

УДК 53(07)

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО-ГАУССА У ФІЗИЦІ

А.В. Буликан, Н.В. Мельник, Б.А. Сусь

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ
e-mail: bogdansus@gmail.com

Постановка проблеми. У математиці формула Остроградського виражає потік векторного поля через замкнену поверхню інтегралом від дивергенції поля по об'єму, охопленому цією поверхнею:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

тобто інтеграл від дивергенції векторного поля \mathbf{F} по деякому об'єму V дорівнює потоку вектора через поверхню S , що обмежує даний об'єм.

Формула застосовується для перетворення об'ємного інтеграла в інтеграл по замкненій поверхні. Загальний метод перетворення потрібного інтеграла до поверхневого вперше показав Карл Фрідріх Гаусс (1813, 1830 р.) на прикладі задач з електростатики. В 1826 році М. В. Остроградський вивів формулу в загальному вигляді, представивши її як теорему (опубліковано в 1831 році). Однак у фізиці теорема застосовується некоректно.

Розгляд проблеми. Якщо електричний заряд q оточити замкнутою поверхнею S (рис. 1), то потік вектора напруженості, створений цим зарядом через поверхню, яка його оточує, пропорційний величині заряду :

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = k q.$$

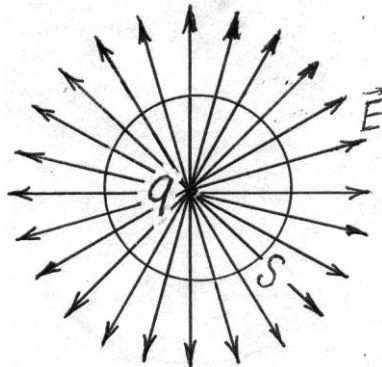


Рис. 1. Заряд q оточений замкнутою поверхнею

Тут коефіцієнт пропорційності $k = 1/\epsilon_0$, де ϵ_0 – електрична стала. Іншими словами, кількість "ліній" напруженості, які виходять від заряду q і пронизують замкнуту поверхню S , що його оточує, пропорційна величині заряду, який створює ці "лінії". До зарядів, які замкненою поверхнею не охоплюються, теорема ніякого відношення не має. Хоча традиційно теорема в навчальних посібниках, застосовується не до всіх зарядів, які створюють електричне поле, а лише до невеликої частини. Таке застосування теореми не відповідає її змісту, тому його не можна вважати коректним.

На рис. 2 наведені приклади застосування теореми Остроградського-Гаусса для розрахунку поля безмежної зарядженої площини в навчальних посібниках [1, 2, 3].

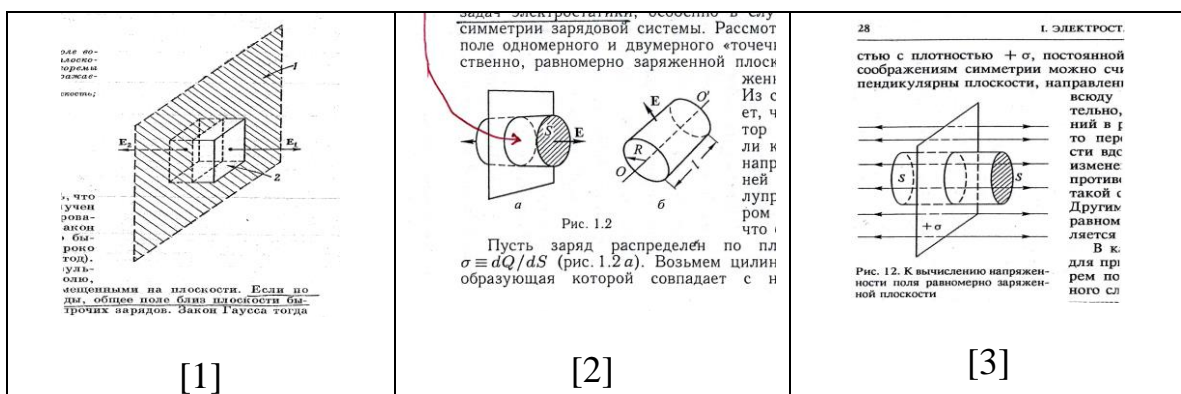


Рис. 2. Приклади застосування теореми Остроградського-Гаусса

Як бачимо, замкнена поверхня оточує лише частину заряду площини, тоді як поле створюється всією безмежною зарядженою площиною. Більше того, до замкненої поверхні, що оточує виділений заряд Δq , теорема також застосовується некоректно, оскільки вважається, що потік вектора напруженості через бічну поверхню S' відсутній (рис. 3). Очевидно, що це не так, оскільки лінії напруженості $\vec{E}_{\text{вн}}$ від заряду Δq пронизують бічну поверхню.

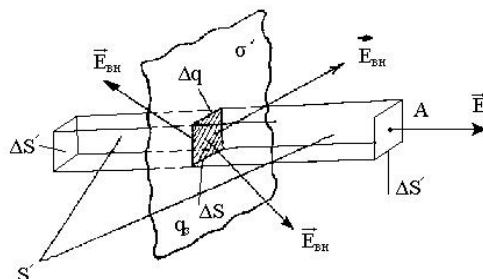


Рис. 3. Розрахунок поля зарядженої площини.

Потік, створюваний зарядом $\Delta q = \sigma \cdot \Delta S$ через бічну поверхню S'_B , не дорівнює нулеві, а навпаки, він значний і ним нехтувати не можна. Відповідно до рис. 2 теорему Остроградського-Гаусса треба записати так:

$$N_E = N_{E_{\text{вн}}} + N_{E_3} = \Delta q / \epsilon_0. \quad (1)$$

де N_E – загальний потік через допоміжну замкнену поверхню S' ; $N_{E_{\text{вн}}}$ – потік вектора $E_{\text{вн}}$ від заряду Δq , що знаходяться всередині поверхні S' ; N_{E_3} – від заряду q_3 що знаходиться всередині поверхні S' . Цей потік, як було показано (рис. 1. 3) дорівнює нулеві ($N_{E_3} = 0$). Отже (1) матиме вигляд:

$$N_{E_{3\text{в}}} = \Delta q / \epsilon_0. \quad (2)$$

Оскільки

$$N_{E_{3\text{в}}} = E_{\text{вн}} \Delta S' \cdot 2 + E_{\text{вн},\text{б}} S'_{\text{б}},$$

то (2) запишемо:

$$N_{E_{\text{вн}}} = \int_{\Delta S} E_{\text{вн}} dS + \int_{S_{\text{б}}} E_{\text{вн}} dS = \Delta q / \epsilon_0. \quad (3)$$

Як бачимо, в даному випадку, послідовно використовуючи теорему Остроградського-Гаусса, в принципі не можна визначити напруженості результуючого поля E зарядженої площини, оскільки це поле у формулу (3) не входить.

Висновки. Для правильного застосування теореми для розрахунку поля зарядженої площини необхідно замкненою поверхнею оточити увесь заряд, який створює поле. Якщо поле в деякій точці A створюється безмежною зарядженою площиною S , то згідно з фізичним сенсом теореми Остроградського-Гауса увесь заряд площини S необхідно охопити допоміжною замкнутою поверхнею $S' = S'_1 + S'_2 + S'_\text{б}$ (рис. 3).

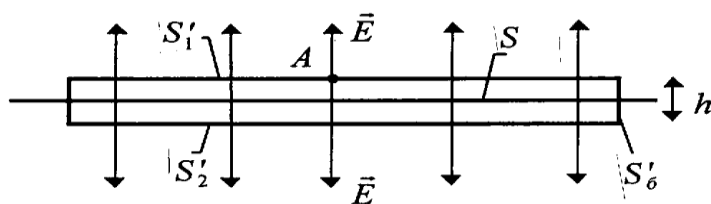


Рис . 3. Коректне застосування теореми.

Література

1. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике, т.5 / Р.Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс . – М.: МИР. 1966. – С. 97.
2. Кингсеп А.С. Основы физики, т. 1. /А.С. Кингсеп, Г.Р. Локшин, О.А. Ольхов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2007. – С. 200.
3. Бутиков Е.И. Физика. Книга 2. Электродинамика / Е.И. Бутиков., А.С. Кондратьев. Физика. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2008. – С. 28.