УДК 517.31

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ТАБЛИЧНОГО ЗАПИСУ ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ
e-mail: victor144169@gmail.com

Табличний запис є ефективною і зручною реалізацією узагальненого методу інтегрування частинами, що базується на формулі [2]:

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v dx. \qquad (1)$$

Якщо позначити $u(x) = f(x)$, а $v^{(n+1)} = g(x)$, то формулу (1) можна переписати ще в такому вигляді [4, 5]:

$$\int f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(-k-1)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}g^{(-n-1)}(x)dx, \qquad (2)$$

де $f^{(k)}(x)$ — похідна k-го порядку функції $f(x)$, а $g^{(-k)}(x)$ — первісна k-го порядку функції $g(x)$:

$$g^{(-1)}(x) = \int g(x)dx, g^{(-2)}(x) = \int g^{(-1)}(x)dx, \ldots, g^{(-k-1)}(x) = \int g^{(-k)}(x)dx.$$

Знаходження послідовних похідних і первісних зручно оформлювати в табличному вигляді, що водночас і зменшує кількість можливих помилок.

Почережні знаки		$f(x)$ та її похідні		$g(x)$ та її первісні
$+$	$\to$	$f(x)$	□	$g(x)$
$-$	$\to$	$f'(x)$	□	$g^{(-1)}(x)$
$+$	$\to$	$f''(x)$	□	$g^{(-2)}(x)$
...	...	....	....	...
$(-1)^n$	$\to$	$f^{(n)}(x)$	□	$g^{(-n)}(x)$
$(-1)^{n+1}$	$\to$	$f^{(n+1)}(x)$	$\to$	$g^{(-n-1)}(x)$

Стрілки вказують на напрям множення відповідних функцій.

Цей метод запису інтегрування частинами був запропонований у статті [2] і широко використовується в англомовній навчальній літературі, приміром [3, 6]. Деякі приклади застосування табличного запису подано в статті [1].

Для практичної реалізації методу можна замість заголовків-результатів дій використовувати також вказівку на виконувану дію.

У разі якщо $f(x)=P_n(x)$ — многочлен n-го порядку, то формула (2) набуває простішого вигляду:

$$\int f(x)g(x)dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(-k-1)}(x),$$

оскільки $(P_n(x))^{(n+1)}=0.$

Приклад 1. Запишімо в табличному вигляді двократне інтегрування частинами в інтегралі $\int(3x^2+2x+5)\cos 2xdx.$

Змінюємо знак		Диференціюємо		Інтегруємо
$+$	$\to$	$f(x)=3x^2+2x+5$		$g(x)=\cos 2x$
$-$	$\to$	$f'(x)=6x+2$		$g^{(-1)}(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$
$+$	$\to$	$f''(x)=6$		$g^{(-2)}(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$
$-$	$\to$	$f'''(x)=0$		$g^{(-3)}(x)=-\frac{1}{8}\sin 2x$

Отже,

$$\int(3x^2+2x+5)\cos 2xdx=$$

$$=(3x^2+2x+5)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-(6x+2)\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)+6\left(-\frac{1}{8}\sin 2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}(6x^2+4x+7)+\frac{1}{2}(3x+1)\cos 2x+C.$$

Табличне інтегрування частинами може бути ефективно застосоване й до інтегралів вигляду $\int\frac{P_n(x)}{(ax+b)^r}dx$ [5]. Розгляньмо випадок, коли r не є цілим числом.

Приклад 2. Запишімо у табличному вигляді інтегрування частинами в інтегралі $\int\frac{4x^2+3x-1}{\sqrt[4]{4x+7}}dx.$

Почережні знаки		$P_2(x)$ та її похідні		$g(x)$ та її первісні
$+$	$\to$	$P_2(x) = 4x^2 + 3x - 1$		$g(x) = (4x+7)^{-\frac{1}{4}}$
$-$	$\to$	$P_2'(x) = 8x + 3$		$g^{(-1)}(x) = \dfrac{(4x+7)^{\frac{3}{4}}}{4 \cdot \frac{3}{4}}$
$+$	$\to$	$P_2''(x) = 8$		$g^{(-2)}(x) = \dfrac{(4x+7)^{\frac{5}{4}}}{4 \cdot \frac{5}{4}}$
$-$	$\to$	$P_3'''(x) = 0$	$\to$	$g^{(-3)}(x) = \dfrac{(4x+7)^{\frac{7}{4}}}{4 \cdot \frac{7}{4}}$

Отже, маємо:

$$\int \frac{4x^2 + 3x - 1}{\sqrt[4]{4x+7}} dx = (4x^2 + 3x - 1)\frac{(4x+7)^{\frac{3}{4}}}{3} - (8x+3)\frac{(4x+7)^{\frac{5}{4}}}{5} + 8\frac{(4x+7)^{\frac{7}{4}}}{7} + C.$$

Табличний запис інтегрування частинами може бути ефективно застосований як в теоретичних викладках (приміром, виведення формул операційного числення), так і до конкретних прикладів, де виникає потреба в багаторазовому інтегруванні частинами. А саме до інтегралів вигляду:

$$\int P_n(x) f(ax)dx,\ \int P_n(x)(ax+b)^{-r} dx, \int P_n(x)\ln^k x dx,\ \int f(ax)g(bx)dx,$$

де $f(x) \in \{e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}, g(x) \in \{\sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}; n, k \in \mathbb{N}, r > 0.$

Література

1. Трофіменко В. Про табличний запис інтегрування частинами / В. Трофіменко, Л. Б. Федорова // Математика в сучасному технічному університеті : матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 24—25 груд. 2015 р.). — Київ : НТУУ «КПІ», 2016. — С. 208—211.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — Москва : Физматлит, 2001. — Т. 2. — 800 с.
3. Anton H. Calculus : Early transcendents / H. Anton, I. Bivens, S. Davis. — 10 ed. — Wiley Publishing, Inc, 2013. — 1312 p.
4. Folley K. W. Integration by Parts / K. W. Folley // The American Mathematical Monthly. — 1947. — Vol. 54, No. 9. — P. 542—543.
5. Horowitz D. Tabular Integration by Parts / D. Horowitz // The College Mathematics Journal. — 1990. — Vol. 21, No. 4. — P. 307—311.
6. Larson R. Calculus / R. Larson, B. Edwards. — 10 ed. — Brooks Cole, 2013. — 1280 p.