МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА

ДЗЮБА МАРИНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.9

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНІ МАТРИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Державному вищому навчальному закладі «Донбаський державний педагогічний університет» Міністерства освіти і науки України, м. Слов'янськ.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
Чуйко Сергій Михайлович,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», м. Слов'янськ,
завідувач кафедри математики та інформатики.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Черевко Ігор Михайлович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри математичного моделювання;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Щербак Володимир Федорович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов'янськ,
заступник директора.

Захист відбудеться 28 лютого 2020 р. о 15^{20} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4, ауд. 6-49.

З дисертацією можна ознайомитися у Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.

Автореферат розісланий «24» січня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради С. Ю. Ігнатович

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вивчення матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В останні роки значна увага приділяється дослідженню крайових задач, лінійна частина яких не є оборотним оператором, і, зокрема, тому випадку, коли число крайових умов не збігається з розмірністю розв'язку. Зауважимо, що у науковій літературі цей клас крайових задач дістав назву нетерових. Дослідженню різних аспектів теорії лінійних і слабконелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, систем із запізненням аргументу, з імпульсною дією, інтегро-диференціальних систем, матричних диференціальних рівнянь з допомогою апарату узагальнено-обернених операторів присвячені роботи А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, В.П. Журавльова, С.М. Чуйка, С.А. Кривошеї, Л.І. Каранджулова та інших авторів.

Лінійні та нелінійні матричні алгебраїчні рівняння широко використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті та Бернуллі, в теорії стійкості руху, у теорії оптимального керування, варіаційному численні, а також у задачах на відновлення та покращення зображень. Актуальними проблемами при розв'язанні лінійних та нелінійних матричних рівнянь є визначення умов розв'язності та побудова схем знаходження розв'язків, а також, наближених розв'язків таких рівнянь. Актуальними проблемами при розв'язанні лінійних та нелінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач є визначення умов розв'язності та побудова схем знаходження розв'язків, а також, наближених розв'язків таких задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота здійснювалась згідно з планом наукової роботи ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», планом досліджень спільної із ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» міжвідомчої лабораторії «Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь» Інституту математики НАН України та пов'язана з тематичним планом фундаментальної наукової роботи «Конструктивні методи аналізу матричних крайових задач для систем диференціальних, функціонально-диференціальних та диференціально-алгебраїчних рівнянь і теорії наближень» (реєстраційний № 0118U003390), яка фінансується з коштів державного бюджету й виконується в ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

Мета й задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, для яких відповідний оператор не має оберненого.

Завданнями дослідження є:

— для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра побудувати схему регуляризації;

— для наближеного розв'язання матричного рівняння Ріккаті побудувати ітераційну схему за класичною схемою методу найменших квадратів, а також знайти умови її збіжності до шуканого розв'язку;

— знайти умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом;

— для лінійних нетерових крайових задач отримати достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу «interface conditions»;

— у випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі знайти умови існування, а також конструкцію найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі.

Предмет дослідження. Предметом дослідження дисертаційної роботи є необхідні і достатні умови існування розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичних випадках.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром-Пенроузом) матриць, конструкції узагальнених операторів Гріна, побудовані в роботах А.М. Самойленка та О.А. Бойчука і метод найменших квадратів, розвинений для лінійних крайових задач у роботах М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, М.П. Кравчука. При розв'язанні проблем регуляризації некоректно поставлених лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєво використовується метод узагальнених операторів Гріна, побудований у роботах А.М. Самойленка та О.А. Бойчука, а також техніка регуляризації некоректно поставлених крайових задач, розвинута у роботах С.Г. Крейна, А.М. Тихонова, В.Я. Арсеніна та школою професора М.В. Азбелева. Різним аспектам теорії крайових задач присвячені роботи А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука, М.Й. Ронто та багатьох інших вчених. Серед іноземних вчених теорії крайових задач присвячені роботи таких науковців як G.D. Birkhoff, G.A. Bliss, D. Bainov, R. Conti, J. Hale, W.T. Reid, O. Veivoda, S. Schwabik, T. Vogel, D. Wexler та ін., зокрема, теорії крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь: S.L. Campbell, Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, наступні:

1) для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра побудовано схему регуляризації, яка суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова. Для наближеного розв'язання матричного рівняння Ріккаті побудовано ітераційну схему за класичною схемою методу найменших квадратів, а також знайдені умови її збіжності до шуканого розв'язку.

2) знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Для лінійних нетерових крайових задач отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

3) у випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Результати роботи успішно використовуються в навчальному процесі в ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

Публікації. За темою дисертації у фахових виданнях України опубліковано 7 статей автора [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]; статті [2, 3] перевидано англійською мовою та відображено у наукометричних базах Scopus, Web of Science, MathSciNet, Zentralblatt MATH, і 9 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи здобувач отримала самостійно. З 16 наукових публікацій за темою дисертації роботу [4] підготовлено без співавторів. У спільних роботах із науковим керівником С.М. Чуйком автору дисертації належать основні результати, які полягають у знаходженні необхідних і достатніх умов існування розв'язків та регуляризації матричних крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь. У спільних роботах із О.В. Чуйко [6, 7] співавтору належить участь у постановці задач, консультації з вибору методології дослідження. У спільній роботі із О.С. Чуйком [5] співавтору належить участь у постановці задач. У спільних роботах із О.В. Нєсмєловою [1, 2] співавтору належить участь у постановці задач, обговорення отриманих результатів та висновків.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

1. Міжнародній математичній літній школі «Алгебра, топологія, аналіз» (м. Одеса, 1—14 серпня 2016 р.);

2. International conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, Ukraine, 20—24 September, 2016);

3. Міжнародній науковій конференції «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування» (м. Чернівці, 28—30 вересня 2016 р.);

4. Спільних засіданнях семінару ІПММ НАН України та кафедри математики та інформатики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (4 травня 2017 р., 10 серпня 2017 р., 1 грудня 2017 р., 5 березня 2018 р. та 4 січня 2019 р.);

5. Міжнародній науковій конференції «Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation» (м. Київ, 24—26 травня 2017 р.);

6. Міжнародній науковій конференції «Теорія наближення функцій та її застосування» (м. Слов'янськ, 28 травня—3 червня 2017 р.);

7. Міжнародній науковій конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (м. Київ 7—10 червня 2017 р.);

8. Міжнародній науковій конференції пам'яті В.А. Плотнікова (м. Одеса, 11—16 червня 2018 р.);

9. The Seventh International Workshop «Constructive methods for non-linear boundary value problems» (Miskolc, Hungary, 5—8 July, 2018);

10. Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях» (Чернівці, 17—19 вересня 2018 р.);

11. 3-rd International Scientific Conference «Differential equations and control theory» (Kharkiv, 25—27 September, 2018);

12. Засіданні семінару відділу диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України 8 квітня 2019 р. (керівник семінару академік НАН України А. М. Самойленко);

13. Засіданні семінару кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна 12 червня 2019 р. (керівник семінару доктор фіз.-мат. наук, професор В. І. Коробов).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 160 найменувань, та двох додатків. Повний обсяг роботи – 166 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 23 сторінки.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук, професору С.М. Чуйку за постійну увагу до роботи та обговорення одержаних результатів, а також вдячна академіку НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору А.М. Самойленку і члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору О.А. Бойчуку за увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, подано короткий аналіз сучасного стану проблем, які досліджуються в дисертації, а також наведено загальний опис отриманих результатів.

Перший розділ присвячено огляду наукових праць із теорії лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач у критичних випадках, а також наведено необхідні відомості з теорії матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра. Проаналізовано сучасний стан і встановлено перспективність дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. Встановлено, що умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при побудові схем регуляризації цих рівнянь, які суттєво відрізнятимуться від класичного методу регуляризації Тихонова. Встановлено, що умови існування та формули для побудови розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра можуть бути застосовані при дослідженні матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, а також отримані достатніх умов регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, нетерових крайових задач.

У *другому розділі* досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язів матричного рівняння Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\, C\, R_i = B, \quad Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}, \quad B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}. \tag{1}$$

Визначимо оператор $\mathcal{M}[A] : \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор. Позначимо матриці

$$\Xi_j := \sum_{i=1}^{k} Q_i \Theta_j R_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}, \quad j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma.$$

Визначимо також матриці

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n}, \ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

тут δ_{ij} — символ Кронеккера. Припустимо, що умова розв'язності матричного рівняння Сильвестра (1) не виконується для довільної неоднорідності:

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}[B] \neq 0; \quad \mathcal{Q} := \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Big\{ \Big[E_1^{\alpha\beta}\Big]_j \otimes \mathcal{M}[\Xi_j] \Big\} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}}\ :\ \ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma}\ \to\ \mathbb{N}(\mathcal{Q}),\ \ P_{\mathcal{Q}^*}\ :\ \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta}\ \to\ \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$ — ортопроектори матриць $\mathcal{Q}$ та $\mathcal{Q}^*$. Поставимо наступну задачу: чи існують матриці $\mathcal{E}\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ та $\mathcal{F}\in\mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$, для яких збурення матричного рівняння Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i+\varepsilon\,\mathcal{E}C\mathcal{F}=B \tag{2}$$

розв'язне для довільної неоднорідності. Припустимо матрицю $\mathcal{E}\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ невідомою, а матрицю $\mathcal{F}\in\mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ — фіксованою. Розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (2) шукатимемо у вигляді суми

$$C=\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Theta_j x_j,\quad x_j\in\mathbb{R}^1;$$

тут Θ_j — базис простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Позначимо $(\alpha\times\delta)$ – матриці

$$\Omega_{1,i}:=\Xi_i\Theta_1\mathcal{F},\quad \Omega_{2,i}:=\Xi_i\Theta_2\mathcal{F},\ \dots\ ,\ \ \Omega_{\beta\gamma,i}:=\Xi_i\Theta_{\beta\gamma}\mathcal{F}$$

та сталу $(\alpha\beta\delta\gamma\times\alpha\beta)$ – матрицю

$$\mathfrak{Q}:=\Big\{\mathcal{M}\Big[\mathcal{M}(\Omega_{1,1}),\ \dots\ ,\ \mathcal{M}(\Omega_{1,\beta\gamma})\Big],\ \dots\ ,\ \mathcal{M}\Big[\mathcal{M}(\Omega_{\alpha\beta,1}),\ \dots\ ,\ \mathcal{M}(\Omega_{\alpha\beta,\beta\gamma})\Big]\Big\}.$$

Матриця $\mathcal{Q}\in\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\beta\cdot\gamma}$ може бути зображена у вигляді

$$\mathcal{Q}=\Phi\cdot J_r\cdot\Psi,\quad J_r:=\begin{pmatrix} I_r & O\\ O & O\end{pmatrix},\quad \mathrm{rank}\ \mathcal{Q}:=r;$$

тут $\Phi\in\mathbb{R}^{\alpha\cdot\delta\times\alpha\cdot\delta}$ та $\Psi\in\mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma}$ — невироджені матриці. Матричне рівняння Сильвестра (1) можна регуляризувати за умови [7]

$$\mathrm{rank}\ \Big(J_r+\Pi_{J_r}\Big)=\alpha\delta\le\beta\gamma,\quad \Pi_{J_r}:=\Phi^{-1}\cdot\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{P_{\mathfrak{Q}_\varrho^*}}c_\varrho\Big]\cdot\Psi^{-1}. \tag{3}$$

Теорема 2.1.1. *Матричне рівняння Сильвестра (1) у критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*}\ne 0$) не розв'язне для довільної неоднорідності B, однак за умови $\alpha>1,\ \beta>1,\ \gamma>1,\ \delta>1$, у випадку (3) для фіксованої матриці повного рангу $\mathcal{F}$ розв'язок збуреного матричного рівняння Сильвестра (2) визначає матриця $C(\mathcal{F},c_\mu)=Y[\mathcal{F}]+Z[c_\mu]$ та вектор*

$$y(\mathcal{F},c_\nu)=y(\mathcal{F})+y(c_\nu),\quad y(\mathcal{F}):=\mathfrak{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{Q}_1],\quad y(c_\nu):=P_{\mathfrak{Q}_\nu}c_\nu,$$

де

$$Y\Big[\mathcal{F}\Big]:=\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Theta_j x_j(\mathcal{F}),\quad Z\Big[c_\mu\Big]:=\sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma}\Theta_j x_j(c_\mu);$$

тут

$$x(\mathcal{F}) := (\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)^{+}\mathcal{M}[B], \quad x(c_\mu) := P_{(\mathcal{Q}+\mathcal{Q}_1)_\mu} c_\mu, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^{\mu}.$$

Припустимо далі некоректно поставленою задачу про знаходження розв'язків $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \otimes \mathbb{C}^1[a;b]$ матричної крайової задачі

$$Z'(t) = AZ(t)+Z(t)B+F(t),\ A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha},\ B \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta},\ \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma},\ (4)$$

а саме: припустимо, що матрична крайова задача (4) не має розв'язків для довільних неоднорідностей $F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$. Тут $\mathcal{L}Z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}$ — лінійний обмежений матричний функціонал. Нами досліджено умови регуляризації матричної крайової задачі (4) за допомогою малого $0<\varepsilon\ll 1$ збурення $\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon)$ крайової умови (4):

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V} = \mathfrak{A}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\delta\times\alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}. \qquad (5)$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$. Як відомо, загальний розв'язок задачі Коші $Z'(t) = AZ(t)+Z(t)B+F(t),\ Z(a) = \Theta$ має зображення

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) + K[F(s)](t), \quad W(t,\Theta) := U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

де $U(t)$ та $V(t)$ — нормальні фундаментальні матриці:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta,$$

$$K[F(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\,ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для матричного рівняння (4). Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Оскільки, за припущенням, матрична крайова задача (4) не має розв'язків $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ для довільних неоднорідностей, для цієї задачі має місце критичний випадок, а саме, має місце нерівність $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$; тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta} \to P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*), \quad \mathcal{Q} := \left[\ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(1)}]\ \ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(2)}]\ ...\ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}]\ \right] \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}, \quad j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha\cdot\beta.$$

Як відомо, кожна $(m\times n)$– матриця Q у певному базисі може бути зображена у вигляді

$$Q = M\cdot J\cdot N, \quad J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{rank}\ Q := \rho; \qquad (6)$$

тут $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ та $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці. Збурення матриці $\mathcal{Q}$ шукатимемо у вигляді $\mathfrak{Q} := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Нерівність $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$ рівнозначна рівнянню [6]

$$[\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}] \cdot [\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}]^+ = I_{\gamma\cdot\delta}, \tag{7}$$

розв'язному лише за умови $\gamma\delta \leq \alpha\beta$. Позначимо Λ_j, $j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, та матриці

$$\Pi_i := \{\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_1], ..., \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_{\beta\gamma}]\ \}, \mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_1 & \cdots & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \\ \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_1 & \cdots & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_1 & \cdots & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що крайова задача (4) не має розв'язків $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ для довільних неоднорідностей $F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$, $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}$. За умови $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ та за вимог*

$$P_{\mathfrak{D}^*}\mathcal{M}[\,M\Pi_J N] = 0, \quad \mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}[0,\varepsilon_0]$$

за допомогою малого збурення крайової умови (5) матрична крайова задача (4), (5) отримує розв'язки вигляду

$$Z(t,\varepsilon) = W(t,c_r) + G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon),\ W(t,c_r) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r],\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

у просторі $Z(t,\varepsilon):\ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b],\ Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$. Тут

$$G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon) := K[F(s)](t) + \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\Big\}\Big\}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію матричної крайової задачі (4), (5).

У *третьому розділі* досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язів

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} := \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t),\ t \neq \tau_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,\ \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{8}$$

Тут

$$\mathcal{A}Z'(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \tau_0 := a$$

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор, який за визначенням для будь-яких скалярних функцій $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ забезпечує рівність

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ — неперервна для $t \neq \tau_i$ матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=0}^{p} \mathcal{L}_i Z(\cdot):\ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p,$$

де

$$\mathcal{L}_i Z(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}, i = 0,\ \dots\ ,\ p-1, \mathcal{L}_p Z(\cdot) : \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[\tau_p, b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$$

— лінійні обмежені матричні функціонали. Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (8) з імпульсним впливом узагальнює нетерові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь, в тому числі, з імпульсним впливом. Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ за визначенням зображується у вигляді

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z_j'(t).$$

При цьому

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t)\Big] = \Omega(t) \cdot z'(t), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\},$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha \cdot \beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t)\Big] = \Theta(t) \cdot z(t), \quad \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\},$$

де

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2,\ \dots,\ \alpha \cdot \beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (8) приведено до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\Omega(t) \cdot z'(t) = \Theta(t) \cdot z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \tag{9}$$

За умови

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0,\ P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0,\ \Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \tag{10}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \tag{11}$$

система (9) розв'язна відносно похідної

$$z'(t) = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)), \quad \mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = \Omega^+(t)\Theta(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_{\alpha\beta}, \quad t \in [a; \tau_1[$$

одержаної традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. Фундаментальну матрицю нетривіальних розв'язків задачі

$$z' = \Omega^+(t)\Theta(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = 0$$

шукаємо у вигляді

$$X(t) = \left\{ \begin{array}{lll} X_0(t)U_0, & U_0 \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [a; \tau_1[, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ X_0(t)U_p, & U_p \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}, & t \in [\tau_p; b], \end{array} \right. \quad U := \begin{bmatrix} U_0 \\ \dots \\ U_p \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Позначимо

$$P_Q : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)} \to \mathbb{N}(Q), \quad Q := \Big[\ \ell_0 X_0(\cdot) \quad \ell_1 X_0(\cdot) \quad \dots \quad \ell_p X_0(\cdot)\ \Big] \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta(p+1)}$$

— матрицю-ортопроектор. За умови $P_Q = 0$ однорідна частина задачі (8) має тільки нульовий розв'язок; якщо ж $P_Q \neq 0$, то однорідна частина задачі (8) має розв'язок вигляду $z(t,c) = X(t)c$, де $U = P_Q C$. Припустимо, що

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ ..... \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix}, \quad C = \tilde{I} \cdot C^{(0)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta(p+1)\times\alpha\cdot\beta}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\cdot\beta} \\ ..... \\ I_{\alpha\cdot\beta} \end{bmatrix},$$

де $P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \dots, P_Q^{(p)}$ — $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta(p+1))$-вимірні блоки ортопроектора P_Q, $C^{(0)}$ — довільна стала $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-матриця, $\tilde{I}$ — стала $(\alpha\cdot\beta(p+1)\times\alpha\cdot\beta)$ — вимірна матриця. У нових позначеннях

$$U = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)} \\ .... \\ P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)} \end{bmatrix}, \ \ U_0 = P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)}, \ \ U_1 = P_Q^{(1)}\tilde{I}C^{(0)}, \ \dots \ , \ U_p = P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)}.$$

Таким чином, за умов (10), (11) та $P_Q \neq 0$, однорідна частина задачі (8) має розв'язок

$$Z(t,c) = W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c\Big], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який визначається фундаментальною матрицею $X(t)$. За умов (10), (11) розв'язок неоднорідної диференціально-алгебраїчної задачі (8) з імпульсним впливом шукаємо, використовуючи розв'язок неоднорідної крайової задачі

$$z'(t) = \Omega^{+}(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t,\varphi(t)), \quad \ell z(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{M}\mathfrak{A}$$

у вигляді

$$G\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t) := \begin{cases} X_0(t)\xi_0 + K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ .... , & .... , \\ X_0(t)\xi_p + K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), & t \in [\tau_p;b]. \end{cases}$$

Тут

$$K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\mathfrak{F}(s,\varphi(s))ds;$$

розв'язок матричного диференціально алгебраїчного рівняння (8)

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), \ \ W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X_0(t)c\Big]$$

визначає узагальнений оператор Гріна задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (8)

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t)\Big\}, \quad t \in [a; \tau_1[.$$

Позначимо $P_{Q^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(Q^*)$ — матрицю-ортопроектор. Згідно до традиційної класифікації крайових задач, випадок $P_{Q^*} \neq 0$ називатимемо критичним; у цьому випадку умови існування та вигляд загального розв'язку задачі (8) визначає наступна теорема [3].

Теорема 3.1.1. *За умов (10) та (11) однорідна частина диференціально-алгебраїчної задачі з імпульсним впливом (10) має розв'язок*

$$Z(t, c) = W(t, c) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c\Big], \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який зображується фундаментальною матрицею

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [a, \tau_1], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_0(t)P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)}, & t \in [\tau_p, b]. \end{cases}$$

За умов (10) та (11) лінійна неоднорідна диференціально алгебраїчна задача з імпульсним впливом (10) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову

$$P_{Q^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

В цьому випадку задача (10) має розв'язок

$$Z(t, c) = W(t, c) + \mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

який зображується узагальненим оператором Гріна

$$\mathfrak{G}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{G\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s)); \mathcal{M}\mathfrak{A}\Big](t)\Big\},$$

де

$$\mathrm{col}\ (\xi_0,\ \dots\ ,\ \xi_p) := Q^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](\cdot)\Big\}.$$

Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (8) узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь. З іншого боку, умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом (8) узагальнюють результати для нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Припустимо задачу про побудову розв'язків

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu} \tag{13}$$

некоректно поставленою, а саме, припустимо, що виконуються умови

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \; P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \; \Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a,b], \tag{14}$$

та

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t), \quad P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a,b], \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)], \tag{15}$$

при цьому задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для диференціально-алгебраїчної системи (13) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. В той же час припустимо, що має місце критичний випадок ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) та не виконується умова

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{16}$$

розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13). За умов (14) та (15) система (9) розв'язна відносно похідної

$$z'(t) = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t,\varphi(t)), \quad \mathfrak{F}(t,\varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t).$$

Тут $P_{\Omega^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{\Omega^*}(t) : \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*(t))$, $P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)-$ матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)-$ матриці-ортопроектора $P_\Omega(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t))$. Припустимо $\psi_1(t), \; \psi_2(t), \; \dots \; , \; \psi_k(t), \; \dots$ – система лінійно-незалежних неперервно-диференційовних $\alpha\beta$ – вимірних вектор-функцій. Позначимо $(\alpha\beta\times k)$ – вимірну матрицю $\psi(t) = [\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \dots \quad \psi_k(t)]$. Наближення до розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) шукатимемо у вигляді $z(t) := \mathcal{M}[Z(t)] = \psi(t)\cdot c, \; c \in \mathbb{R}^k$. Вимагатимемо

$$F(c) := \Big|\Big|\frac{dz}{dt} - \Omega^+(t)\Theta(t)z - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big]\Big|\Big|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \Big|\Big|\mathcal{M}\Big[\mathcal{L}Z(\cdot) - \mathcal{A}\Big]\Big|\Big|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min$$

для фіксованої матриці $\psi(t)$; при цьому

$$F(c)=\Big|\Big|\psi'(t)\cdot c-\Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot c-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big|\Big|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]}+$$

$$+\Big|\Big|\mathcal{M}\Big[\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[\psi(\cdot)c\Big]-\mathcal{A}\Big]\Big|\Big|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}}\to\min.$$

Позначимо $\check{\Xi}^{(j)}\in\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},\ j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$ — базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Функція $F(c)$ зображувана у вигляді

$$F(c)=\int_a^b\Big\{\Phi(t)c-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big\}^*\Big\{\Phi(t)c-\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\Big\}dt+$$

$$+\Big\{\Psi c-\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}^*\cdot\Big\{\Psi c-\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\},\quad c:=\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\check{\Xi}^{(j)}c_j\in\mathbb{R}^k,$$

де

$$\Phi(t):=\Big[\ \Phi_1(t)\ \ \Phi_2(t)\ \ \dots\ \ \Phi_k(t)\ \Big],\Phi_j(t):=\psi'(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)}-\Omega^+(t)\Theta(t)\psi(t)\cdot\check{\Xi}^{(j)},$$

$$\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[\psi(\cdot)c\Big]\Big\}=\Psi c,\ \Psi:=\Big[\ \Psi_1\ \ \Psi_2\dots\Psi_k\ \Big],\Psi_j:=\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[\psi(\cdot)\check{\Xi}^{(j)}\Big]\Big\}.$$

Для фіксованої матриці $\psi(t)$ мінімум функції $F(c)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідною умовою мінімізації функції $F(c)$ є рівняння

$$\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]\cdot c=\int_a^b\Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big],$$

розв'язне відносно вектора

$$c=\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^+\Big\{\int_a^b\Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}$$

за умови

$$\mathcal{P}_\psi\Big\{\int_a^b\Phi^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt+\Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\}=0,\qquad(17)$$

зокрема, у випадку невиродженості суми $(k\times k)-$ матриць Грама [2]

$$\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big):=\int_a^b\Phi^*(t)\Phi(t)dt,\quad\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big):=\Psi^*\Psi.$$

Тут

$$\mathcal{P}_\psi:=P_{[\Gamma(\psi(\cdot))+\Gamma(\mathcal{L}\psi(\cdot))]^*}:\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{N}\Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)+\Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^*$$

— $(k \times k)-$ матриця-ортопроектор.

Теорема 3.2.1. *Для фіксованого числа* k *та фіксованої* $(\alpha\beta \times k)-$ *вимірної матриці* $\psi(t)$ *за умов (14), (15) та (17) найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку* $F(c)$ *псевдорозв'язку*

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\psi(t) \cdot \Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big]^{+} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \Psi^* \mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big] \right\} \Big\}$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) серед функцій вигляду

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\psi(t) \cdot c\Big\}.$$

Наслідок 3.2.1. *Для фіксованого числа* k *та фіксованої* $(\alpha\beta \times k)-$ *вимірної матриці* $\psi(t)$ *за умов (14), (15) та*

$$\det \Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\Big)\Big] \neq 0$$

псевдорозв'язок $Z^{\dagger}(\psi(t))$ *найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку* $F(c)$ *псевдорозв'язку* $Z^{\dagger}(\psi(t))$ *матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) серед функцій вигляду*

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\psi(t) \cdot c\Big\}.$$

У частинному випадку, коли $\ell\psi(\cdot) = 0$, умова (17):

$$\mathcal{P}_{\psi} \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt = 0$$

та вигляд псевдорозв'язку значно спрощуються:

$$Z^{\dagger}(\psi(t)) = \psi(t) \cdot \Big[\Gamma\Big(\psi(\cdot)\Big)\Big]^{+} \int_a^b \Phi^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt.$$

У випадку розв'язності матричної крайової задачі (13) за умов (14), (15) та (17) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ найкращий (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язок $Z^{\dagger}(\psi(t))$ матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) є точним розв'язком. Доведена теорема 3.2.1 та наслідок

3.2.1 узагальнюють відповідні твердження на випадок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13).

У випадку нерозв'язності диференціально-алгебраїчної системи (9) відносно похідної для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку $Z^{\dagger}(\psi(t))$ диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано конструктивні умови існування та побудовано алгоритми знаходження розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач, для яких відповідний оператор не має оберненого, зокрема:

1) для матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра побудовано схему регуляризації, яка суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова. Для наближеного розв'язання матричного рівняння Ріккаті побудовано ітераційну схему за технікою найменших квадратів, а також знайдені умови її збіжності до шуканого розв'язку;

2) знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з імпульсним впливом, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь. Для лінійних нетерових крайових задач отримані достатні умови регуляризації за рахунок, як виродженого, так і невиродженого імпульсного збурення, а також за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions";

3) у випадку нерозв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) знайдені умови існування, а також конструкція найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі, які узагальнюють традиційні результати, як для матричних диференціальних рівнянь, так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз

1. Чуйко С. М. Про наближене розв'язання матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач методом найменших квадратів / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 423—436.

   (Входить до міжнародної наукометричної бази MathSciNet.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження умов існування, а також конструкції найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

2. Чуйко С. М. Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач / С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, М. В. Дзюба // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 2. — С. 280—292.

   Переклад:
   Chuiko S. M. Least-squares method in the theory of matrix differential-algebraic boundary-value problems / S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova, M. V. Dzyuba // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 70, N 2. — P. 319—333.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження умов існування і конструкції найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

3. Чуйко С. М. Матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача с импульсным воздействием / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Нелінійні коливання. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 564—573.

   Переклад:
   Chuiko S. M. Matrix differential-algebraic boundary-value problem with

pulsed action / S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 238, N 3. — P. 333—343.

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH.)

4. Дзюба М. В. Про наближене розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом найменших квадратів / М. В. Дзюба // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2017. — Т. 31. — С. 46—53.

5. Чуйко С. М. Регуляризація матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, № 1—2. — С. 145—151.

   (Входить до міжнародної наукометричної бази Zentralblatt MATH.)

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження конструктивних умов регуляризації матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови.

6. Чуйко С. М. Регуляризация линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия типа "interface conditions"/ С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2016. — Т. 30. — С. 143—154.

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження для лінійних нетерових крайових задач достатніх умов регуляризації за допомогою імпульсного впливу типу "interface conditions".

7. Чуйко С. М. Про регуляризацію матричного рівняння Сильвестра / С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, М. В. Дзюба // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2015. — Т. 29. — С. 147—156.

   Особистий внесок здобувача. Автору дисертації належать результати зі знаходження для матричного рівняння Сильвестра достатніх умов та схеми регуляризації.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

8. Chuiko S. About an approximate solution of matrix differential-algebraic boundary-value problems with a least-squares method / S. Chuiko, O. Nesmelova, M. Dzuba // Differential equations and control theory, 25–27 September 2018 : Book of Abstracts. — Kharkiv, 2018. — P. 18.

9. Чуйко С. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. Чуйко, М. Дзюба // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях, 17–19 вересня 2018 р. : матеріали міжнар. наук. конф. — Чернівці, 2018. — С. 113.

10. Чуйко С. М. Матричная импульсная дифференциально-алгебраическая краевая задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 11–16 июня 2018 г. : тезисы докл. — Одесса, 2018. — С. 84.

11. Чуйко С. М. Матрична імпульсна диференціально-алгебраїчна крайова задача / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, 7–10 червня 2017 р. : тези доп. — Київ, 2017. — С. 109.

12. Чуйко С. М. Матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача з імпульсним впливом / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // Теорія наближення функцій та її застосування, 28 травня–3 червня 2017 р. : тези доп. міжнар. конф. — Слов'янськ, 2017. — С. 95.

13. Chuiko S. M. On a regularization method for solving matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation, 24–26 May 2017 : Abstracts of XVIII Intern. Conf. Reports. — Kyiv, 2017. — P. 24.

14. Чуйко О. Про регуляризацію матричної крайової задачі збуренням крайової умови / О. Чуйко, М. Дзюба // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування, 28–30 вересня 2016 р. : матеріали міжнар. конф. — Чернівці, 2016. — С. 99.

15. Chuiko S. M. On regularization method for solving linear matrix Sylvester equation / S. M. Chuiko, M. V. Dzuba // International Conference on Differential Equations, dedicated to the 110-th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20–24 September 2016 : Book of Abstracts. — Lviv, 2016. — P. 39.

16. Чуйко С. М. Регуляризация матричного уравнения Сильвестра / С. М. Чуйко, М. В. Дзюба // XI Міжнародна математична літня школа

«Алгебра, топологія, аналіз», 1–14 серпня 2016 р. : тези доп. — Одеса, 2016. — С. 142.

АНОТАЦІЯ

Дзюба М. В. Диференціально-алгебраїчні матричні крайові задачі. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний університет» Міністерства освіти і науки України; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2019.

Дисертація присвячена дослідженню проблеми знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків диференціально-алгебраїчних крайових задач у припущенні, що невідома являє собою матричну функцію. Матричний запис невідомої узагальнює вигляд, як матричного диференціально-алгебраїчного рівняння, так і крайової умови. При дослідженні диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєвою перешкодою для використання традиційних методів вивчення періодичних і нетерових крайових задач є той факт, що навіть задача Коші для диференціально-алгебраїчних систем, досліджена С. Кемпбелом, А.М. Самойленком, М.О. Перестюком, Ю.Е. Бояринцевим, В.Ф. Чистяковим та О.А. Бойчуком взагалі кажучи, не розв'язна для довільних початкових значень.

За допомогою апарату псевдообернених матриць в дисертації вдосконалено схему дослідження задач про існування та побудову розв'язків матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач. На прикладі матричних рівнянь Ляпунова, Сильвестра та Ріккаті продемонстровано ефективність отриманих умов розв'язності та схеми побудови розв'язків. Побудовано схему регуляризації матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра, яка суттєво відрізняється від класичного методу регуляризації Тихонова. На прикладі матричних періодичних та багатоточкових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь продемонстровано ефективність отриманих умов розв'язності та схеми побудови розв'язків.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчні крайові задачі, матричні рівняння, диференціально-алгебраїчні рівняння, псевдообернені матриці, узагальнений оператор Гріна.

АННОТАЦИЯ

Дзюба М.В. Дифференциально-алгебраические матричные краевые задачи. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Государственное высшее учебное заведение «Донбасский государственный педагогический университет» Министерства образования и науки Украины; Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина Министерства образования и науки Украины, Харьков, 2019.

Диссертация посвящена исследованию проблемы нахождения конструктивных условий существования и построению решений матричных дифференциально-алгебраических краевых задач. Традиционное изучение периодических и нетеровых краевых задач в критических случаях было связано с предположением, что неизвестная представляет собой вектор-функцию. В то же время исследование различных краевых задач, связанных с многочисленными приложениями в электронике, механике, теории устойчивости движения, биологии и радиотехнике, теории нелинейных колебаний, предполагает, необходимость исследования матричных дифференциально-алгебраических краевых задач. Таким образом, основным отличием данной диссертации является нахождение конструктивных условий существования и построение решений дифференциально-алгебраических краевых задач в предположении, что неизвестная представляет собой матричную функцию. Матричная запись неизвестной обобщает вид, как матричного дифференциально-алгебраических уравнения, так и краевого условия.

При исследовании дифференциально-алгебраических краевых задач существенным препятствием для использования традиционных методов изучения периодических и нетеровых краевых задач является тот факт, что даже задача Коши для дифференциально-алгебраических систем, исследованая С. Кемпбелом, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюком, Ю. Е. Бояринцевым, В. Ф. Чистяковым и А. А. Бойчуком вообще говоря, не разрешима для произвольных начальных значений.

С помощью аппарата псевдообратных (по Муру — Пенроузу) матриц и ортопроекторов в диссертации усовершенствована схема исследования задачи о нахождении условий существования и построения решений матричных дифференциально-алгебраических краевых задач. На примере матричных уравнений Ляпунова, Сильвестра и Риккати продемонстрирована эффективность полученных условий разрешимости и схемы построения решений.

Найдены достаточные условия регуляризации линейной нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием типа “interface conditions”. В отличие от монографий А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка и А. А. Бойчука исследована задача не об условиях разрешимости линейной нетеровой краевой задачи с фиксированным импульсным воздействием, а о нахождении импульсного воздействия, которое бы гарантировало разрешимость этой задачи для произвольной непрерывной функции, а также решения этой задачи.

Построен обобщенный оператор Грина и найден вид линейного импульсного возмущения регуляризованой линейной краевой задачи типа “interface conditions”. Построена схема регуляризации матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра. Предложенные схемы регуляризации линейной нетеровой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием типа “interface conditions”, а также матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра существенно отличаются от классического метода регуляризации Тихонова. Предложенная техника регуляризации линейной нетеровой краевой задачи при помощи импульсного воздействия перенесена на матричные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На примере матричных периодических и многоточечных краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений продемонстрирована эффективность полученных условий разрешимости и схемы построения решений.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические краевые задачи, матричные уравнения, дифференциально-алгебраические уравнения, псевдообратные матрицы, обобщенный оператор Грина.

ABSTRACT

Dziuba M.V. Differential-algebraic matrix boundary value problems. — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics: Speciality — 01.01.02 Differential Equations. — State High Educational Institution «Donbass

State Pedagogical University», the Ministry of Education and Science of Ukraine; V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis research is devoted to the study of the problem of finding constructive conditions for the existence and construction of solutions of matrix differential-algebraic boundary value problems in the critical case. The matrix record of an unknown generalizes the form of a matrix differential-algebraic equation, as well as a boundary condition.

In the study of differential algebraic boundary value problems, the fact that even the Cauchy problem for differential algebraic systems is a significant obstacle for the use of traditional methods of studying periodic and Noetherian boundary value problems is investigated by S. Campbell, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov and O.A. Boichuk, in general, does not solve for arbitrary initial values.

With the help of the device of pseudo-inverse matrices in the dissertation, the scheme of investigations of the problem of the existence and construction of solutions of matrix differential-algebraic boundary value problems was improved. An example of the Lyapunov, Sylvester and Riccati matrix equations demonstrates the efficiency of the solvability conditions and the solutions for the construction of solutions. The scheme of regularization of the Lyapunov and Sylvester matrix equations is constructed, which differs significantly from the classical Tikhonov regularization method. On the example of matrix periodic and multipoint problems for differential algebraic equations, the efficiency of the obtained solvability conditions and the scheme of construction of solutions are demonstrated.

Keywords: differential-algebraic boundary value problems, matrix equations, differential-algebraic equations, pseudo-inverse matrices, generalized Green operator.

.

Підписано до друку з авторського оригінал-макету 21.01.2020 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 0,9. Наклад 100 прим.

Видавництво Б.І. Маторіна
84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел.: +38 050 518 88 99. E-mail: matorinb@ukr.net
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.