-\frac{\varepsilon z^2}{\pi}\iint_{|\zeta|\ge R}\frac{a(\zeta)}{\zeta^2(\zeta-z)}dm_\zeta-i\varepsilon\gamma z+o(\varepsilon), \tag{3}$$

де $R>0$, *а* γ *- дійсна константа.*

Якщо додатково

$$\mu(z,\varepsilon)=\frac{z^2}{\overline{z}^2}\overline{\mu\left(\frac{R^2}{\overline{z}},\varepsilon\right)}, \tag{4}$$

то при $|z|=R$

$$|\omega(z,\varepsilon)|=R+o(\varepsilon)$$

Доведення. Виберемо деяке $R_0: 0<R_0<R$. Будь-яке квазіконформне відображення $\omega(z)$, що задовольняє всім умовам теореми 1, окрім $\omega(R_0)=R_0$, може бути представлене у вигляді $\omega(z)=A\tilde{\omega}(z)$, де A- довільна комплексна константа.

Виберемо

$$A = 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \iint\limits_{|\zeta| \le R} \frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - R_0)} dm_\zeta - \frac{\varepsilon R_0}{\pi} \iint\limits_{|\zeta| \ge R} \frac{a(\zeta)}{\zeta^2(\zeta - R_0)} dm_\zeta - i\varepsilon\gamma.$$

Нехай $\omega_1(z)$- квазіконформний автоморфізм $\overline{\mathbb{C}}$ з комплексною характеристикою

$$\mu_1(z) = \begin{cases} \varepsilon a(z), & |z| \le R \\ 0, & |z| > R \end{cases}$$

такий, що $\omega_1(0) = 0, \omega_1(\infty) = \infty, \omega_1'(\infty) = 1$. Тоді $\omega_1(z)$ може бути представлений у вигляді

$$\omega_1(z) = z - \frac{\varepsilon z}{\pi} \iint\limits_{|\zeta| \le R} \frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} dm_\zeta + o(\varepsilon),$$

Підставляючи вибране A в формулу $\omega(z) = A\tilde{\omega}(z)$, отримаємо представлення (3).

Нехай тепер виконане (4). Обчислимо $|\omega(z,\varepsilon)|$ при $|z| = R$:

$$|\omega(z,\varepsilon)| = |z| \left| 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \operatorname{Re} \left(\iint\limits_{|\zeta| \le R} \frac{a(\zeta) dm_\zeta}{\zeta(\zeta - z)} + \iint\limits_{|\zeta| \ge R} \frac{z a(\zeta) dm_\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)} \right) \right| + o(\varepsilon).$$

У другому інтегралі зробимо заміну змінної $\zeta \mapsto \dfrac{R^2}{\bar{\zeta}}$, отримаємо

$$|\omega(z,\varepsilon)| = R \left| 1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \operatorname{Re} \left(\iint\limits_{|\zeta| \le R} \left(\frac{a(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} - \frac{\overline{a(\zeta)}}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta} - \bar{z})} \right) dm_\zeta \right) \right| + o(\varepsilon) = R + o(\varepsilon),$$

тому що під інтегралом стоїть чисто уявний вираз. Теорема доведена.

Література

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. / Л. Альфорс // М. : Мир. – 1969. – 136 с.
2. Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. / П.П. Белинский // Нсб.: Наука. – 1974. – 96 с.
3. Волковыский Л.И. Квазиконформные отображения. / Л.И. Волковыский // Львов: Львов. ун-т. - 1954. – 156 с.