

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**  
**Збірник**  
**розрахунково-графічних завдань**  
**для студентів спеціальності**  
**«Інформаційні технології проектування»**  
**денної форми навчання**

Затверджено  
на засіданні  
методичної ради  
Протокол № 1 від 20.10.2016

Краматорськ  
ДДМА  
2016

УДК 539. 3/6

Технічна механіка : збірник розрахунково-графічних завдань для студентів спеціальності «Інформаційні технології проектування» денної форми навчання / уклад. : Ю. С. Холодняк, В. М. Іскрицький. – Краматорськ : ДДМА, 2016. – 100 с.

Містяться умови, методичні вказівки і приклади розв'язання задач, що входять до розрахунково-графічних робіт з курсу, додаються необхідні довідкові матеріали.

Укладачі: Ю. С. Холодняк, доц.;  
В. М. Іскрицький, доц.

Відп. за випуск С. В. Подлесний, доц.

*Навчальне видання*

## **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

### **Збірник розрахунково-графічних завдань для студентів спеціальності «Інформаційні технології проектування» денної форми навчання**

Укладачі: ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович,  
ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович

За авторським редагуванням

Комп'ютерне верстання О. М. Болкова

Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк. 5,81. Обл.-вид. арк. 5,45.

Видавець і виготівник  
Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК №1633 від 24.12.2003

## ЗМІСТ

|  |     |
|--|-----|
| Вступ .....  | 4   |
| 1 Розрахунково-графічна робота «Теоретична механіка».....  | 5   |
| 1.1 Визначення кінематичних характеристик механічних передач .....   | 5   |
| 1.1.1 Методичні вказівки до задачі 1.1 .....   | 11  |
| 1.1.2 Приклад 1 розв'язання задачі 1.1 .....   | 14  |
| 1.1.3 Приклад 2 розв'язання задачі 1.1 .....   | 17  |
| 1.2 Кінематичний аналіз плоского механізму.....  | 19  |
| 1.2.1 Методичні вказівки до задачі 1.2 .....   | 20  |
| 1.2.2 Приклад 1 розв'язання задачі 1.2 .....   | 28  |
| 1.2.3 Приклад 2 розв'язання задачі 1.2 .....   | 31  |
| 1.3. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії і принципу<br>Даламбера до аналізу руху механічної системи..... | 35  |
| 1.3.1 Методичні вказівки до задачі 1.3 .....   | 39  |
| 1.3.2. Приклад розв'язання задачі 1.3.....   | 42  |
| 2 Розрахунково-графічна робота «Опір матеріалів».....  | 48  |
| 2.1 Розрахунок статично визначуваної стрижневої системи, яка<br>працює на розтягання-стискання .....                   | 48  |
| 2.1.1 Методичні вказівки до задачі 2.1 .....   | 48  |
| 2.1.2 Приклад розв'язання задачі 2.1 .....   | 52  |
| 2.2 Визначення головних моментів інерції складного перерізу.....   | 56  |
| 2.2.1 Методичні вказівки до задачі 2.2 .....   | 56  |
| 2.2.2 Приклад розв'язання задачі 2.2.....  | 60  |
| 2.3 Розрахунок статично визначуваної сталевий балки в умовах<br>плоского згину.....                                    | 63  |
| 2.3.1 Методичні вказівки до задачі 2.3 .....   | 67  |
| 2.3.2 Приклад розв'язання задачі 2.3 .....   | 69  |
| 2.4 Підбір перерізу стиснутої стійки .....   | 75  |
| 2.4.1 Методичні вказівки до задачі 2.4 .....   | 79  |
| 2.4.2 Приклад 1 розв'язання задачі 2.4 .....   | 80  |
| 2.4.3 Приклад 2 розв'язання задачі 2.4 .....   | 85  |
| Література.....  | 90  |
| Додаток А. Основні параметри катаних профілів.....   | 91  |
| Додаток Б. Формула крайніх ординат і особливості її застосування.....  | 97  |
| Додаток В. Основні параметри стиснутих стрижнів .....  | 99  |
| Додаток Г. Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного<br>завдання .....  | 100 |

## ВСТУП

Технічна механіка традиційно входить до складу дисциплін базової підготовки інженерних кадрів немеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Майбутні фахівці спеціальності "Інформаційні технології проектування", яких готує Донбаська державна машинобудівна академія, у своїй професійній діяльності будуть задіяні в розробці програмних продуктів для автоматизації кінематичних і енергосилових розрахунків різних машин і механізмів, що виготовляються підприємствами машинобудування. Тому вони повинні мати певні теоретичні уяви і навички щодо реалізації вказаних розрахунків.

У зв'язку з тим, що предмет технічної механіки в ДДМА не є всеохоплюючим предметом інженерної підготовки майбутніх фахівців з інформаційних технологій, до його складу включено лише найбільш важливі розділи теоретичної механіки і опору матеріалів, а традиційні питання основ конструювання механізмів і машин виділені в окремий курс.

Важливим елементом навчального процесу є виконання студентами розрахунково-графічних робіт (РГР), які дозволяють більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал курсу і отримати певні практичні навички.

У даному збірнику – дві РГР, до складу яких входять 7 завдань (задач) з основних розділів курсу.

Кожен студент виконує свій особистий варіант завдань, який встановлює викладач. Номер варіанта складається з чотирьох цифр. Перша та друга цифри вказують номери стовпчиків відповідно першої та другої таблиць вихідних даних до кожного із завдань, третя і четверта – номер відповідної схеми.

Оформлення завдань – згідно з діючими вимогами до текстових документів конструкторської документації.

# 1 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

## 1.1 Визначення кінематичних характеристик механічних передач

Механізм складається із ступінчастих коліс 1...3, які знаходяться в зачепленні або зв'язані ремінною передачею, зубчатої рейки 4 і вантажу 5, прив'язаного до кінця нитки, намотаної на циліндричний барабан одного із коліс (рис.1.1, табл.1.1 та 1.2). На ободах коліс розміщені точки *A*, *B* і *C*.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.1

| Радіуси коліс | Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|               | 0   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $r_1$ , см    | 2   | 3  | 2  | 4  | 2  | 3  | 2  | 3  | 2  | 3  |
| $R_1$ , см    | 4   | 6  | 4  | 10 | 6  | 6  | 4  | 9  | 4  | 6  |
| $r_2$ , см    | 6   | 8  | 5  | 6  | 3  | 4  | 3  | 4  | 4  | 4  |
| $R_2$ , см    | 8   | 10 | 10 | 12 | 9  | 8  | 6  | 10 | 8  | 12 |
| $r_3$ , см    | 12  | 14 | 12 | 14 | 12 | 10 | 14 | 12 | 8  | 14 |
| $R_3$ , см    | 14  | 18 | 16 | 20 | 16 | 12 | 20 | 18 | 16 | 18 |

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до задачі 1.1

| Друга цифра номера варіанта | Задано                    | Знайти                             |                               |
|-----------------------------|---------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
|                             | Рівняння руху             | Швидкості                          | Прискорення                   |
| 0                           | $S_4 = 8t + 40t^2$        | $V_A, V_5$<br>$\omega_1, \omega_2$ | $\varepsilon_1, a_4$<br>$a_B$ |
| 1                           | $S_5 = 7t + 90t^2$        | $V_C, V_4$<br>$\omega_1, \omega_2$ | $\varepsilon_2, a_5$<br>$a_B$ |
| 2                           | $\varphi_1 = 0,5t + t^2$  | $V_C, V_5$<br>$\omega_2, \omega_3$ | $\varepsilon_1, a_4$<br>$a_B$ |
| 3                           | $\varphi_2 = t + 1,5t^2$  | $V_A, V_4$<br>$\omega_2, \omega_3$ | $\varepsilon_1, a_5$<br>$a_C$ |
| 4                           | $S_4 = 10t + 100t^2$      | $V_B, V_5$<br>$\omega_1, \omega_2$ | $\varepsilon_2, a_5$<br>$a_A$ |
| 5                           | $S_5 = 5 + 40t^2$         | $V_C, V_4$<br>$\omega_1, \omega_2$ | $\varepsilon_2, a_4$<br>$a_B$ |
| 6                           | $\varphi_1 = t + 0,5t^2$  | $V_B, V_4$<br>$\omega_2, \omega_3$ | $\varepsilon_2, a_4$<br>$a_C$ |
| 7                           | $\varphi_2 = 2t + 0,5t^2$ | $V_A, V_4$<br>$\omega_1, \omega_3$ | $\varepsilon_1, a_5$<br>$a_B$ |
| 8                           | $S_4 = 5t + 60t^2$        | $V_A, V_5$<br>$\omega_1, \omega_2$ | $\varepsilon_1, a_4$<br>$a_C$ |
| 9                           | $S_5 = 18t + 70t^2$       | $V_B, V_4$<br>$\omega_1, \omega_2$ | $\varepsilon_2, a_5$<br>$a_C$ |

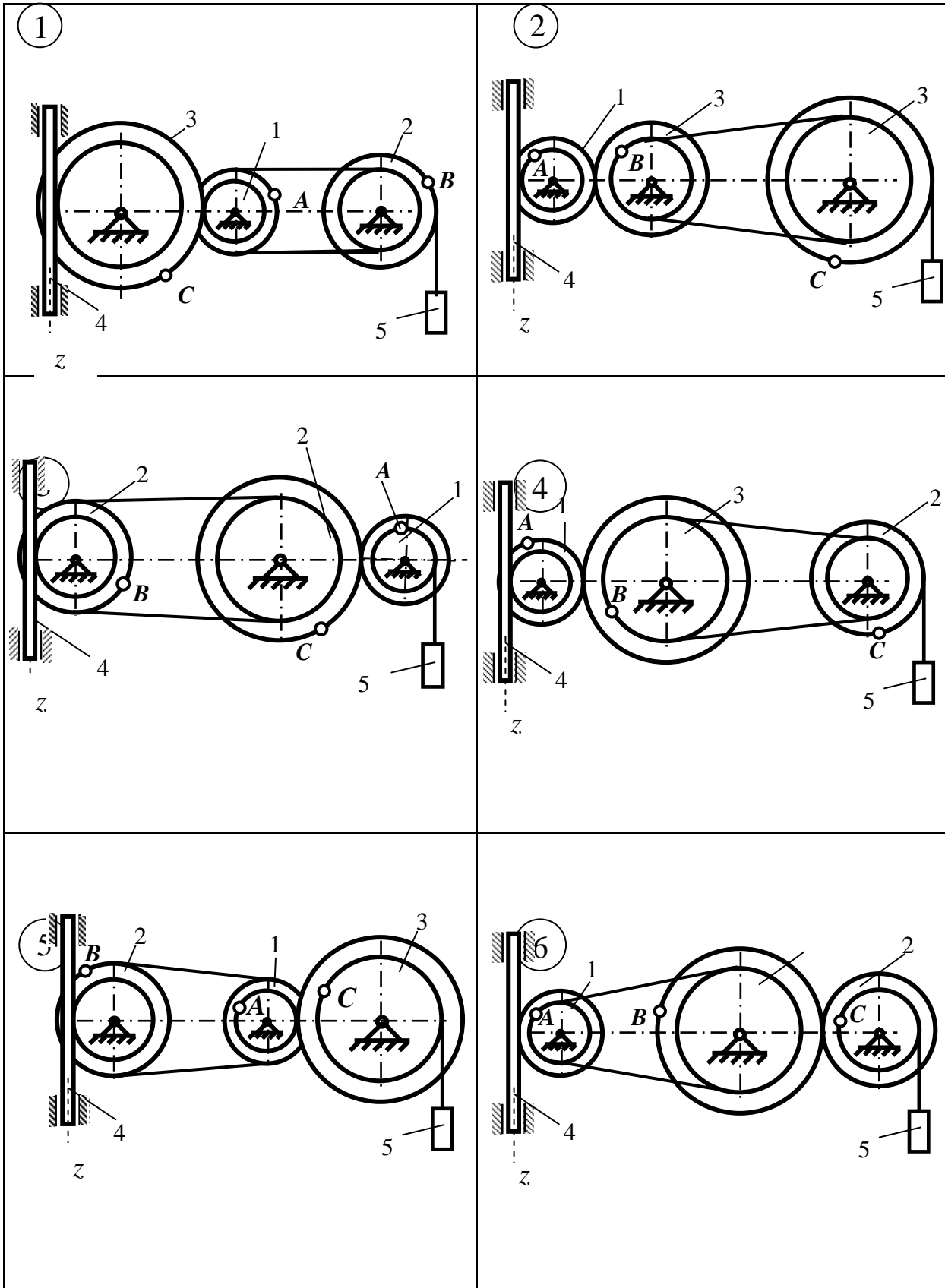


Рисунок 1.1 – Схеми до варіантів задачі 1.1

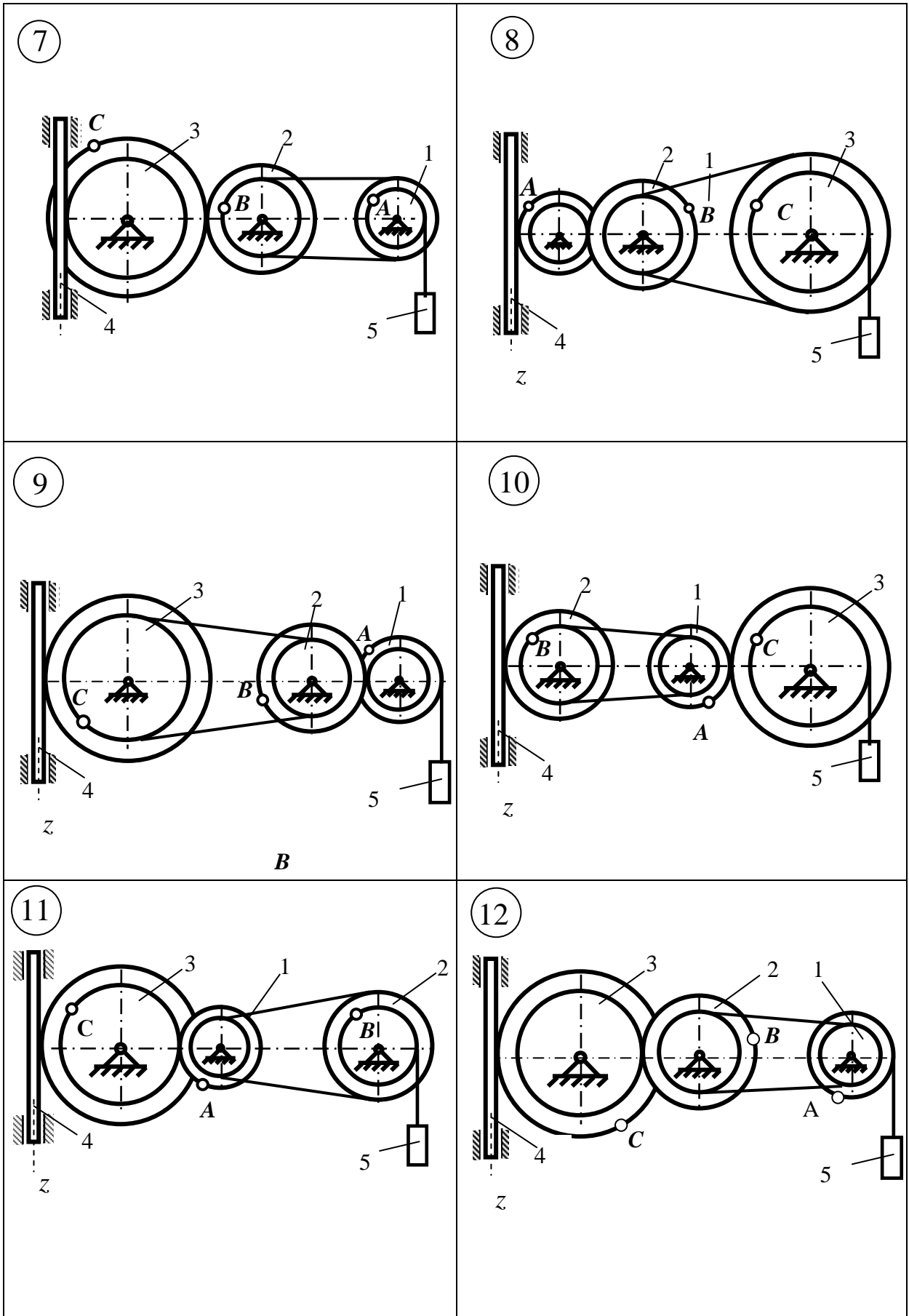


Рисунок 1.1, аркуш 2

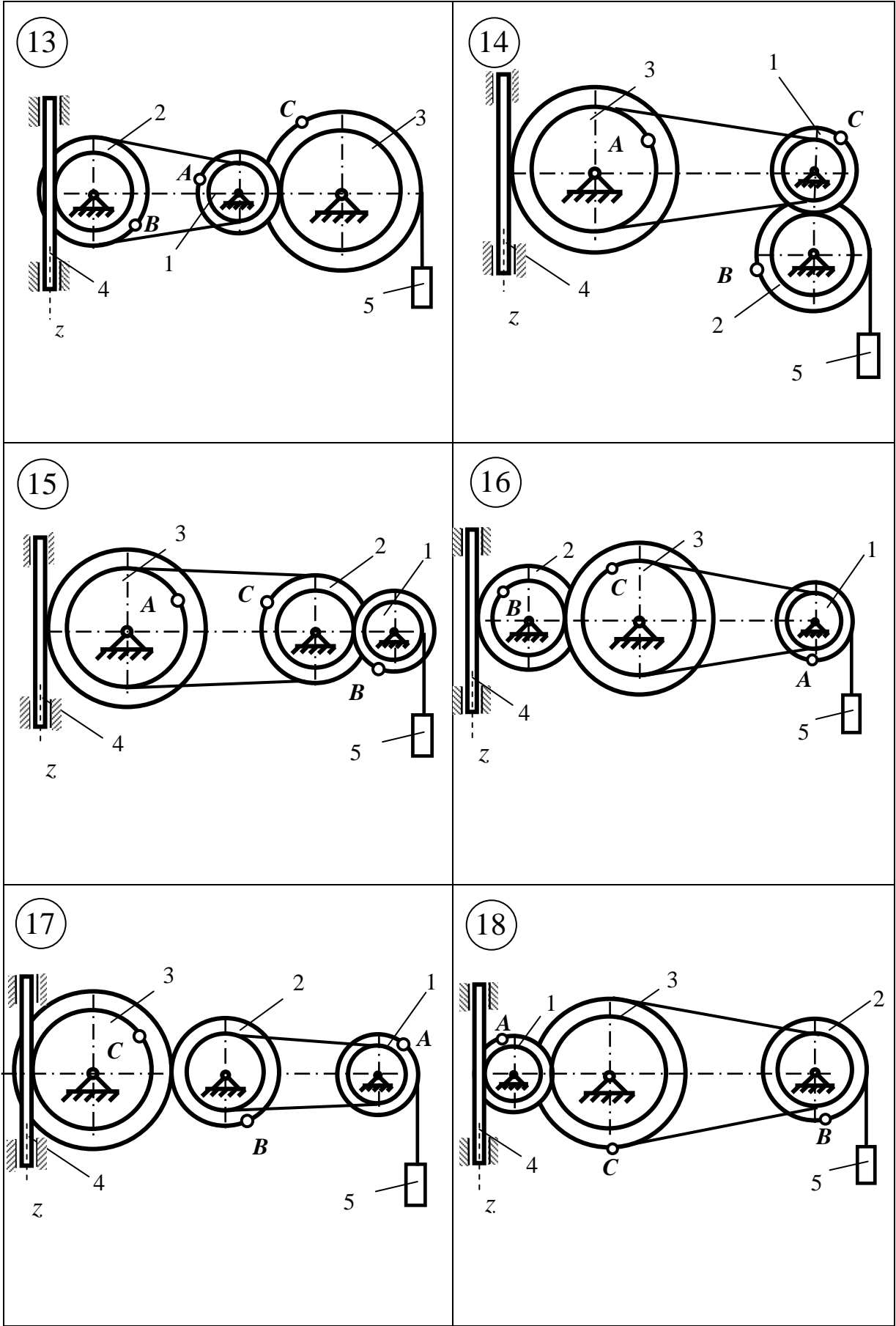


Рисунок 1.1, аркуш 3



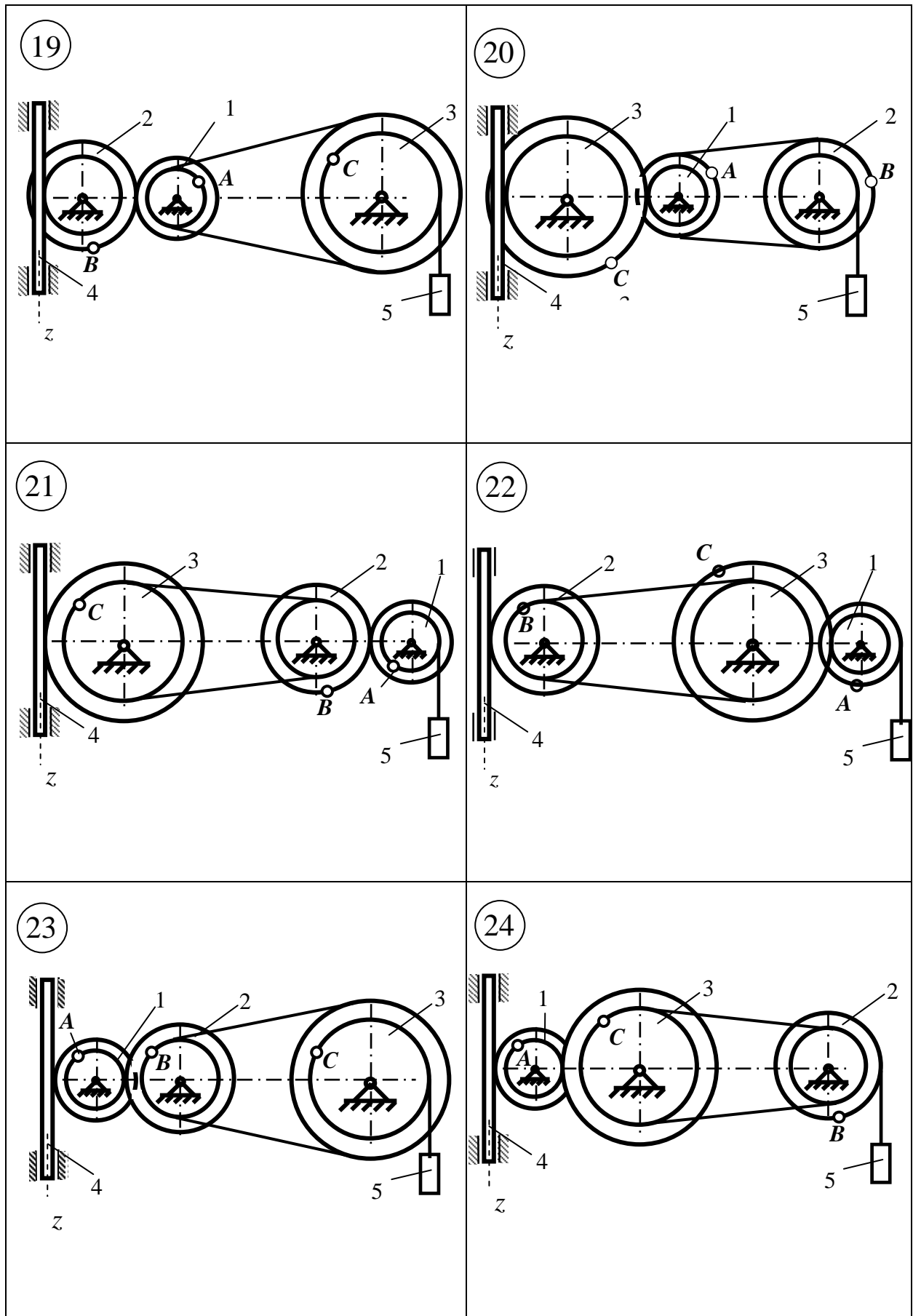


Рисунок 1.1, аркуш 4

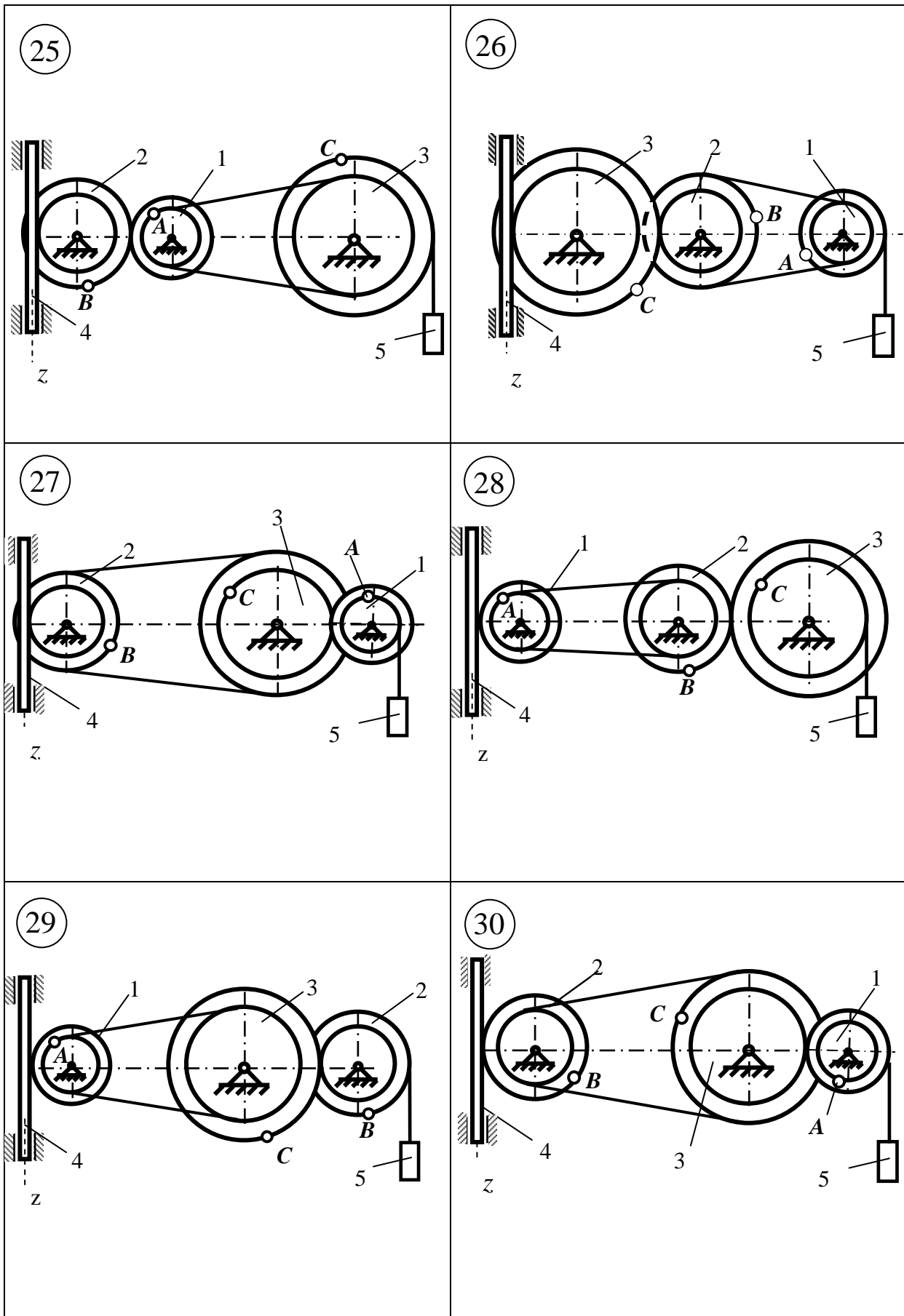


Рисунок 1.1, аркуш 5

В таблиці 1.1 приведені розміри ступінчастих коліс механізму, а в стовпці «Задано» таблиці 1.2 означені рівняння руху ведучого тіла механізму, де  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  – закон обертання відповідних коліс,  $S_4(t)$ ,  $S_5(t)$  – закон поступального руху відповідно зубчатої рейки і вантажу (всюди  $\varphi$  виражене в радіанах,  $S$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах). Додатні спрямування для  $\varphi$  – проти руху стрілки годинника, для  $S_4$  та  $S_5$  – вниз.

Визначити в момент часу  $t_1=2c$  вказані в стовбці «Знайти» таблиці 1.2 швидкості ( $V$  – лінійні,  $\omega$  – кутові) і прискорення ( $a$  – лінійні,  $\varepsilon$  – кутові) зазначених точок або тіл, зобразити їх напрями.

### 1.1.1 Методичні вказівки до задачі 1.1

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла:

- 1) поступальний;
- 2) обертальний (навколо нерухомої осі);
- 3) плоско-паралельний (або плоский);
- 4) сферичний (обертальний рух навколо нерухомої точки);
- 5) рух вільного твердого тіла.

Поступальний і обертальний рухи навколо нерухомої осі належать до простих рухів. Інші види руху твердого тіла можна звести до одного із цих рухів або до їх сукупності.

*Поступальним* називається такий рух твердого тіла, при якому зв'язана з тілом довільна пряма рухається, залишаючись паралельною своєму початковому положенню.

При *поступальному* русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії і в кожний момент часу мають рівні між собою вектори швидкостей і вектори прискорень.

Таким чином поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла. Тому рівняння поступального руху тіла

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); z_A = f_3(t) \quad (1.1)$$

має вигляд рівняння руху однієї з його точок. а кінематичні характеристики поступального руху тіла визначаються за формулами кінематики точки.

*Обертальним* називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки залишаються нерухомими під час руху тіла. Пряма, проведена через ці дві нерухомі точки, називається *віссю обертання*.

При обертальному русі положення твердого тіла визначається кутом повороту  $\varphi$ , а залежність кута повороту від часу

$$\varphi = \varphi(t) \quad (1.2)$$

є рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Вимірюється кут повороту  $\varphi$  в радіанах.

Кінематичними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ .

Кутова швидкість тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.3)$$

В міжнародній системі одиниць *СІ* кутова швидкість має розмірність *рад/с* або  $s^{-1}$ . У техніці кутову швидкість часто визначають кількістю  $n$  обертів за хвилину. Зв'язок між цими одиницями вимірювання задається формулою

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній від кутової швидкості за часом або другій похідній від кута повороту тіла за часом, тобто

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.4)$$

При обертальному русі тіла кожна його точка має швидкість

$$V = \omega R, \quad (1.5)$$

і прискорення, яке складається з тангенціальної складової

$$a_{\tau} = \varepsilon R, \quad (1.6)$$

та нормальної складової прискорення

$$a_n = \omega^2 R, \quad (1.7)$$

де  $R$  – радіус обертання.

Вектори швидкості  $\vec{V}$  і тангенціальне прискорення  $\vec{a}_{\tau}$  напрямлені за дотичною до кола, яке описує дана точка тіла, або перпендикулярно до радіусу  $R$ , а вектор нормального прискорення  $\vec{a}_n$  напрямлений за радіусом цього кола до його центру (рис. 1.2).

Якщо обертальний рух тіла прискорений, то вектори  $\vec{V}$  і  $\vec{a}_{\tau}$  мають однаковий напрям, якщо рух сповільнений – то їх напрями протилежні.

Передавання обертального руху від одного тіла до іншого здійснюється при безпосередньому зачепленні коліс за допомогою зубчастих та фрикційних передач (рис.1.3), а при передачі обертання на певну відстань – за допомогою ремінних (пасових) та ланцюгових передач (рис. 1.4).

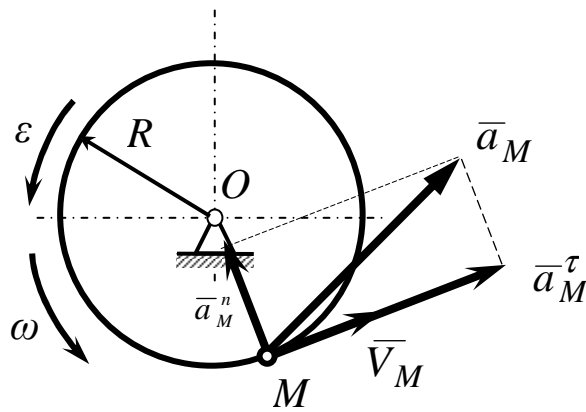


Рисунок 1.2 – Швидкості та прискорення точок тіла при обертальному русі

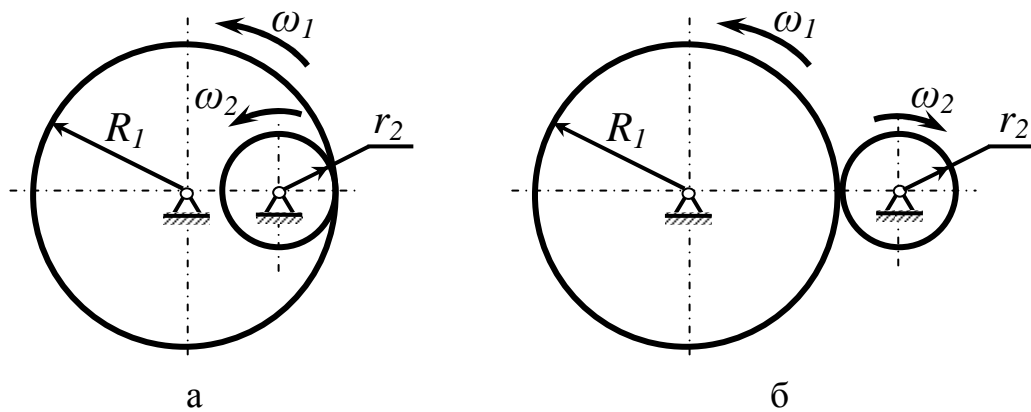


Рисунок 1.3 – Схеми зубчастих або фрикційних передач

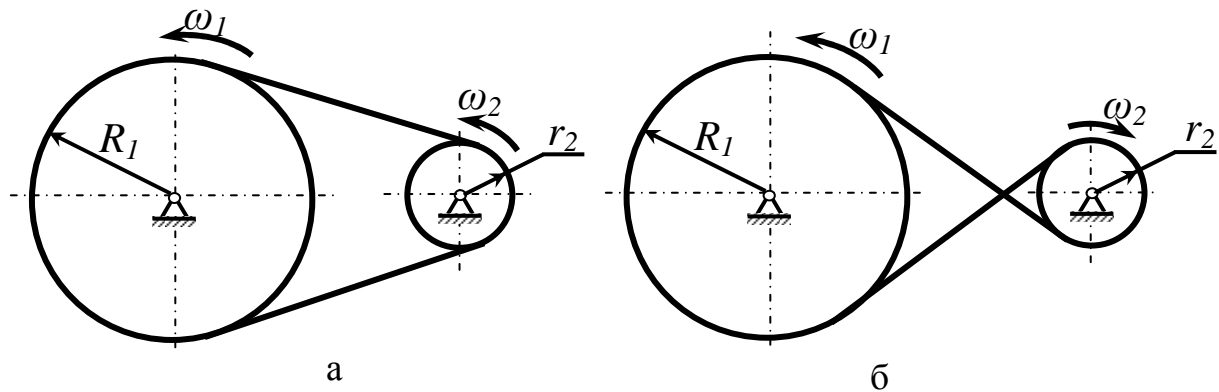


Рисунок 1.4 – Схеми ремінних або ланцюгових передач

При внутрішньому зубчастому зачепленні (див.рис.1.3, а) і в прямій пасовій передачі (див.рис.1.4, а) напрями обертань обох коліс збігаються. При зовнішньому зубчастому зачепленні (див.рис.1.3, б) і перехресній пасовій передачі (див.рис.1.4, б) напрями обертань коліс протилежні.

Величини швидкостей точок на ободах зубчастих коліс, які знаходяться в зачепленні, однакові. Однакові за модулем і швидкості на ободах шківів, з'єднаних пасовою передачею, якщо немає ковзання паса по шківу.

Тому кутові швидкості коліс обернено пропорційні радіусам  $r_i$  відповідних коліс (або діаметрам  $d_i$  коліс, або кількості зубців  $z_i$ ):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (1.8)$$

### 1.1.2 Приклад 1 розв'язання задачі 1.1

Механізм складається із ступінчастих коліс 1...3, що перебувають у зачепленні або зв'язані пасовою передачею, зубчастої рейки 4 і вантажу 5, прив'язаного до кінця нитки, намотаної на колесо 3 (рис. 1.5). Радіуси ступенів коліс відповідно дорівнюють:  $R_1 = 4$  см;  $r_1 = 2$  см;  $R_2 = 8$  см;  $r_2 = 6$  см;  $R_3 = 16$  см;  $r_3 = 12$  см. На ободах коліс розташовані точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ .

Вантаж рухається за законом  $S_5 = 2t^2 - 3t$ . Позитивний напрямок для  $S_5$  – донизу. У завданні  $\varphi$  виражається в радіанах,  $S$  – у сантиметрах,  $t$  – у секундах.

Визначити в момент часу  $t_1 = 2$  с  $V_A$ ,  $V_C$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $a_B$ ,  $a_4$ .

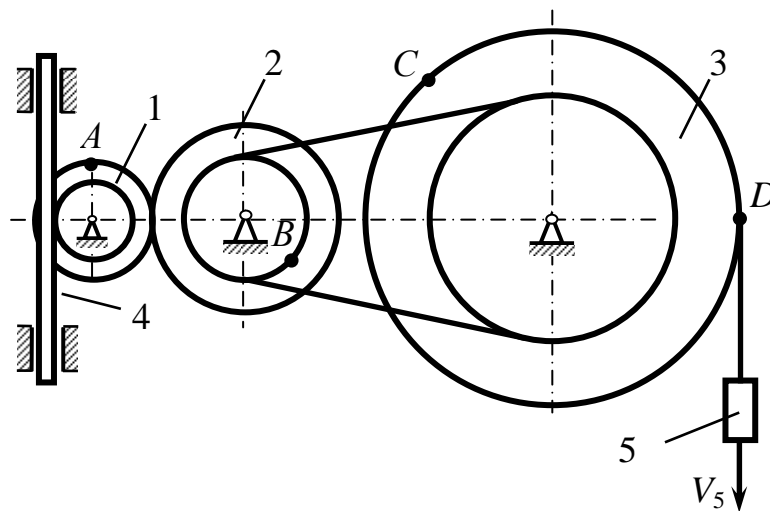


Рисунок 1.5-- Схема до прикладу 1 задачі 1.1

#### Розв'язання:

1. Визначення швидкостей.

Знайдемо швидкість вантажу 5:  $V_5 = \frac{dS_5}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 3t) = 4t - 3$ .

Вантаж 5 пов'язаний з колесом 3 у точці  $D$ , отже  $V_D = V_5 = 4t - 3$ .

Використаємо залежність  $V = \omega R$  між кутовою швидкістю тіла, що обертається, і лінійною швидкістю точки цього тіла і знайдемо кутову швидкість  $\omega_3$ :

$$\omega_3 = \frac{V_D}{R_3} = \frac{4t - 3}{16}.$$

Обертання колеса 3 відбувається за ходом годинникової стрілки.

Колесо 3 знаходиться в зачепленні з колесом 2 і точка контакту цих коліс знаходиться на відстані  $r_3$  та  $r_2$  від осей їх обертання, тому кутові швидкості цих коліс зв'язані залежністю  $\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2}$ .

Звідси знайдемо кутову швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 r_3}{r_2} = \frac{(4t-3) \cdot 12}{16 \cdot 6} = \frac{4t-3}{8}.$$

За аналогічною залежністю  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$  знайдемо кутову швидкість колеса 1:

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 R_2}{R_1} = \frac{(4t-3) \cdot 8}{8 \cdot 4} = \frac{4t-3}{4}.$$

Одержані вирази для обчислення кутових швидкостей коліс дозволяє знайти швидкості точок, розміщених на ободах цих коліс.

Так, швидкість рейки 4 співпадає зі швидкістю точки контакту рейки з ободом колеса 1, тобто:

$$V_4 = \omega_1 r_1 = \frac{(4t-3)}{4} \cdot 2 = \frac{(4t-3)}{2}.$$

Швидкість точки  $C$  співпадає із швидкістю точки  $D$  оскільки вони знаходяться на одному колесі на однаковій відстані від осі обертання:

$$V_C = V_D = 4t - 3.$$

Швидкість точки  $A$  визначається за такою ж формулою:

$$V_A = \omega_1 r_1 = V_4 = \frac{(4t-3)}{2}.$$

У момент часу  $t_1 = 2$  с швидкості цих точок дорівнюють:

$$V_A = \frac{(4t-3)}{2} = \frac{(4 \cdot 2 - 3)}{2} = 2,5 \text{ м/с}; \quad V_C = 4 \cdot 2 - 3 = 5 \text{ м/с};$$
$$\omega_2 = \frac{4 \cdot 2 - 3}{8} = \frac{5}{8} = 0,625 \text{ с}^{-1}.$$

Вектори швидкостей всіх тіл і точок проставимо на рисунку 1.6.

2. Визначення прискорень.

Кутові прискорення коліс визначаються, як похідні від відповідних кутових швидкостей. Тоді кутове прискорення колеса 3:

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3, \quad \text{або} \quad \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{4t-3}{16} \right) = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ с}^{-2}.$$

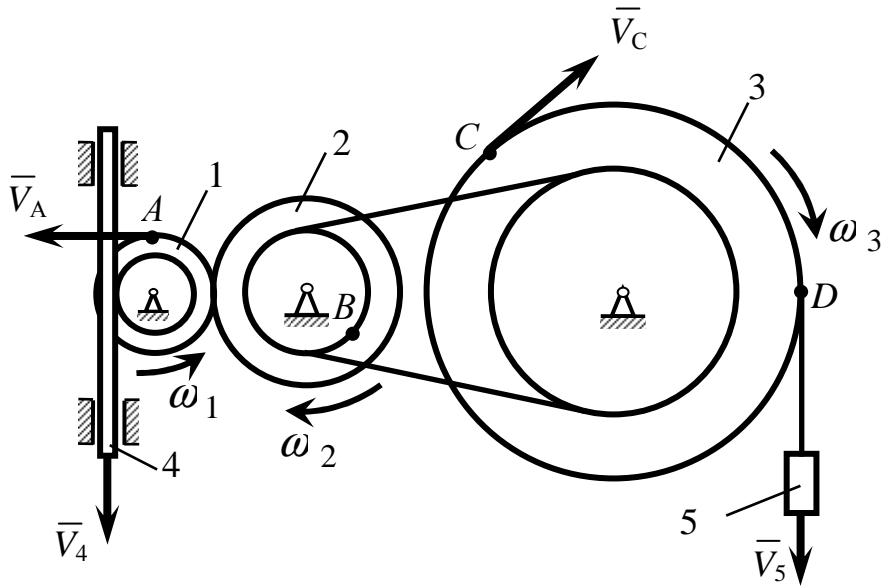


Рисунок 1.6 – Означення швидкостей тіл і точок заданого механізму

Відповідно визначимо кутове прискорення колеса 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{(4t-3)}{8} \right) = 0,5 \text{ с}^{-2}.$$

Прискорення будь-якої точки тіла при його обертанні має дві складові  $\bar{a}_\tau$  й  $\bar{a}_n$ . Дотичне прискорення  $\bar{a}_\tau$  чисельно дорівнює  $a_\tau = \varepsilon \cdot R$  і спрямоване по дотичній до кола, а нормальне прискорення  $\bar{a}_n$  чисельно дорівнює  $a_n = \omega^2 R$  і спрямовано по нормалі (по радіусу) убік осі обертання.

Таким чином, повне прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot R)^2 + (\omega^2 \cdot R)^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Визначимо дотичне прискорення точки B:

$$a_B^\tau = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо нормальне прискорення точки B.

$$a_B^n = \omega_2^2 \cdot r_2 = 0,625^2 \cdot 6 = 2,34 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки B:

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{3^2 + 2,34^2} = 3,8 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення рейки 4 можна визначити як похідну від швидкості  $V_4$  рейки 4:

$$a_4 = \frac{dV_4}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{(4t-3)}{2} \right) = 2 \text{ м/с}^2.$$



Вектор  $\bar{a}_4$  спрямований по швидкості  $V_4$  рейки 4, тобто донизу.  
У момент часу  $t_1 = 2$  с прискорення дорівнюють:

$$\varepsilon_3 = 0,25 \text{ с}^{-2}; a_B = 3,8 \text{ м/с}^2; a_4 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Вектори знайдених прискорень зображені на рисунку 1.7.

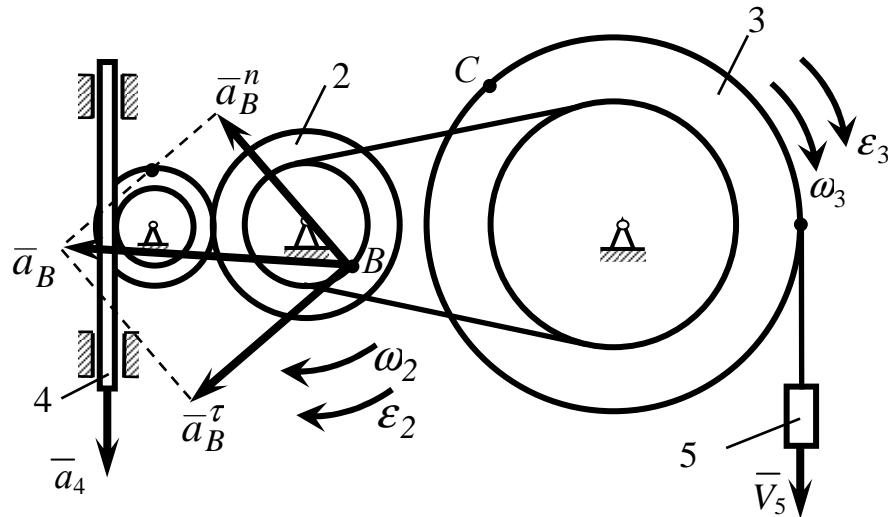


Рисунок 1.7 – Означення прискорень тіл і точок заданого механізму

### 1.1.3 Приклад 2 розв'язання задачі 1.1

Механізм лебідки, показаний на рис. 1.8, переміщує вантаж 4 завдяки обертанню шківів 1 радіусом  $r_1 = 0,04$  м, який за допомогою пасової передачі зв'язаний зі шківом 2, радіус якого  $r_2 = 0,08$  м. З цим шківом жорстко зв'язана шестерня 2, яка зчеплена з шестернею 3, насадженою на вал барабана радіусом  $r_3 = 0,1$  м. Визначити у момент часу  $t_1 = 0,4$  с швидкість і прискорення точки  $M$  барабана, кутову швидкість та кутове прискорення шківів 2, а також швидкість та прискорення вантажу 4, якщо шків 1 обертається за законом  $\varphi_1 = 25t^2 - 5t$ , а кількість зубців шестерень  $z_2 = 24$  і  $z_3 = 30$ .

#### Розв'язання:

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення шківів 1.

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 50t - 5, \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 50 \text{ с}^{-2} = \text{const.}$$

Оскільки ремінь, що з'єднує шківів 1 і 2 нерозтяжний, то швидкість точки  $K$  шківів 2 дорівнює швидкості точки, яка лежить на ободі шківів 1, тобто  $V_K = \omega_2 r_2 = \omega_1 r_1$ , звідки визначимо кутову швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{(50t - 5) \cdot 0,04}{0,08} = 25t - 2,5.$$

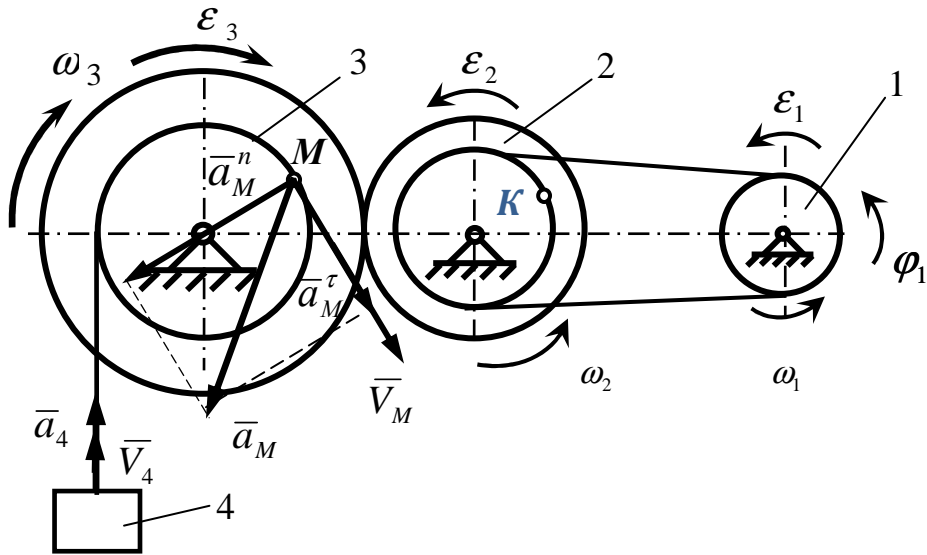


Рисунок 1.8 – Розрахункова схема механізму до прикладу 2 задачі 1.1

У момент часу  $t_1 = 0,4$  с маємо  $\omega_2 = 25 \cdot 0,4 - 2,5 = 7,5 \text{ c}^{-1}$ .

Кутове прискорення колеса 2

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 25 \text{ c}^{-2} = \text{const.}$$

Швидкість точки дотику зубчатих коліс 2 і 3

$$V_{2,3} = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$$

звідки

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{z_3}{z_2}.$$

Отже кутові швидкості обертання обернено пропорційні радіусам або кількості зубців:

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{z_2}{z_3} = (25t - 2,5) \frac{24}{30} = 20t - 2.$$

У момент часу  $t_1 = 0,4$  с маємо  $\omega_3 = 20 \cdot 0,4 - 2 = 6 \text{ c}^{-1}$ .

Аналогічна залежність між кутовими прискореннями:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{z_2}{z_3} = 25 \cdot \frac{24}{30} = 20 \text{ c}^{-2} = \text{const.}$$

У момент часу  $t_1 = 0,4$  с маємо  $\omega_3 = 20 \cdot 0,4 - 2 = 6 \text{ c}^{-1}$ .

Визначимо модулі швидкості  $V_M$ , дотичного  $a_M^\tau$ , нормального  $a_M^n$  і повного  $a_M$  прискорення точки  $M$ .

У момент часу  $t_1 = 0,4$  с маємо:

$$V_M = \omega_3 \cdot r_3 = 6 \cdot 0,1 = 0,6 \text{ м/с}$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ м/с}^2, \quad a_M^n = \omega_3^2 r_3 = 6^2 \cdot 0,1 = 3,6 \text{ м/с}^2$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{2^2 + 3,6^2} = 4,12 \text{ м/с}^2.$$

Так як вантаж 4 прив'язаний до нитки, що намотується на обід шківів 3, на якому розміщена точка  $M$ , то швидкість вантажу

$$V_4 = V_M = 0,6 \text{ м/с}$$

Прискорення вантажу співпадає з дотичним прискоренням точки  $M$ , тобто

$$a_4 = a_M^\tau = 2 \text{ м/с}^2,$$

## 1.2 Кінематичний аналіз плоского механізму

Плоский механізм, зображений на рис.1.9, складається із трьох стрижнів, або двох стрижнів і повзуна, з'єднаних між собою та з нерухомими опорами за допомогою шарнірів. Довжини стрижнів дорівнюють відповідно:  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 0,6$  м. Точка  $C$  стрижня  $AB$  знаходиться в його середині, тобто  $AC = CB = 0,6$  м. Положення механізму визначається кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ . Значення цих кутів й інших заданих величин вказані в таблицях 1.3 і 1.4.

Таблиця 1.3 – Вихідні дані до задачі 1.2

| Задані величини кутів нахилу ланок механізмів | Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|   | 0   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |      |
| Для схем<br>1...5,<br>11...15,<br>21...25     | $\alpha$ .  | 0°   | 90°  | 30°  | 60°  | 30°  | 90°  | 90°  | 0°   | 60°  | 30°  |
|   | $\beta$   | 60°  | 120° | 60°  | 150° | 30°  | 120° | 150° | 60°  | 150° | 120° |
|   | $\gamma$ .  | 30°  | 150° | 30°  | 150° | 60°  | 120° | 120° | 60°  | 120° | 150° |
|   | $\theta$  | 120° | 30°  | 120° | 30°  | 150° | 60°  | 30°  | 120° | 30°  | 60°  |
| Для схем<br>6...10,<br>16...20,<br>26...30    | $\alpha$ .  | 120° | 0°   | 60°  | 0°   | 30°  | 90°  | 0°   | 30°  | 90°  | 60°  |
|   | $\beta$   | 30°  | 60°  | 150° | 150° | 120° | 120° | 30°  | 60°  | 120° | 60°  |
|   | $\gamma$ .  | 30°  | 90°  | 30°  | 30°  | 120° | 90°  | 90°  | 30°  | 120° | 60°  |
|   | $\varphi$   | 60°  | 30°  | 0°   | 120° | 30°  | 60°  | 60°  | 90°  | 0°   | 30°  |

**Примітка:** Якщо при побудові механізмів за схемами 6,...10, 16,..., 20, 26,..., 30 станеться так, що напрямна лінія  $Vb$  буде перпендикулярною до стрижня  $AB$ , то замість вказаного в таблиці 1.3 кута  $\varphi$  слід прийняти  $\varphi' = (\varphi + 30^\circ)$ .

Таблиця 1.4 – Вихідні дані до задачі 1.2

| Величина                          |                                      |                                | Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта |        |        |        |        |        |        |        |        |   |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
|                                   |                                      |                                | 0   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9 |
| Задані кінематичні характеристики | Для схем 1...5, 11...15, 21...25     | $\omega_1, \text{с}^{-1}$      | 6   | -      | 5      | -      | 4      | -      | 3      | -      | 2      | - |
|                                   |                                      | $\omega_3, \text{с}^{-1}$      | -   | 4      | -      | 5      | -      | 6      | -      | 2      | -      | 8 |
|                                   | Для схем 6...10, 16...20, 26...30    | $\omega_1, \text{с}^{-1}$      | 2   | -      | 3      | -      | 4      | -      | 5      | -      | 6      | - |
|                                   |                                      | $\varepsilon_1, \text{с}^{-2}$ | 4   | -      | 5      | -      | 6      | -      | 8      | -      | 10     | - |
|                                   |                                      | $V_B, \text{м/с}$              | -   | 4      | -      | 6      | -      | 8      | -      | 2      | -      | 5 |
|                                   |                                      | $a_B, \text{м/с}^2$            | -   | 6      | -      | 8      | -      | 10     | -      | 5      | -      | 4 |
| Невідомі (треба знайти)           | $V$ точок, м/с                       | $B, C$                         | $A, C$  | $B, C$ | $A, C$ | $B, C$ | $A, C$ | $B, C$ | $A, C$ | $B, C$ | $A, C$ |   |
|                                   | $\omega$ ланки, $\text{с}^{-1}$      | $AB$                           | $AB$  | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   |   |
|                                   | $a$ точок, $\text{м/с}^2$            | $B$                            | $A$   | $B$    | $A$    | $B$    | $A$    | $B$    | $A$    | $B$    | $A$    |   |
|                                   | $\varepsilon$ ланки, $\text{с}^{-2}$ | $AB$                           | $AB$  | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   | $AB$   |   |

Знайти швидкості та прискорення точок та кутові швидкості й кутові прискорення ланок, які вказані в таблиці 1.4, зобразити їх напрями.

Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення механізму повинні відкладатись відповідні кути. Побудову механізму слід починати із стрижня, напрям якого визначається кутом  $\alpha$ .

Задані кутову швидкість і кутове прискорення вважати напрямленими проти ходу годинникової стрілки, а задані швидкість  $V_B$  і прискорення  $a_B$  - від точки  $B$  до  $b$ .

### 1.2.1 Методичні вказівки до задачі 1.2

*Плоско-паралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних одній нерухомій площині.*

Плоско-паралельний (плоский) рух твердого тіла може бути зведений до руху проекції (плоскої фігури) цього тіла на площину, паралельну площинам, в яких рухаються його точки.

Положення плоскої фігури ( $S$ ) в площині  $Oxy$  (рис. 1.10) визначається координатами  $x_A, y_A$  деякої точки  $A$ , яку називають полюсом, і кутом  $\varphi$  нахилу до додатного напрямку осі  $Ox$  відрізка  $AB$ , зв'язаного з плоскою фігурою  $S$ .

Рух плоскої фігури в її площині складається з поступального руху разом з полюсом (це може бути будь-яка точка плоскої фігури) і обертального руху навколо полюса.

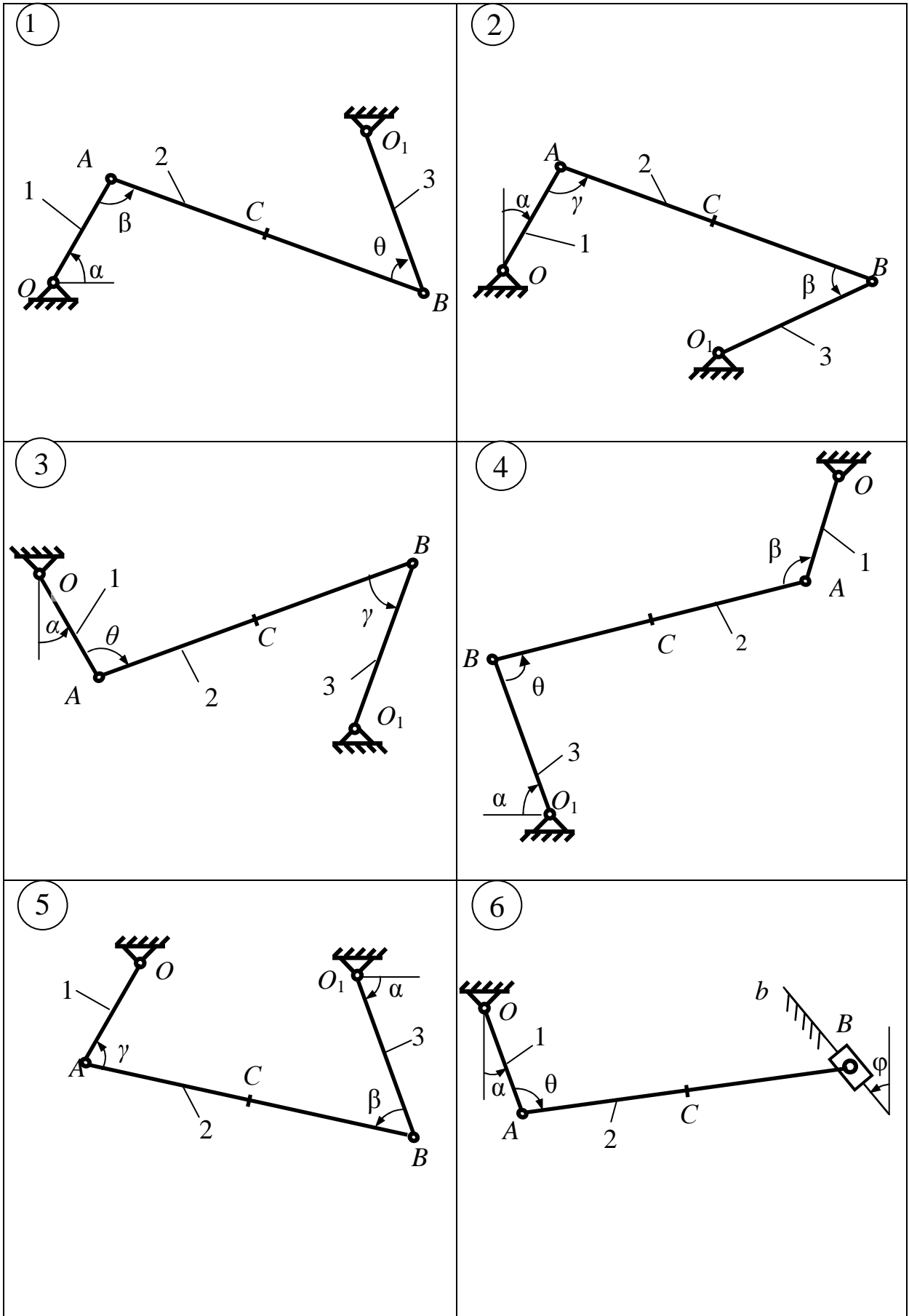


Рисунок 1.9 – Схеми до варіантів задачі 1.2

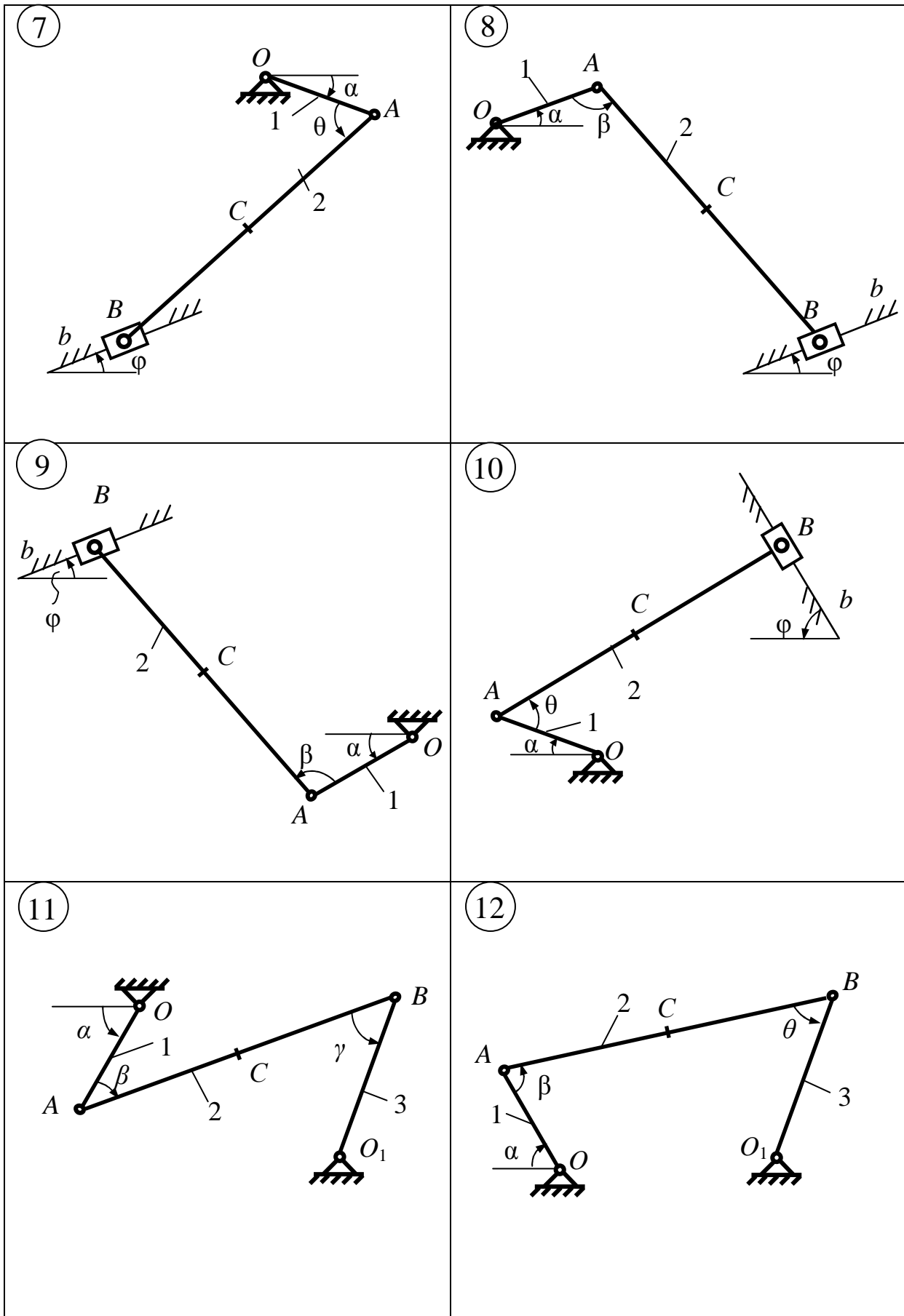


Рисунок 1.9, аркуш 2

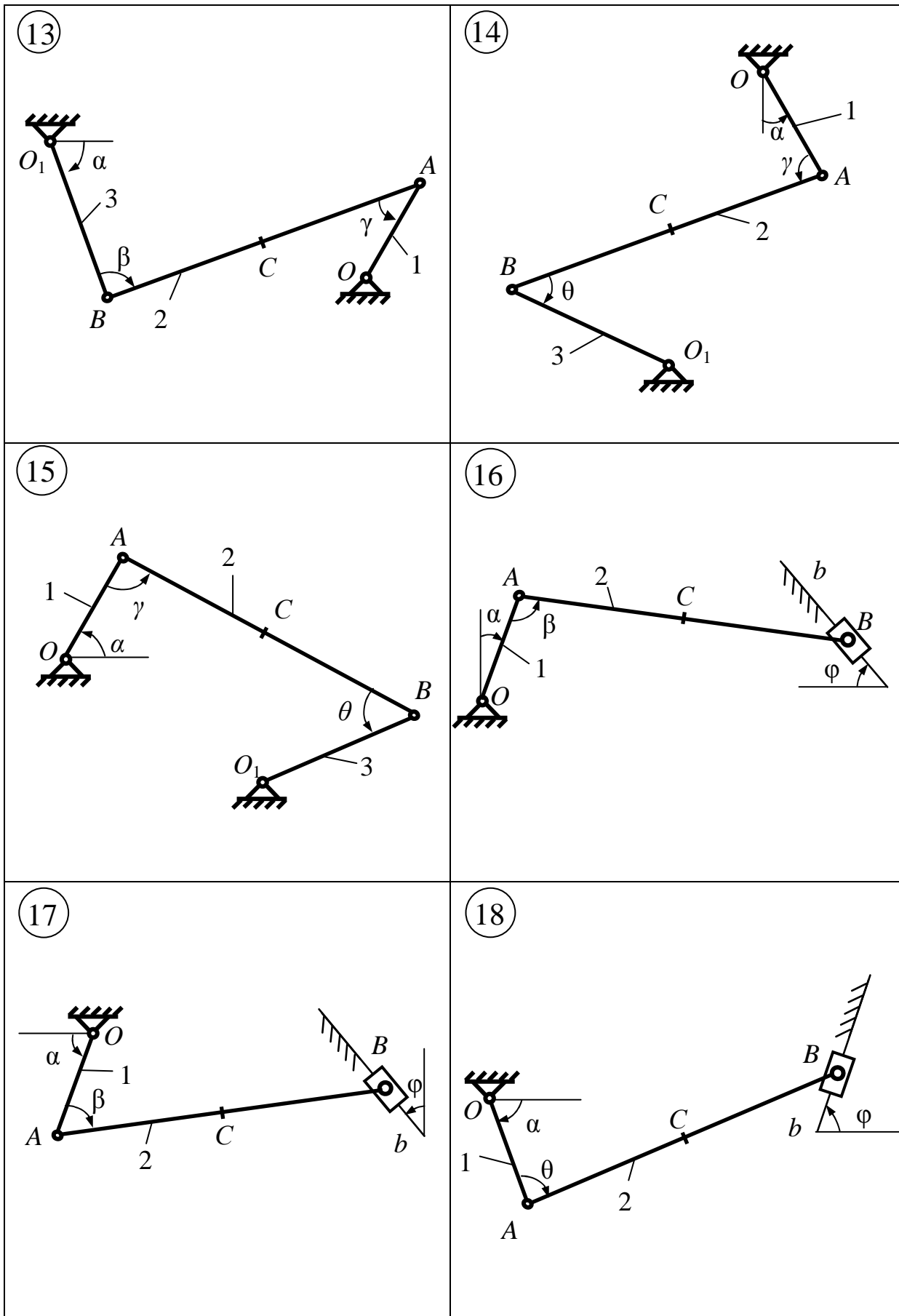


Рисунок 1.9, аркуш 3

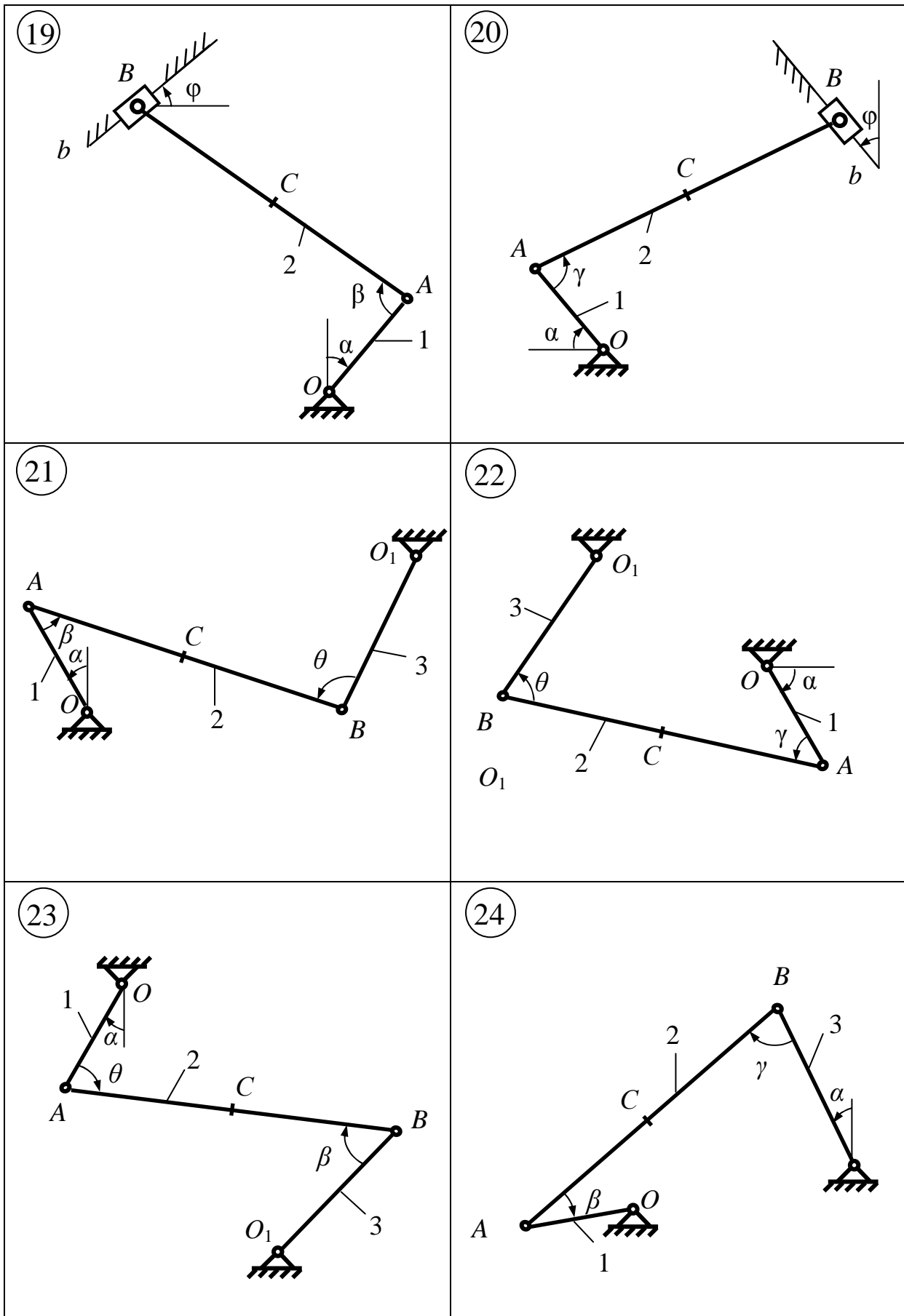


Рисунок 1.9, аркуш 4



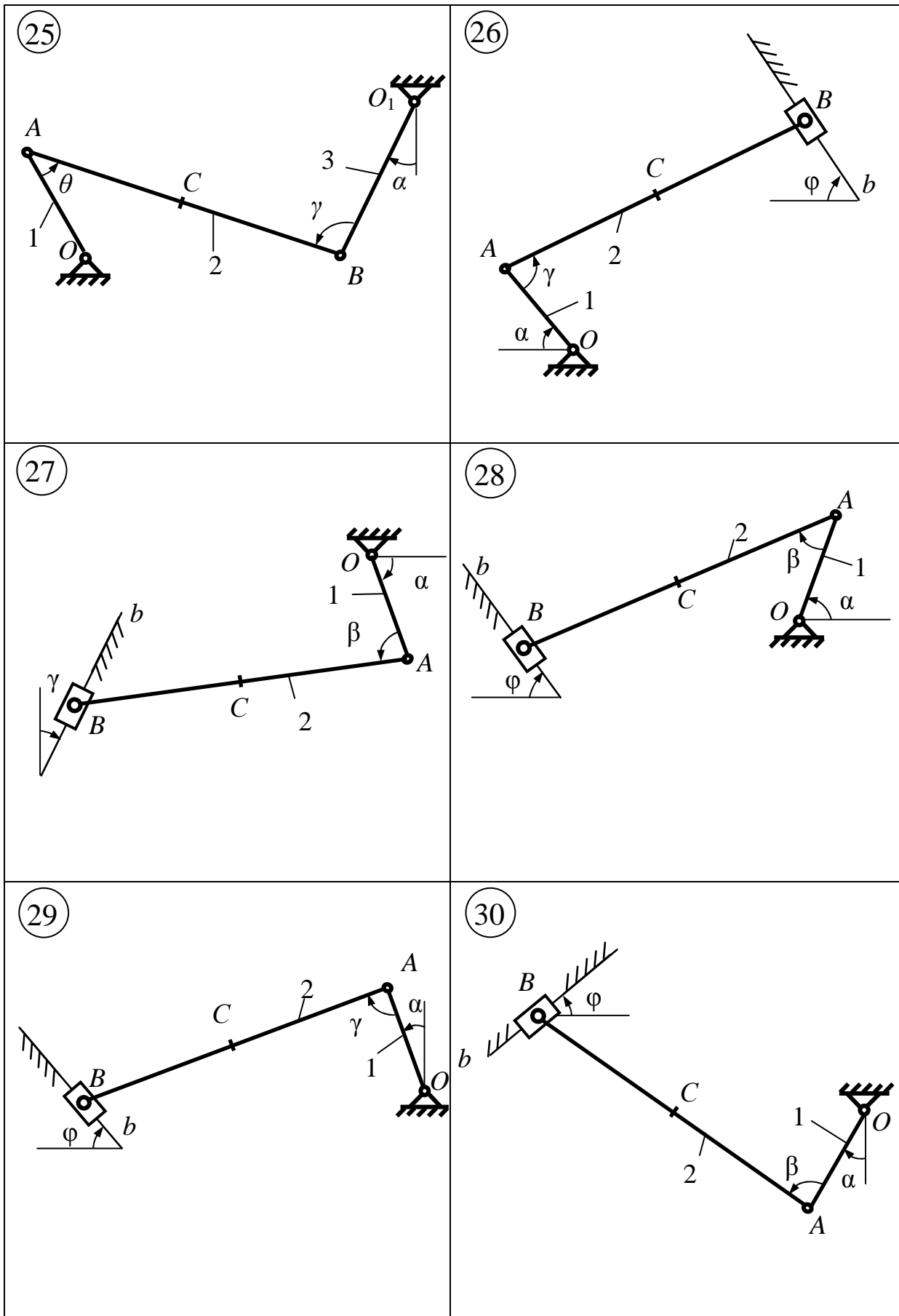


Рисунок 1.9, аркуш 5

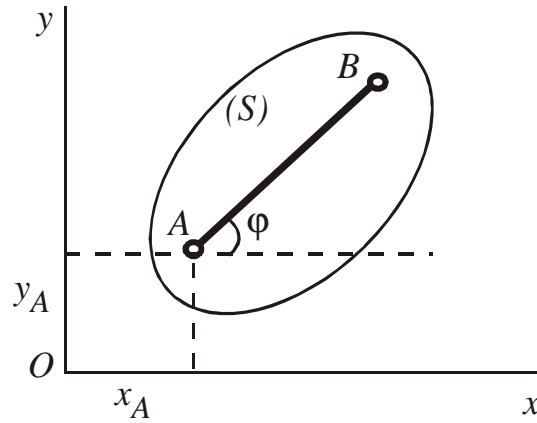


Рисунок 1.10 – Схема до рівнянь руху плоскої фігури

Залежність цих величин від часу:

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t) \quad (1.9)$$

називають рівнянням плоско-паралельного (плоского) руху твердого тіла. Перші два з цих рівнянь визначають рух тіла при незмінному куті  $\varphi$ , тобто у випадку поступального руху тіла. Третє рівняння характеризує рух тіла при незмінних координатах точки  $A$ , тобто при обертанні тіла навколо нерухомої осі, яка проходить через полюс  $A$  перпендикулярно площині  $Oxy$ .

Кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість і прискорення поступального руху, рівні швидкості  $\bar{V}_A$  і прискоренню  $\bar{a}_A$  полюса, а також кутова швидкість  $\omega$  та кутове прискорення  $\varepsilon$  обертального руху навколо полюса.

Отже, плоский рух твердого тіла можна розглядати як складений із двох рухів: поступального разом з полюсом і обертального навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно площині руху (навколо полюса).

Виходячи з цього, швидкість довільної точки  $B$  плоскої фігури визначається за формулою

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad (1.10)$$

де  $\bar{V}_A$  – вектор швидкості полюса  $A$ ,

$\bar{V}_{BA}$  – швидкість точки  $B$  в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса  $A$ . При цьому вектор  $\bar{V}_{BA}$  перпендикулярний до лінії  $AB$  і його числове значення

$$V_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB \quad (1.11)$$

де  $\omega_{AB}$  – кутова швидкість плоскої фігури

Крім того, швидкість довільної точки  $B$  можна знайти, застосовуючи теорему про проекції швидкостей двох точок, яка формулюється так: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні між собою*, тобто

$$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta, \quad (1.12)$$

де  $\alpha, \beta$  – кути нахилу векторів  $\bar{V}_A$  і  $\bar{V}_B$  до лінії  $AB$ .

Але найбільш універсальним є спосіб знаходження швидкостей точок плоскої фігури за допомогою поняття миттєвого центра швидкостей. *Миттєвим центром швидкостей (м.ц.ш.) називають зв'язану з плоскою фігурою точку, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.*

Отже швидкість точки при плоскому русі тіла можна розглядати як її швидкість в обертальному русі навколо плоскої фігури миттєвого центра швидкостей. Тому вектори швидкостей всіх точок плоскої фігури перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей і напрямлені в бік обертання фігури. При цьому кутова швидкість плоскої фігури в даний момент часу дорівнює відношенню швидкості однієї з її точок до довжини відрізка, що з'єднує точку з м.ц.ш., а швидкості точок тіла пропорційні відстаням від м.ц.ш (точка  $P$ ). до цих точок, тобто

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \dots = \frac{V_K}{KP}. \quad (1.13)$$

Знаючи положення миттєвого центра швидкостей і швидкість однієї з точок, можна за допомогою формули (1.13) знайти швидкість всіх інших точок та кутову швидкість плоскої фігури.

Прискорення кожної точки плоскої фігури знаходять за формулою

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad (1.14)$$

аналогічною залежності (1.10). *Отже, прискорення кожної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорень полюса і прискорення цієї точки в обертальному русі фігури навколо полюса.*

При цьому прискорення  $\bar{a}_{BA}$  в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса має дотичну і нормальну складові:  $\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$ . Тоді в розгорнутому вигляді: залежність (1.14) набере вигляду

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (1.15)$$

Тут дотичне прискорення в обертальному русі:

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB \quad \text{і} \quad \bar{a}_{BA}^n \perp \bar{AB} \quad (1.16)$$

а нормальне прискорення в обертальному русі:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB} \cdot AB \quad (1.17)$$

і напрямлене від точки  $B$  до точки  $A$ .

На практиці геометричне складання векторів при знаходженні прискорення точки плоскої фігури зручніше здійснювати шляхом проектування векторного виразу (1.15) на вибрані осі координат.

### 1.2.2 Приклад 1 розв'язання задачі 1.2

Механізм (рис. 1.11) складається із двох стрижнів і повзуна  $B$ , з'єднаних між собою та з нерухоною опорою  $O$  за допомогою шарнірів. Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\ell_1 = 0,4$  м,  $\ell_2 = 1,4$  м,  $AC = CB = 0,7$  м,  $\omega_1 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon_1 = 7$  с<sup>-2</sup> (напрямки  $\omega_1$  і  $\varepsilon_1$  - проти ходу годинникової стрілки).

Визначити:  $V_B$ ,  $V_C$ ,  $\omega_2$ ,  $a_B$ ,  $\varepsilon_2$ .

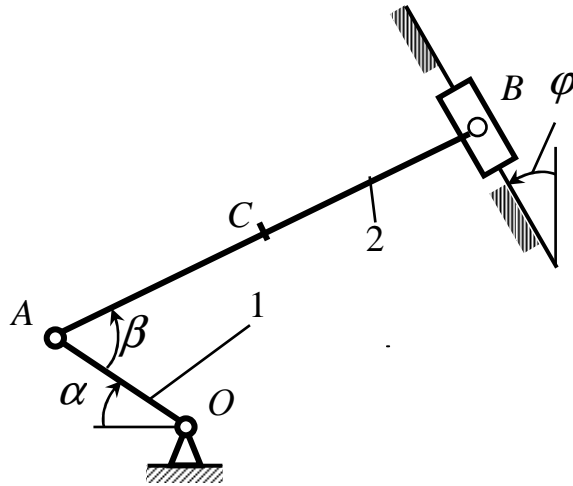


Рисунок 1.11 – Схема механізму до прикладу задачі 1.2

#### Розв'язання:

Побудуємо положення механізму (рис. 1.12) відповідно до заданих кутів та довжин стрижнів.

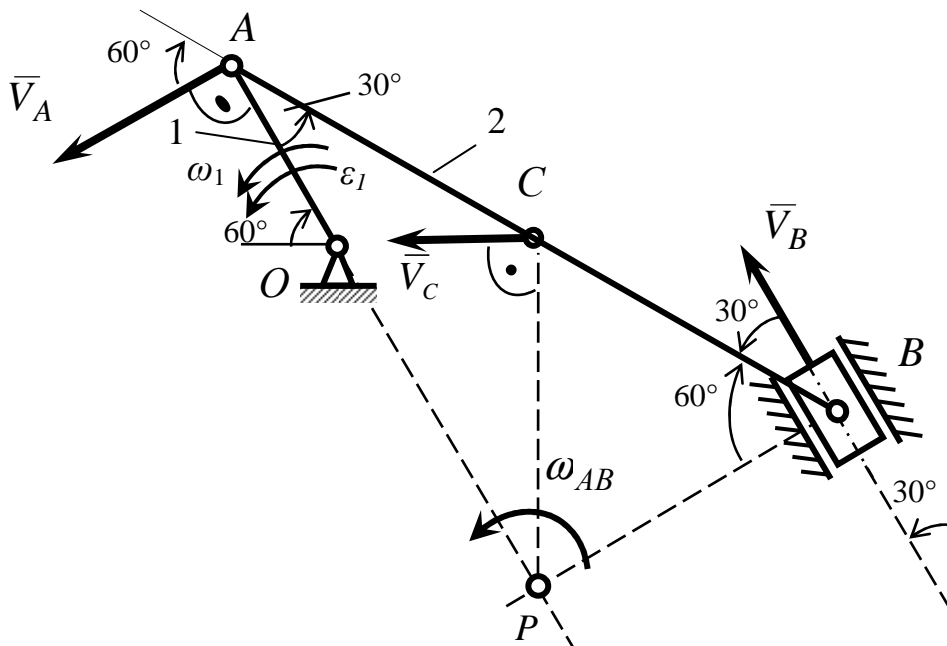


Рисунок 1.12 – Розрахункова схема для визначення швидкостей

Спочатку знайдемо швидкість точки  $A$ , оскільки задана кутова швидкість  $\omega_1$  стрижня  $OA$ :

$$V_A = \omega_1 \ell_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_A \perp O_1A.$$

Визначимо швидкість  $V_B$ . Точка  $B$  (див. рис. 1.12) належить стрижню  $AB$ , який здійснює плоско-паралельний рух. Напрямок  $\vec{V}_B$  знайдемо, ураховуючи, що точка  $B$  належить одночасно повзуну, який рухається уздовж напрямних поступально. Тепер, знаючи напрямки векторів  $\vec{V}_A$  та  $\vec{V}_B$ , скористаємося теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла (стрижня  $AB$ ) за напрямком, що з'єднує ці точки (пряма  $AB$ ).

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ.$$

$$\text{Звідки} \quad V_B = V_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 0,8 \frac{0,5}{0,867} = 0,46 \text{ м/с}.$$

Визначимо швидкість  $\vec{V}_C$ . Точка  $C$  (див. рис. 1.12) належить стрижню  $AB$ , який здійснює плоскопаралельний рух. Знаючи напрямки векторів  $\vec{V}_A$  й  $\vec{V}_B$ , знайдемо положення миттєвого центра швидкостей (м.ц.ш) стрижня  $AB$ . Це точка  $P$ , що лежить на перетинанні перпендикулярів до  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$ , побудованих із точок  $A$  і  $B$ . За напрямком вектора  $\vec{V}_A$  визначимо напрямку кутової швидкості  $\omega_{AB}$  стрижня  $AB$ . Вектор  $\vec{V}_C$  направлений перпендикулярно відрізка  $CP$  і спрямований убік повороту  $\omega_{AB}$ .

Величину  $V_C$  знайдемо із пропорції

$$\frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP} = \omega_{AB}. \quad (1.18)$$

Щоб обчислити відстані  $CP$  і  $BP$ , будемо мати на увазі, що  $\triangle ABP$  прямокутний, тому що гострі кути в ньому дорівнюють  $30^\circ$  і  $60^\circ$ , і що

$$BP = AB \sin 30^\circ = 0,5 \cdot AB = BC = 0,7 \text{ м}.$$

Тоді  $\triangle BCP$  є рівностороннім, і  $BP = CP = 0,7 \text{ м}$ .

У результаті чого рівняння (1.18) дає

$$V_C = V_B = 0,46 \text{ м/с} \quad \text{і} \quad \vec{V}_C \perp \vec{CP}.$$

Визначимо кутову швидкість стрижня  $AB$ , пам'ятаючи, що кутова швидкість дорівнює швидкості однієї з точок, поділеній на довжину відрізка, що з'єднує цю точку з м.ц.ш., тобто

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{BP} = \frac{0,46}{0,7} = 0,66 \text{ с}^{-1}.$$

Визначимо прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$ . Вона належить стрижню  $AB$ , який здійснює плоскопаралельний рух, тому для визначення  $\bar{a}_B$  скористаємося рівнянням

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (1.19)$$

Для визначення прискорень побудуємо рис. 1.13, на якому зобразимо вектори всіх прискорень, що входять в формулу (1.19).

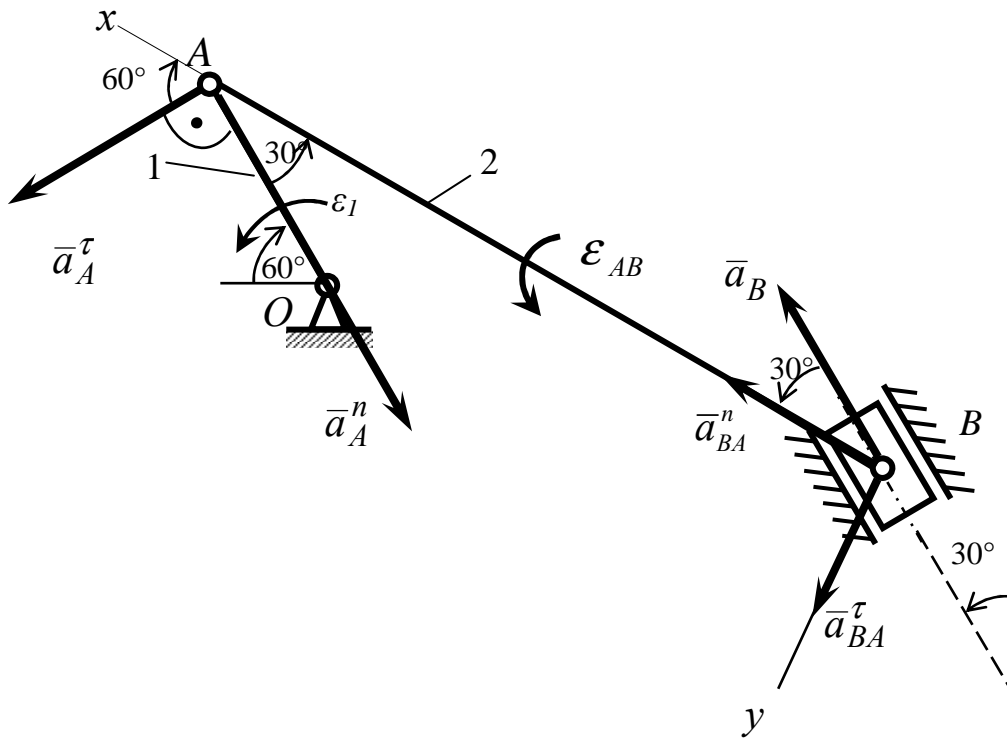


Рисунок 1.13 – Розрахункова схема для визначення прискорень

Вектор  $\bar{a}_A^n$  спрямований уздовж  $AO$ , а  $\bar{a}_A^\tau$  – перпендикулярно  $AO$ ; зображуємо ці вектори на схемі (див. рис. 1.13).

Точка  $B$ , яка належить повзуну, рухається паралельно напрямним повзуна. Тому зобразимо вектор  $\bar{a}_B$  на схемі (див. рис. 1.13), вважаючи, що  $\bar{a}_B$  спрямований у ту ж сторону, що й швидкість  $\bar{V}_B$ .

Зобразимо на схемі вектори  $\bar{a}_{BA}^n$  (уздовж  $BA$  від  $B$  к  $A$ ) і  $\bar{a}_{BA}^\tau$  (у будь-яку сторону перпендикулярно  $BA$ )

Обчислимо числові значення деяких складових рівняння (1.19). За даними завдання визначимо прискорення точки  $A$ :

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \ell_1 = 7 \cdot 0,4 = 2,8 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \ell_1 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

З врахуванням раніше обчисленого значення кутової швидкості  $\omega_{AB}$  знайдемо

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot l_2 = 0,66^2 \cdot 1,4 = 0,61 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, із всіх прискорень, що входять у рівняння (1.19), невідомі тільки числові значення двох прискорень:  $a_B$  й  $a_{BA}^\tau$ . Їх можна знайти, спроектувавши частини рівняння (1.19) на дві вибрані осі координат. Направимо вісь  $Bx$  вздовж лінії  $BA$ , а ось  $y$  – в перпендикулярному напрямку. Спроектуємо векторне рівняння (1.19) на вісь  $x$

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (1.20)$$

Підставивши в рівняння (1.20) числові значення, знайдемо:

$$a_B = \frac{a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{2,8 \cdot 0,5 - 1,6 \cdot 0,867 + 0,61}{0,867} = 0,72 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_B > 0$ , то це означає, що вектор  $\bar{a}_B$  спрямований так, як і показано на рис. 1.13.

Тепер спроектуємо векторне рівняння (1.19) на вісь  $y$ :

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau.$$

Звідси знайдемо

$$\begin{aligned} a_{BA}^\tau &= -a_B \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_A^n \sin 30^\circ = \\ &= -0,72 \cdot 0,5 - 2,8 \cdot 0,866 - 1,6 \cdot 0,5 = -3,58 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Знак  $a_{BA}^\tau < 0$  указує, що напрямок  $\bar{a}_{BA}^\tau$  протилежний показаному на рис. 1.13.

Визначимо кутове прискорення  $\varepsilon_2$ . Оскільки  $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$ , то

$$\varepsilon_2 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_2} = \frac{3,58}{1,4} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

Відповідь:  $V_B = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $V_C = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = \omega_{AB} = 0,67 \text{ с}^{-1}$ ;  
 $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_2 = 2,56 \text{ с}^{-2}$ .

### 1.2.3 Приклад 2 розв'язання задачі 1.2

У плоскому механізмі, зображеному на рис 1.14, довжина ланок якого  $l_1 = OA = 0,6 \text{ м}$ ,  $l_2 = AB = 1,8 \text{ м}$ ,  $l_3 = O_1B = 1,2 \text{ м}$ , кривошип  $OA$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1 = 6 \text{ с}^{-1}$  та кутовим прискоренням  $\varepsilon_1 = 10 \text{ с}^{-2}$ . Точка  $C$  ділить стрижень  $AB$  на дві рівні частини ( $AC = CB = 0,9 \text{ м}$ ).

Визначити швидкості  $V_B$ ,  $V_C$  точок  $B$ ,  $C$  механізму і кутові швидкості  $\omega_2$  стрижня  $AB$ , а також прискорення  $a_B$  точки  $B$  та кутове прискорення  $\varepsilon_2$  стрижня  $AB$  в положенні механізму, коли кути  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ .

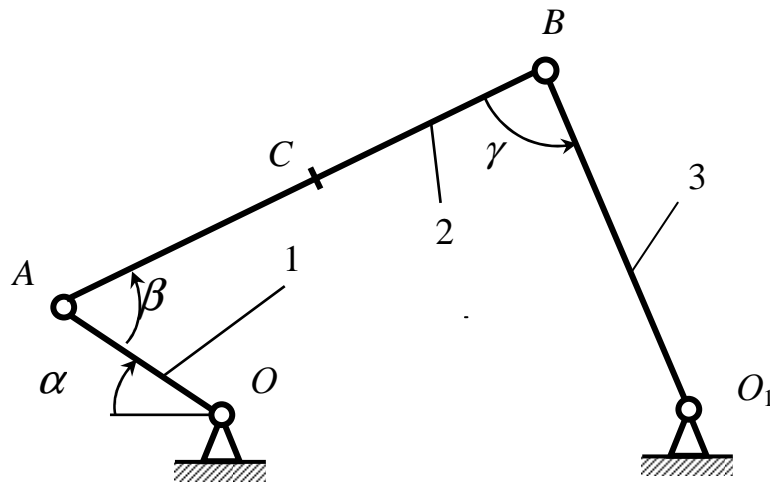


Рисунок 1.14 – Схема механізму до прикладу 2 задачі 1.2

**Розв’язання:**

Будуємо положення механізму у відповідності до заданих кутів (рис.1.15). Визначаємо швидкість точок.

Вектор швидкості  $\vec{V}_A$  точки  $A$  перпендикулярний до кривошипа  $OA$ . Його модуль  $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 6 \cdot 0,6 = 3,6$  м/с.

Вектор швидкості  $\vec{V}_B$  точки  $B$ , яка одночасно належить шатуну  $AB$  і кривошипу  $O_1B$ , перпендикулярний до кривошипа  $O_1B$ .

Миттєвий центр швидкостей стрижня  $AB$  (точка  $P$ ) знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок  $A$  і  $B$  до їх швидкостей (див. рис. 1.15).

Швидкості точок стрижня  $AB$  (ланки 2) та його кутова швидкість зв’язані залежністю

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

Як видно з рисунка 1.15, трикутник  $ABP$  прямокутний і рівнобедрений, тому  $AP = AB = l_2 = 1,8$  м. Виходячи з цього, одержимо:

$$BP = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{1,8}{0,707} = 2,55 \text{ м.}$$

Отже  $\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{3,6}{1,8} = 2 \text{ с}^{-1}; \quad V_B = \omega_2 BP = 2 \cdot 2,55 = 5,1 \text{ м/с.}$



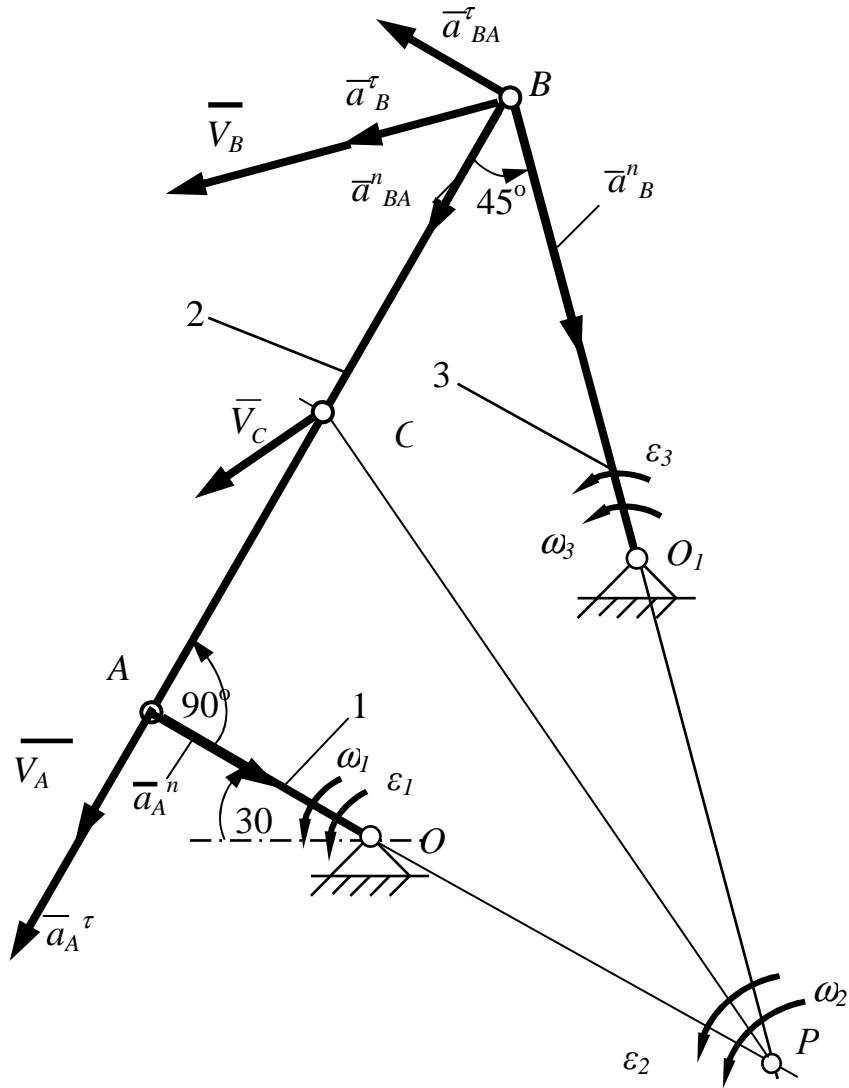


Рисунок 1.15 – Розрахункова схема до прикладу 2 задачі 1.2

Стрижень  $O_1B$  обертається навколо нерухомої опорної точки  $O_1$  з кутовою швидкістю  $\omega_3$ , значення якої визначимо за формулою:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{5,1}{1,2} = 2,25 \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення швидкості точки  $C$ , яка належить стрижню  $AB$ , знайдемо з прямокутного трикутника  $ACP$  довжину гіпотенузи  $CP$ :

$$CP = \sqrt{(AP)^2 + (AB)^2} = \sqrt{1,8^2 + 0,9^2} = 2,154 \text{ м.}$$

Точка  $C$  разом з точкою  $B$  належить до стрижня  $AB$ , який обертається навколо миттєвого центру швидкостей (точки  $P$ ) з кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Тоді швидкість точки  $C$  знайдемо з пропорції:

$$V_C = \omega_2 \cdot CP = 2 \cdot 2,154 = 4,308 \text{ м/с.}$$

Вектор  $\bar{V}_C$  направимо перпендикулярно до лінії  $CP$  відповідно до напрямку  $\bar{V}_B$ .

Визначаємо прискорення точок. Прискорення точки  $A$  складається з дотичного і нормального прискорень:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n,$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad a_A^\tau &= \varepsilon_1 l_1 = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ м/с}^2; \\ a_A^n &= \omega_2 l_1 = 6^2 \cdot 0,6 = 21,6 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор  $\bar{a}_A^\tau$  направлений перпендикулярно до  $OA$ , а вектор  $\bar{a}_A^n$  направлений від точки  $A$  до точки  $O$ .

Для визначення прискорення точки  $B$  скористуємося рівнянням

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Так як точка  $B$  належить не тільки стрижню  $AB$ , а і стрижню  $BO_1$  (ланці 3), який обертається навколо нерухомої точки  $O_1$ , то прискорення точки  $B$  також складається з дотичного і нормального прискорень, тобто

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Вектор  $\bar{a}_B^\tau$  направляємо перпендикулярно до стрижня  $OB$  в той чи інший бік. Його обчислення за формулою  $a_B^\tau = \varepsilon_3 l_3$  неможливо, так як значення  $\varepsilon_3$  невідомо. Нормальне прискорення точки  $B$

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot l_3 = 2,25^2 \cdot 1,2 = 6,075 \text{ м/с}^2,$$

і вектор  $\bar{a}_B^n$  направляємо від точки  $B$  до точки  $O_1$ .

Вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau$  направляємо перпендикулярно до стрижня  $AB$  в будь-яку сторону, а вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  – вздовж  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ , і знаходимо числове значення:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 2^2 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином, у величинах, які входять до векторного рівняння невідомі тільки числові значення  $a_B^\tau$  і  $a_{BA}^\tau$ . Щоб знайти ці величини, спроектуємо обидві частини векторного рівняння на дві довільно вибрані перпендикулярні осі  $x$  та  $y$ . Направляємо одну з осей (вісь  $x$ ) вздовж стрижня  $AB$  і в результаті проектування одержимо:

$$\begin{aligned} -a_B^\tau \cos 45^\circ - a_B^n \cos 45^\circ &= -a_A^\tau - a_{BA}^n, \\ a_B^\tau \sin 45^\circ - a_B^n \sin 45^\circ &= -a_A^n + a_{BA}^\tau. \end{aligned}$$

З цих алгебраїчних рівнянь знаходимо:

$$a_B^\tau = \frac{a_A^\tau}{\cos 45^\circ} + \frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} - a_B^n = \frac{6}{0,707} + \frac{7,2}{0,707} - 6,075 = 12,595 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = a_A^\tau + a_B^\tau \cdot \sin 45^\circ - a_B^n \cdot \sin 45^\circ = 21,6 + 12,595 \cdot 0,707 - 6,075 \cdot 0,707 = 26,21 \text{ м/с}^2.$$

Тоді прискорення точки  $B$ :

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{12,595^2 + 6,075^2} = 13,98 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення стрижня  $AB$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{12,595}{1,8} = 6,997 \text{ с}^{-2}.$$

Відповідь:  $V_B = 5,1 \text{ м/с}$ ;  $V_C = 4,308 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_B = 13,98 \text{ м/с}^2$ ;  
 $\varepsilon_2 = 6,997 \text{ с}^{-2}$ .

### 1.3. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії і принципу Даламбера до аналізу руху механічної системи

Механічна система, що складається з трьох масивних тіл масою відповідно  $m_1$ ,  $m_2$  і  $m_3$ , з'єднаних між собою нерозтяжними нитками, і невагомих блоків починає рухатись із стану спокою. До тіла 1 прикладена сила  $P$ , до тіла 2 – пара сил з моментом  $M$ , до рухомої осі  $C_3$  тіла 3 прикріплена попередньо не деформована циліндрична пружина з коефіцієнтом жорсткості  $s$ . Варіанти схем системи зображені на рисунку 1.16.

Тіло 1 (вантаж) рухається по шорсткій плоскій поверхні з коефіцієнтом тертя ковзання  $f$ , тіло 2 (ступінчастий циліндричний барабан з радіусами ступінів  $R$  і  $r$  й радіусом інерції  $i_2$ ) обертається навколо нерухомої осі, перпендикулярної площині руху системи, тіло 3 (однорідний циліндричний коток радіуса  $R_3$ ) котиться без ковзання по шорсткій плоскій поверхні з коефіцієнтом тертя кочення  $f_k$ .

Треба визначити:

1. Швидкість тіла 1 –  $V_1$  в момент часу, коли воно пройде шлях  $S_1$ .
2. Сили натягіння ниток у зазначений момент часу.

Числові дані задачі наведені в таблицях 1.5 та 1.6

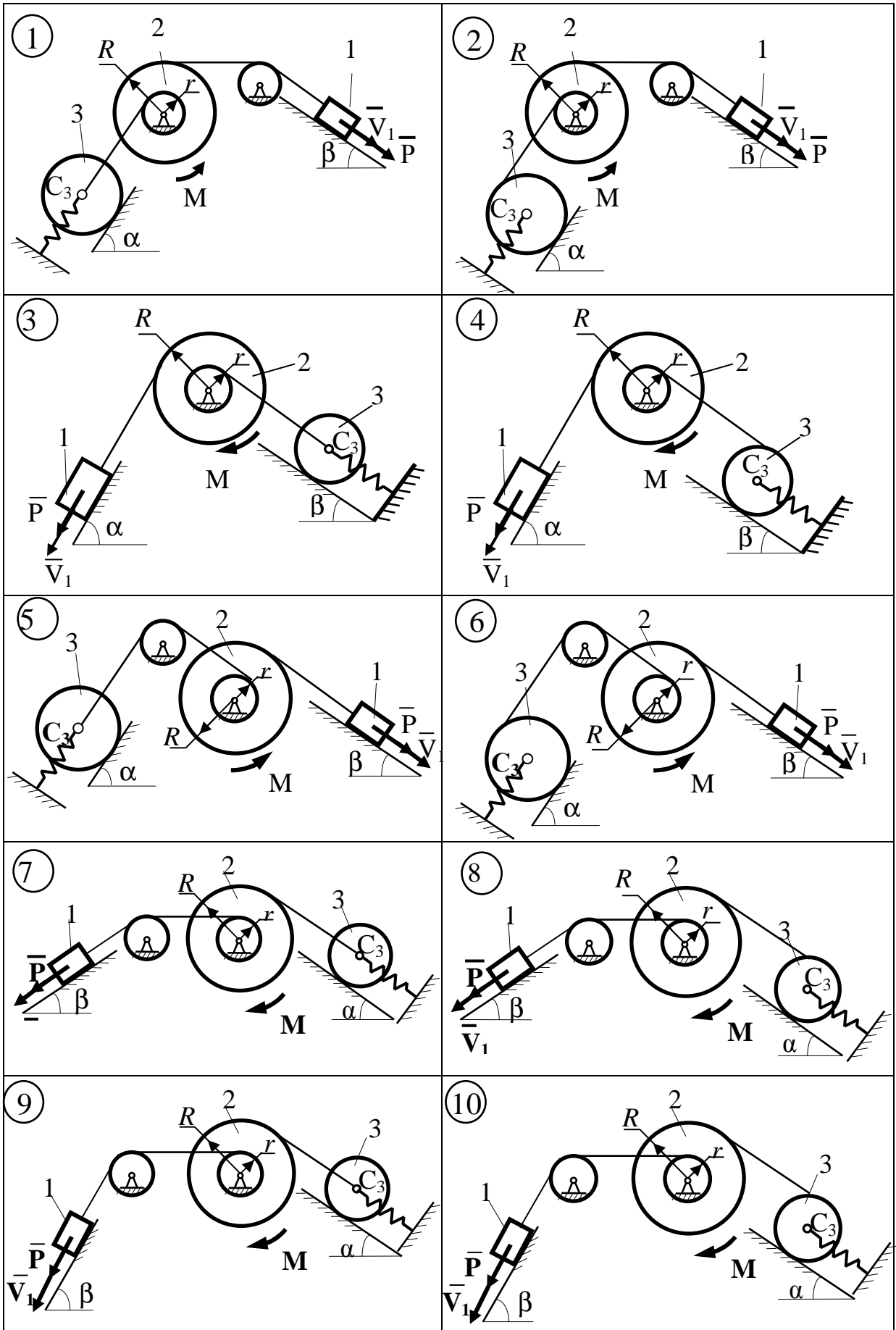


Рисунок 1.16 – Схеми до варіантів задачі 1.3

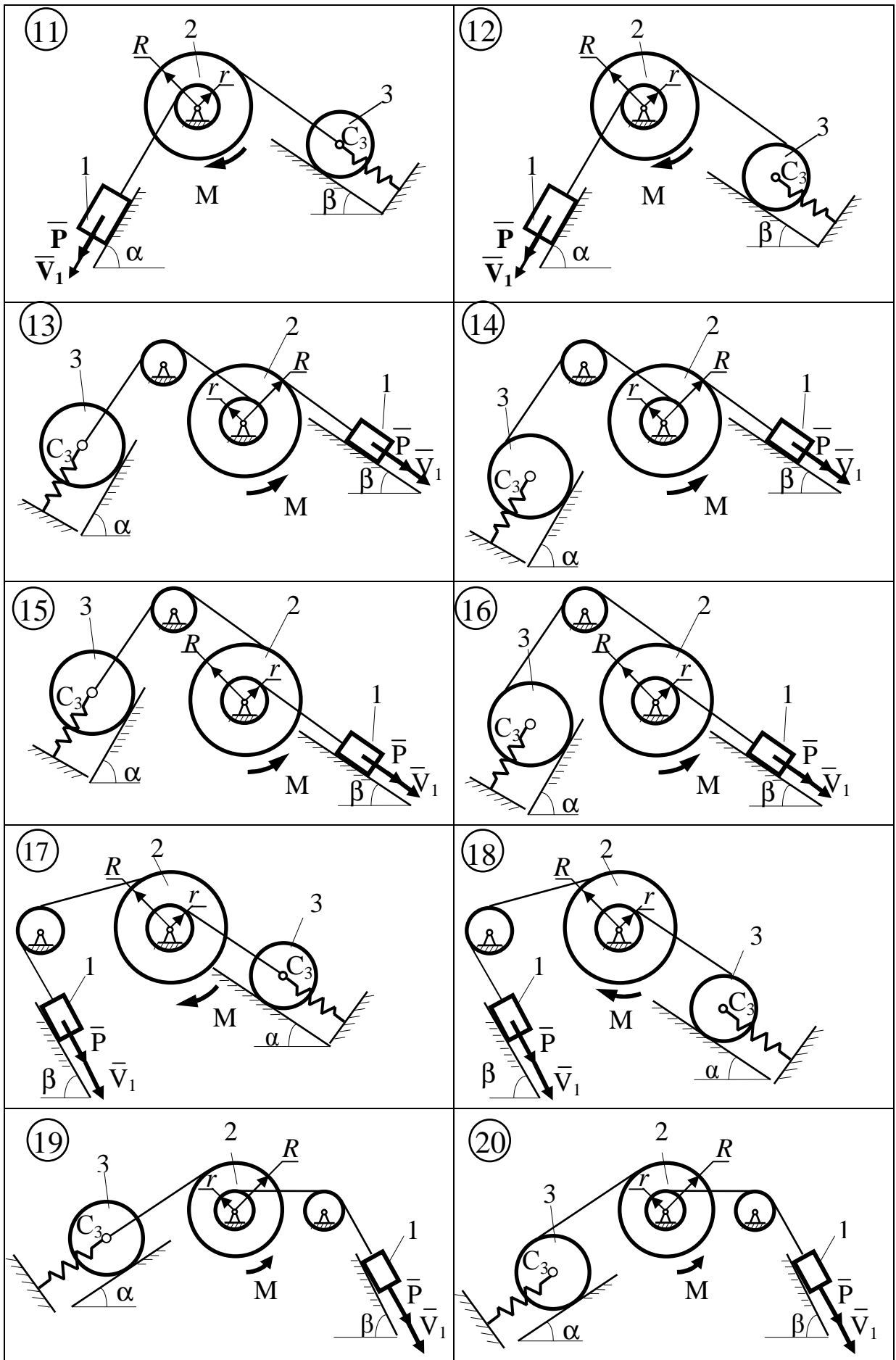


Рисунок 1.16, аркуш 2

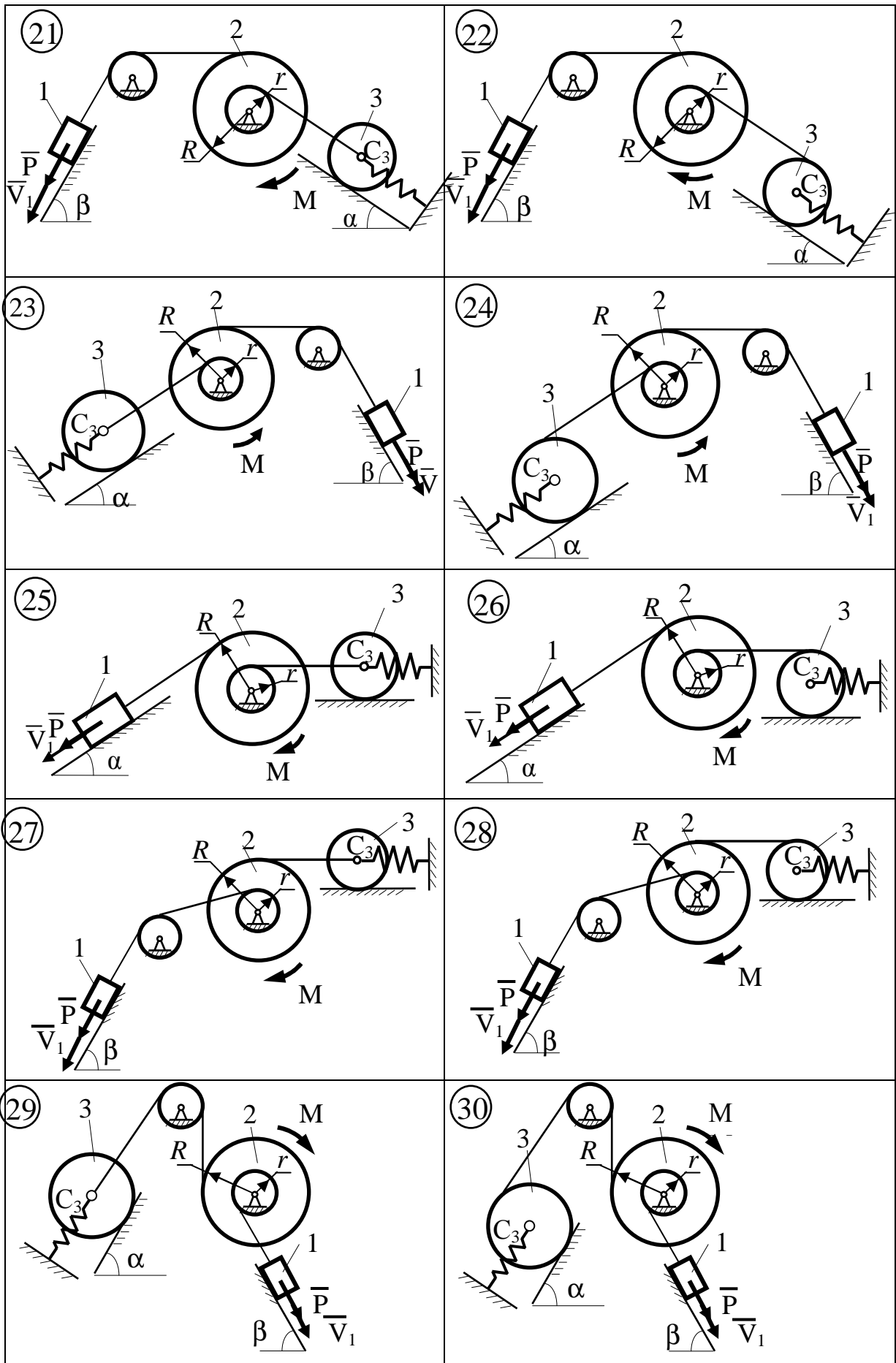


Рисунок 1.16, аркуш 3

Таблиця 1.5 – Вихідні дані до задачі 1.3

| Величини   | Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|            | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $m_1$ , кг | 60  | 70  | 80  | 90  | 100 | 80  | 100 | 60  | 70  | 90  |
| $m_2$ , кг | 30  | 35  | 40  | 45  | 50  | 50  | 45  | 35  | 30  | 40  |
| $m_3$ , кг | 16  | 18  | 20  | 22  | 24  | 22  | 24  | 20  | 18  | 16  |
| $P$ , Н    | 800   | 700 | 600 | 500 | 400 | 600 | 500 | 700 | 800 | 400 |
| $M$ , Н·м  | 60  | 50  | 40  | 30  | 20  | 20  | 60  | 40  | 50  | 30  |
| $c$ , Н/м  | 100   | 110 | 120 | 130 | 140 | 100 | 110 | 120 | 140 | 130 |
| $f$        | 0,1   | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,5 |
| $f_k$ , см | 1,0   | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |

Таблиця 1.6 – Вихідні дані до задачі 1.3

| Величини        | Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                 | 0   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $R$ , см        | 0,20  | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,35 | 0,30 | 0,25 | 0,20 | 0,40 |
| $r$ , см        | 0,12  | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,20 | 0,12 | 0,20 | 0,16 | 0,14 | 0,18 |
| $i_2$ , см      | 0,14  | 0,16 | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,16 | 0,18 | 0,14 | 0,20 | 0,22 |
| $R_3$ , см      | 0,16  | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,22 | 0,16 | 0,18 | 0,24 | 0,20 |
| $\alpha$ , град | 45  | 60   | 30   | 45   | 60   | 30   | 45   | 60   | 30   | 45   |
| $\beta$ , град  | 30  | 45   | 60   | 60   | 30   | 45   | 30   | 45   | 60   | 30   |
| $S_1$ , м       | 0,8   | 0,9  | 1,0  | 1,1  | 1,2  | 0,8  | 0,9  | 1,0  | 1,2  | 1,1  |

### 1.3.1 Методичні вказівки до задачі 1.3

Для розв'язання задачі застосовуються теорема про зміну кінетичної енергії і принцип Даламбера для механічної системи.

Зазначена теорема в загальному випадку пов'язує між собою зміну кінетичної енергії системи при її переміщенні з початкового положення в поточне і сумарною роботою всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на матеріальні точки системи:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \quad (1.21)$$

де  $T$  і  $T_0$  – відповідно поточне і початкове значення кінетичної енергії системи;

$\sum_{k=1}^n A_k^e$  і  $\sum_{k=1}^n A_k^i$  – відповідно сумарні роботи всіх зовнішніх і внутрішніх сил системи;

$n$  – кількість матеріальних точок в системі;

$k = 1, \dots, n$  – номери цих точок.

В нашому випадку  $T_0 = 0$ , бо система рухається із стану спокою, і  $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$ , бо вона складається із абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтягненими нитками. Тому маємо:

$$T = \sum_{k=1}^n A_k^e, \quad (1.22)$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (1.23)$$

де  $T_1, T_2, T_3$  – відповідно значення кінетичної енергії тіл 1, 2, 3 в поточному положенні системи.

Тіло 1 рухається поступально і її кінетична енергія визначається таким чином:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2. \quad (1.24)$$

Тіло 2 обертається навколо нерухомої осі. Його кінетична енергія дорівнює:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2, \quad (1.25)$$

де  $\omega_2$  – кутова швидкість тіла;

$J_2$  – момент інерції тіла відносно осі обертання:

$$J_2 = m_2 \cdot i_2^2. \quad (1.26)$$

Рух тіла 3 – плоский. Його кінетичну енергію підрахуємо як суму кінетичних енергій поступальної і обертальної складових цього руху:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \cdot \omega_3^2, \quad (1.27)$$

де  $V_3$  – швидкість центра мас тіла (точки  $C_3$ );

$\omega_3$  – кутова швидкість тіла;

$J_3$  – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини його руху:

$$J_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot R_3^2. \quad (1.28)$$

Перед визначенням величин  $T_2$  і  $T_3$  слід виразити  $\omega_2$ ,  $V_3$  і  $\omega_3$  через  $V_1$ , прийнявши на увагу те, що всі точки кожної з ниток системи мають однакові (за модулем) швидкості. В цьому разі величина  $T$  буде також виражена через  $V_1$ .



При визначенні величин робіт зовнішніх сил системи треба керуватись наступним.

Робота сили ваги тіла визначається за формулою:

$$A(m \cdot \bar{g}) = \pm m \cdot g \cdot h, \quad (1.29)$$

де  $m$  – маса тіла;

$g$  – прискорення сили ваги ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ );

$h$  – вертикальне переміщення точки прикладення цієї сили (центра мас тіла).

Вказана робота є додатною при опусканні тіла і від'ємною – при його підйомі.

Робота сили пружності пружини завжди є від'ємною:

$$A(\bar{P}_{np}) = -\frac{c}{2} \cdot \lambda^2, \quad (1.30)$$

де  $\lambda$  – деформація пружини із ненапруженого стану;

$c$  – жорсткість пружини (тобто сила, яка деформує пружину на одиницю довжини).

Робота моменту сили (або пари сил), прикладеної до тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$A(M) = \pm \int_0^{\varphi} M(\varphi) \cdot d\varphi, \quad (1.31)$$

де  $\varphi$  – кут повороту тіла (в радіанах);

$M$  – момент сили (або пари сил) відносно осі обертання.

В разі, коли  $M = \text{const}$ , наведена формула (1.31) спрощується:

$$A(M) = \pm M \cdot \varphi. \quad (1.32)$$

Зазначена робота є додатною, коли напрями  $M$  і  $\varphi$  співпадають, і від'ємною, коли вони різні.

Робота інших сил:

$$A(\bar{P}) = \int_0^S P_{\tau} \cdot dS, \quad (1.33)$$

де  $P_{\tau}$  – проекція сили  $\bar{P}$  на дотичну до траєкторії руху точки прикладення цієї сили;

$S$  – шлях вказаної точки по траєкторії руху.

В разі, коли  $P_{\tau} = \pm P$  (де  $P$  – модуль сили), маємо:

$$A(\bar{P}) = \pm P \cdot S. \quad (1.34)$$

Знак плюс тут має місце при співпаданні напрямів сили і переміщення точки її прикладення, а мінус – якщо ці напрями протилежні.

Слід зауважити, що у випадках, коли сила є перпендикулярною до напрямку руху точки її прикладення ( $P_\tau = 0$ ) або ця точка нерухома ( $S = 0$ ), робота сили дорівнює нулю.

Щоб визначити  $V_1$  із формули (1.22), треба щоб її права частина була вираженою через  $S_1$ . Для цього потрібно встановити зв'язок  $S_1$  з усіма переміщеннями системи по аналогії зі співвідношеннями відповідних швидкостей.

Сили натягнення ниток, що з'єднують тіла системи, визначаються згідно з принципом Даламбера із кінетостатичних рівнянь рівноваги окремих тіл, в які входять зовнішні активні сили і реакції в'язей, а також сили інерції матеріальних точок, з яких складаються тіла:

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \cdot \bar{a}_k, \quad (1.35)$$

де  $\bar{\Phi}_k$  – сила інерції k-тої матеріальної точки;

$m_k$  – маса цієї точки;

$\bar{a}_k$  – її прискорення.

Враховуючи розподілений характер сил інерції окремих точок, їх зводять до центрів мас тіл. Результат зведення залежить від характеру руху кожного з тіл механічної системи.

В нашій задачі тіло 1 рухається поступально. При такому русі сили інерції окремих точок враховуються їх головним вектором –  $\bar{\Phi}_1$ , прикладеним в центрі мас (т.  $C_1$ ):

$$\bar{\Phi}_1 = -m_1 \cdot \bar{a}_1, \quad (1.36)$$

де  $\bar{a}_1$  – прискорення першого тіла.

Тіло 2 обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас (т.  $C_2$ ). Сили інерції цього тіла враховуються головним (інерціальним) моментом –  $\bar{L}_2^\Phi$ , скерованим уздовж осі обертання:

$$\bar{L}_2^\Phi = -J_2 \cdot \bar{\epsilon}_2, \quad (1.37)$$

де  $\bar{\epsilon}_2$  – вектор кутового прискорення тіла 2.

У тіла 3, рух якого плоский, сили інерції враховуються головним вектором –  $\bar{\Phi}_3$ , прикладеним в центрі мас (т.  $C_3$ ) і головним моментом –  $\bar{L}_3^\Phi$ , скерованим уздовж рухомої осі обертання, що проходить через центр мас:

$$\bar{\Phi}_3 = -m_3 \cdot \bar{a}_3; \quad (1.38)$$

$$\bar{L}_3^\Phi = -J_3 \cdot \bar{\epsilon}_3, \quad (1.39)$$

де  $\bar{a}_3$  – прискорення центра мас тіла 3;

$\bar{\epsilon}_3$  – вектор кутового прискорення цього тіла.

Для визначення величин (модулів) зазначених інерційних навантажень треба знати величини відповідних прискорень тіл системи.

Значення  $a_1$  можна знайти шляхом диференціювання за часом залежності  $V_1$  от  $S_1$ , отриманої на першому етапі розрахунку. Величини інших прискорень легко визначити, використовуючи їх залежності від  $a_1$  (вони такі ж, як і залежності між відповідними швидкостями).

### 1.3.2 Приклад розв'язання задачі 1.3

Вихідна схема механічної системи зображена на рис. 1.17. Числові дані:  $m_1 = 80$  кг;  $m_2 = 40$  кг;  $m_3 = 20$  кг;  $P = 600$  Н;  $M = 40$  Н·м;  $c = 120$  Н/м;  $f = 0,3$ ;  $f_K = 0,8$  см;  $R = 0,30$  м;  $r = 0,16$  м;  $i_2 = 0,20$  м;  $R_3 = 0,18$  м;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $S_1 = 1,0$  м.

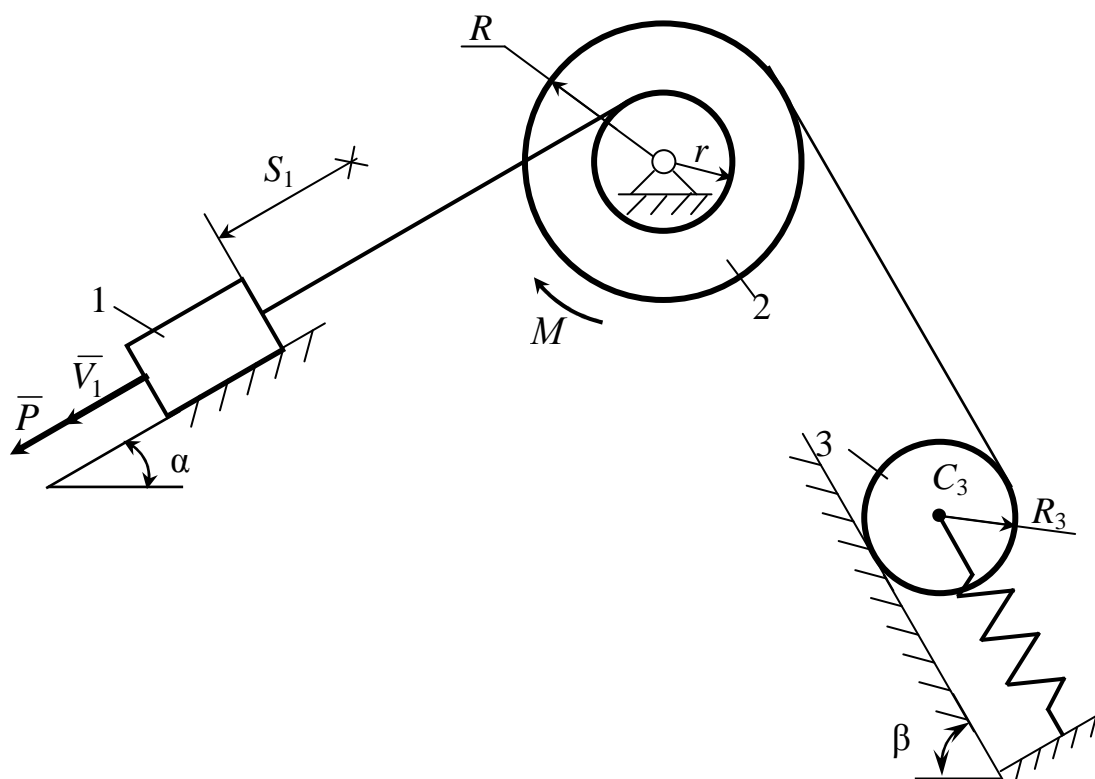


Рисунок 1.17 – Схема механічної системи до прикладу задачі 1.3

#### Розв'язання:

1. На вихідній схемі покажемо швидкості й переміщення тіл системи, зовнішні силові фактори, що рухають систему, позначимо центри мас тіл системи й інші важливі точки (рис. 1.18).

2. Пов'яжемо швидкості тіл 2 і 3 з швидкістю тіла 1:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r}; V_B = \omega_2 \cdot R; V_3 = \frac{V_B}{2} = \frac{\omega_2 \cdot R}{2} = V_1 \cdot \frac{R}{2r}; \omega_3 = \frac{V_3}{R_3} = V_1 \cdot \frac{R}{2r \cdot R_3}.$$

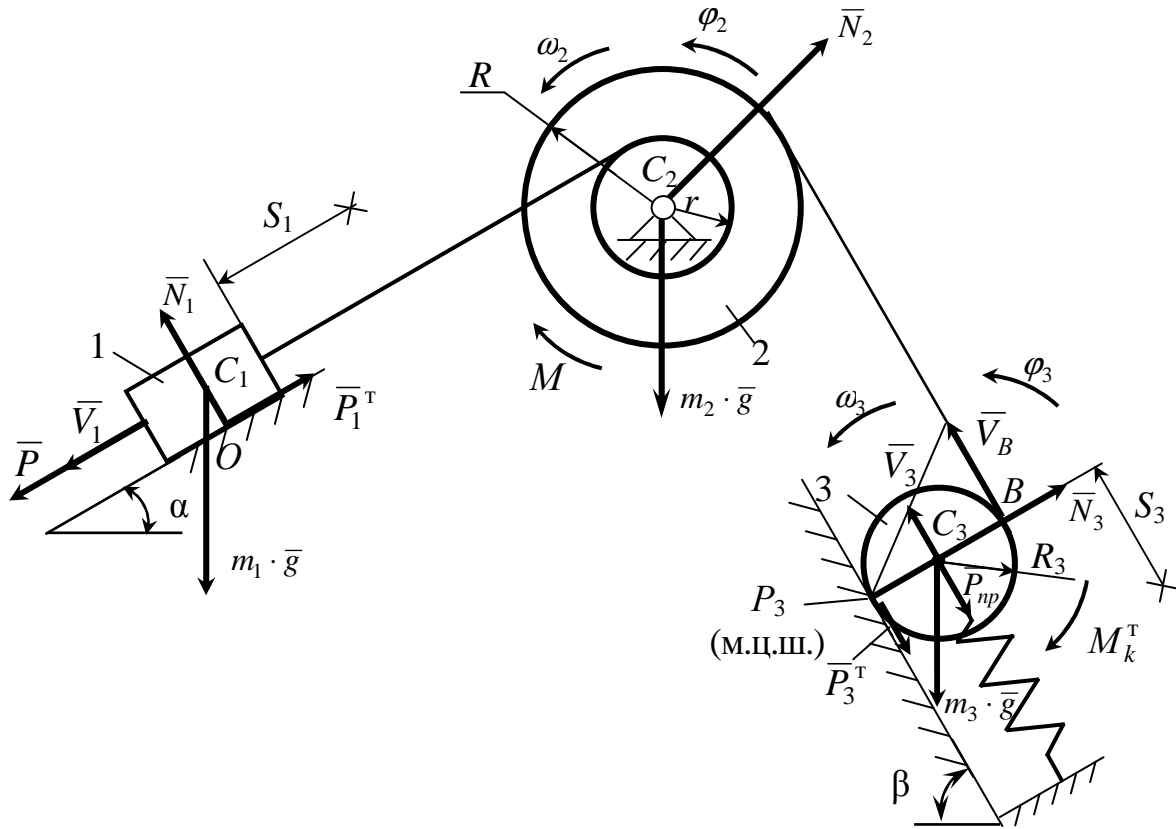


Рисунок 1.18 – Розрахункова схема 1 до прикладу задачі 1.3

3. Виразимо кінетичну енергію системи через  $V_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot V_1^2 = 40 \cdot V_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot i_2^2 \cdot \left( \frac{V_1}{r} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0,20^2 \cdot \frac{1}{0,16^2} \cdot V_1^2 = 31,25 \cdot V_1^2;$$

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} m_3 \cdot V_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \cdot \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left( \frac{R}{2r} \right)^2 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot R_3^2 \cdot \left( \frac{R}{2r \cdot R_3} \right)^2 \cdot V_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left( \frac{0,30}{2 \cdot 0,16} \right)^2 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,18^2 \cdot \left( \frac{0,30}{2 \cdot 0,16 \cdot 0,18} \right)^2 \cdot V_1^2 = \\ &= 8,789 \cdot V_1^2 + 4,395 \cdot V_1^2 = 13,184 \cdot V_1^2; \end{aligned}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 40 \cdot V_1^2 + 31,25 \cdot V_1^2 + 13,184 \cdot V_1^2 = 84,434 \cdot V_1^2.$$

4. Пов'яжемо переміщення тіл 2 і 3 з переміщенням тіла 1:

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r}; \quad S_3 = S_1 \cdot \frac{R}{2r}; \quad \varphi_3 = S_1 \cdot \frac{R}{2r \cdot R_3}.$$

5. Виразимо сумарну роботу зовнішніх сил через  $S_1$ :

$$A(m_1 \cdot \bar{g}) = m_1 \cdot g \cdot S_1 \cdot \sin \alpha = 80 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot S_1 = 392,4 \cdot S_1;$$

$$A(\bar{P}_1^T) = -P_1^T \cdot S_1 = -N_1 \cdot f \cdot S_1 = -m_1 \cdot g \cdot f \cdot \cos \alpha \cdot S_1 = \\ = -80 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \cdot 0,866 \cdot S_1 = -203,891 \cdot S_1;$$

$$A(m_3 \cdot \bar{g}) = -m_3 \cdot g \cdot S_3 \cdot \sin \beta = -m_3 \cdot g \cdot \frac{R}{2r} \cdot S_1 \cdot \sin \beta = \\ = -20 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,30}{2 \cdot 0,16} \cdot 0,866 \cdot S_1 = -159,290 \cdot S_1;$$

$$A(M_k^T) = -M_k^T \cdot \varphi_3 = -N_3 \cdot f_k \cdot \varphi_3 = -m_3 \cdot g \cdot f_k \cdot \frac{R}{2r \cdot R_3} \cdot S_1 \cdot \cos \beta = \\ = -20 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{0,3}{2 \cdot 0,16 \cdot 0,18} \cdot 0,5 \cdot S_1 = -4,088 \cdot S_1;$$

( $M_k^T$  – момент тертя кочення тіла 3);

$$A(\bar{P}) = P \cdot S_1 = 600 \cdot S_1;$$

$$A(M) = -M \cdot \varphi_2 = -M \cdot \frac{S_1}{r} = -40 \cdot \frac{S_1}{0,16} = -250 \cdot S_1;$$

$$A(\bar{P}_{np}) = -\frac{c}{2} \cdot S_3^2 = -\frac{c}{2} \cdot \left(\frac{R}{2r}\right)^2 \cdot S_1^2 = -\frac{120}{2} \cdot \left(\frac{0,30}{2 \cdot 0,16}\right)^2 \cdot S_1^2 = -52,734 \cdot S_1^2;$$

$A(m_2 \cdot \bar{g}) = A(\bar{N}_2) = A(\bar{N}_3) = A(\bar{P}_3^T) = 0$ , оскільки точки прикладення зазначених сил є нерухомими;

$A(\bar{N}_1) = 0$ , оскільки ця сила перпендикулярна переміщенню точки  $O$  її прикладення.

$$\sum A_k^e = 392,4 \cdot S_1 - 203,894 \cdot S_1 - 159,290 \cdot S_1 - 4,088 \cdot S_1 + 600 \cdot S_1 - \\ - 250 \cdot S_1 - 52,734 \cdot S_1^2 = 375,131 \cdot S_1 - 52,734 \cdot S_1^2.$$

6. Підставимо значення  $T$  і  $\sum A_k^e$  в формулу (1.22) і отримаємо рівняння для визначення  $V_1$ :

$$84,434 \cdot V_1^2 = 375,131 \cdot S_1 - 52,734 \cdot S_1^2. \quad (1.40)$$

7. Із рівняння (1.40) знаходимо:

$$V_1 = \sqrt{\frac{375,131 \cdot S_1 - 52,734 \cdot S_1^2}{84,434}} = \sqrt{\frac{375,131 \cdot 1 - 52,734 \cdot 1^2}{84,434}} = 1,954 \text{ м/с.}$$

8. Продиференціюємо за часом рівняння (1.40) і визначимо  $a_1$ :

$$\begin{aligned} 84,434 \cdot 2 \cdot V_1 \cdot \dot{V}_1 &= 375,131 \cdot \dot{S}_1 - 52,734 \cdot 2 \cdot S_1 \cdot \dot{S}_1; \\ 168,868 \cdot V_1 \cdot a_1 &= 375,131 \cdot V_1 - 105,468 \cdot S_1 \cdot V_1; \\ a_1 &= \frac{375,131 - 105,468 \cdot S_1}{168,868} = \frac{375,131 - 105,468 \cdot 1}{168,868} = 1,597 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

9. Виразимо прискорення тіл 2 і 3 через  $a_1$  і визначимо їх величини у даний проміжок часу:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{a_1}{r} = \frac{1,597}{0,16} = 9,981 \text{ с}^{-2}; \\ a_3 &= \frac{R}{2r} \cdot a_1 = \frac{0,30}{2 \cdot 0,16} \cdot 1,597 = 1,497 \text{ м/с}^2; \\ \varepsilon_3 &= \frac{R}{2r \cdot R_3} \cdot a_1 = \frac{0,30}{2 \cdot 0,16 \cdot 0,18} \cdot 1,597 = 8,318 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

10. Визначимо величини інерціальних навантажень тіл системи:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m_1 \cdot a_1 = 80 \cdot 1,597 = 127,76 \text{ Н}; \\ L_2^\Phi &= J_2 \cdot \varepsilon_2 = m_2 \cdot i_2^2 \cdot \varepsilon_2 = 40 \cdot 0,20^2 \cdot 9,981 = 15,970 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ \Phi_3 &= m_3 \cdot a_3 = 20 \cdot 1,497 = 29,94 \text{ Н}; \\ L_3^\Phi &= J_3 \cdot \varepsilon_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot R_3^2 \cdot \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,18^2 \cdot 8,318 = 2,695 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

11. Формуємо схему для визначення сил натягіння ниток. Для цього відокремлюємо тіла із системи і прикладаємо до кожного з них активні сили, реакції в'язей, включно з силами натягіння ниток –  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_3$ , також інерційні навантаження –  $\bar{\Phi}_1$ ,  $L_2^\Phi$ ,  $\bar{\Phi}_3$  і  $L_3^\Phi$  (рис. 1.19). Згідно з принципом Даламбера кожне з тіл системи під дією означених сил повинно знаходитись у рівновазі.

12. З умов рівноваги визначаємо сили натягіння ниток.

Тіло 1:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= P + m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - P_1^T - \Phi_1 - F_1 = 0; \\ F_1 &= P + m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - P_1^T - \Phi_1 = P + m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot g \cdot f \cdot \cos \alpha - \Phi_1 = \\ &= 600 + 80 \cdot 9,81 \cdot 0,5 - 80 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \cdot 0,866 - 127,76 = 600 + 392,4 - 203,891 - \\ &- 127,76 = 660,749 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Тіло 3:

$$\sum m_{P_3} = F_3 \cdot 2R_3 - m_3 \cdot g \cdot \sin \beta \cdot R_3 - P_{np} \cdot R_3 - \Phi_3 \cdot R_3 - L_3^\Phi - M_K^T = 0;$$

$$P_{np} = c \cdot S_3 = c \cdot S_1 \cdot \frac{R_2}{2r_2} = 120 \cdot 1 \cdot \frac{0,30}{2 \cdot 0,16} = 112,5 \text{ Н};$$

$$M_k^T = N_3 \cdot f_k = m_3 \cdot g \cdot f_k \cdot \cos \beta = 20 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 = 0,785 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$F_3 = \frac{1}{2R_3} \cdot (m_3 \cdot g \cdot \sin \beta \cdot R_3 + P_{np} \cdot R_3 + \Phi_3 \cdot R_3 + L_3^\Phi + M_k^T) = \frac{1}{2 \cdot 0,18} \times \\ \times (20 \cdot 9,81 \cdot 0,866 \cdot 0,18 + 112,5 \cdot 0,18 + 29,94 \cdot 0,18 + 2,695 + 0,785) = 165,841 \text{ Н}.$$

13. Виконаємо перевірку отриманих результатів, проаналізувавши виконання умови кінестатичної рівноваги тіла 2:

$$F'_1 = F_1 = 660,749 \text{ Н}; \quad F'_3 = F_3 = 165,841 \text{ Н}.$$

$$\sum m_{c_2} = F'_1 \cdot r - F'_3 \cdot R - M - L_2^\Phi = 660,749 \cdot 0,16 - 165,841 \cdot 0,30 - \\ - 40 - 15,970 = 105,720 - 49,752 - 40 - 15,970 = \\ = 105,720 - 105,722 \approx 0.$$

Умова кінестатичної рівноваги виконується, що свідчить про вірність виконаних розрахунків.

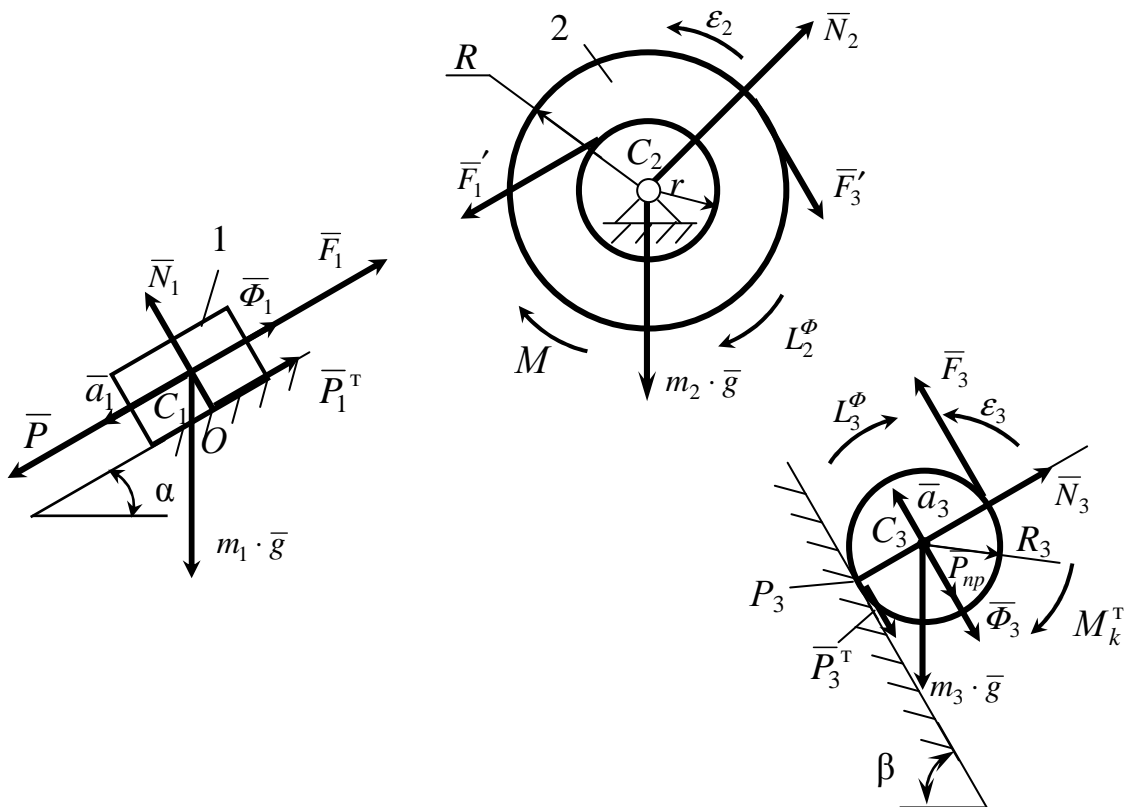


Рисунок 1.19 – Розрахункова схема 2 до прикладу задачі 1.3

## 2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»

### 2.1 Розрахунок статично визначуваної стрижневої системи, яка працює на розтягання-стискання

Із розрахунку на міцність підібрати розміри поперечних перерізів стрижнів:

стрижень 1 – круглого поперечного перерізу;

стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків;

стрижень 3 – двотаврового поперечного перерізу.

Знайти абсолютне подовження (укорочення) стрижнів, якщо  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Вихідні дані вибрати із таблиць 2.1 і 2.2 і рисунку 2.1.

*Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі 2.1*

| Величини | Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|          | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $a$ , м  | 0,8   | 0,6 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 1,8 | 1,6 |
| $b$ , м  | 1,1   | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 1,3 | 0,8 | 2,2 | 2,4 |
| $c$ , м  | 1,2   | 1,4 | 0,8 | 0,6 | 2,0 | 2,2 | 1,1 | 1,8 | 1,7 | 1,6 |
| $d$ , м  | 1,6   | 2,5 | 2,0 | 0,6 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,8 | 1,5 | 0,8 |

*Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі 2.1*

| Величини   | Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|            | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $M$ , кН·м | 100   | 120 | 200 | 80  | 300 | 100 | 220 | 160 | 140 | 250 |
| $P$ , кН   | 400   | 300 | 450 | 200 | 350 | 240 | 250 | 280 | 340 | 320 |
| $q$ , кН/м | 200   | 150 | 250 | 300 | 350 | 400 | 280 | 350 | 380 | 320 |

#### 2.1.1 Методичні вказівки до задачі 2.1

Для стрижневих систем, зображених на рис. 2.1, характерно те, що всі стрижні мають постійну по довжині площу поперечного перерізу і незмінну величину поздовжньої сили, яка дорівнює реакції відповідного стрижня.

Умова міцності для таких систем має вид:

$$\sigma_i = \frac{|N_i|}{F_i} \leq [\sigma], \quad (2.1)$$

де  $\sigma_i$  – модуль напруження у всіх точках  $i$ -того стрижня;

$N_i$  – поздовжня сила в цьому стрижні;

$F_i$  – площа його поперечного перерізу;

$[\sigma]$  – допустиме напруження для матеріалу стрижнів при розтягання-стисканні.



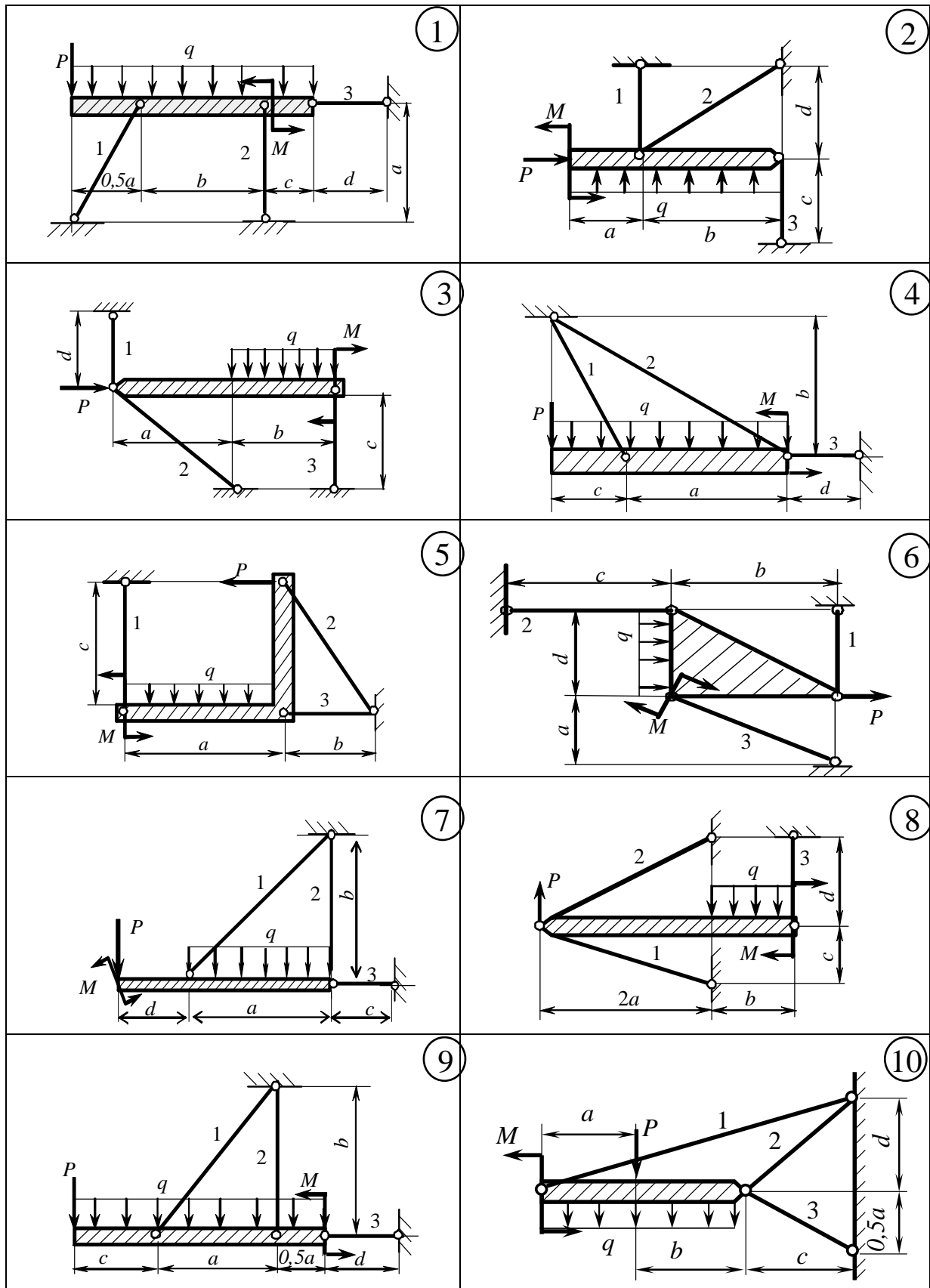


Рисунок 2.1 – Схеми до варіантів задачі 2.1

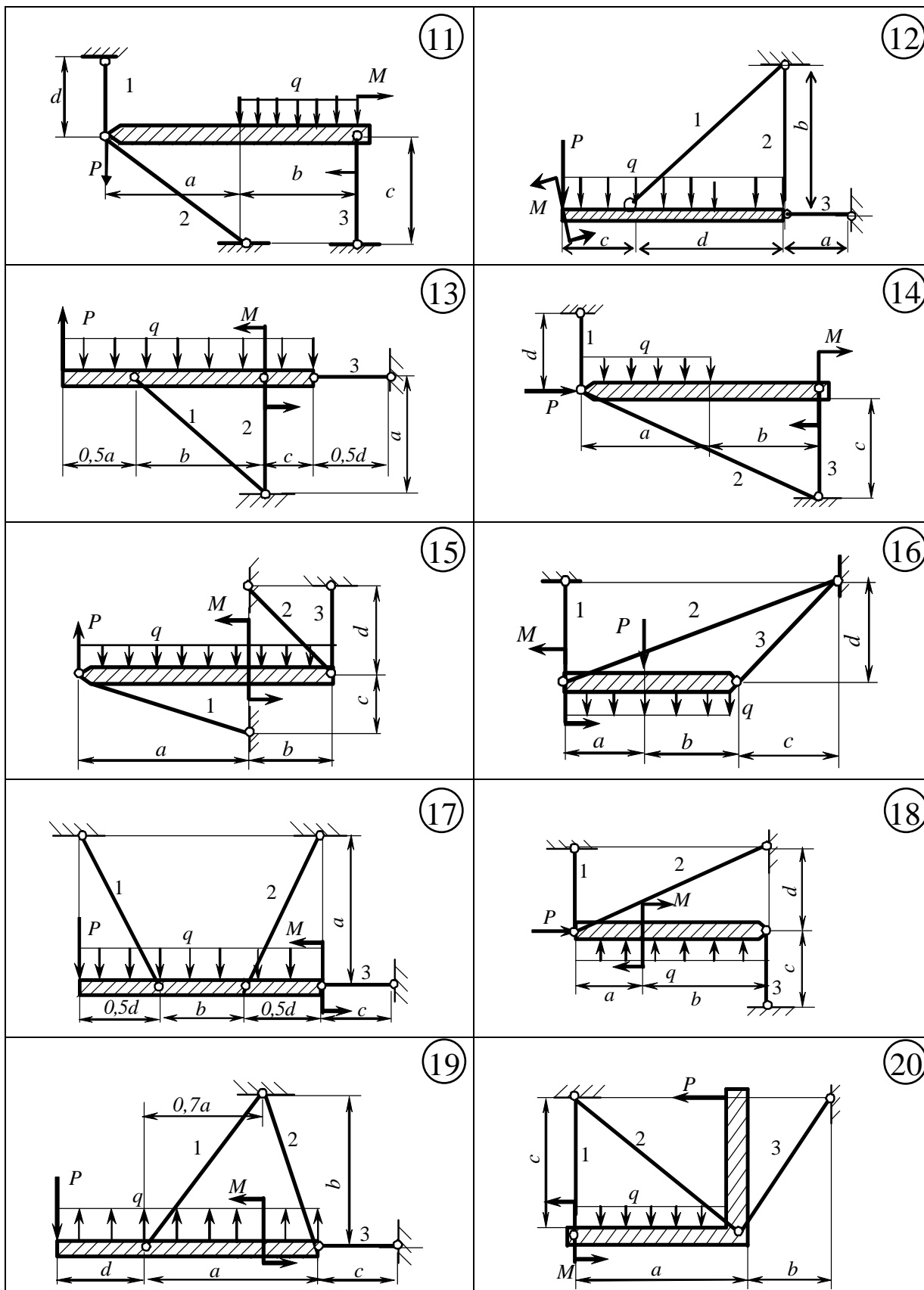


Рисунок 2.1, аркуш 2

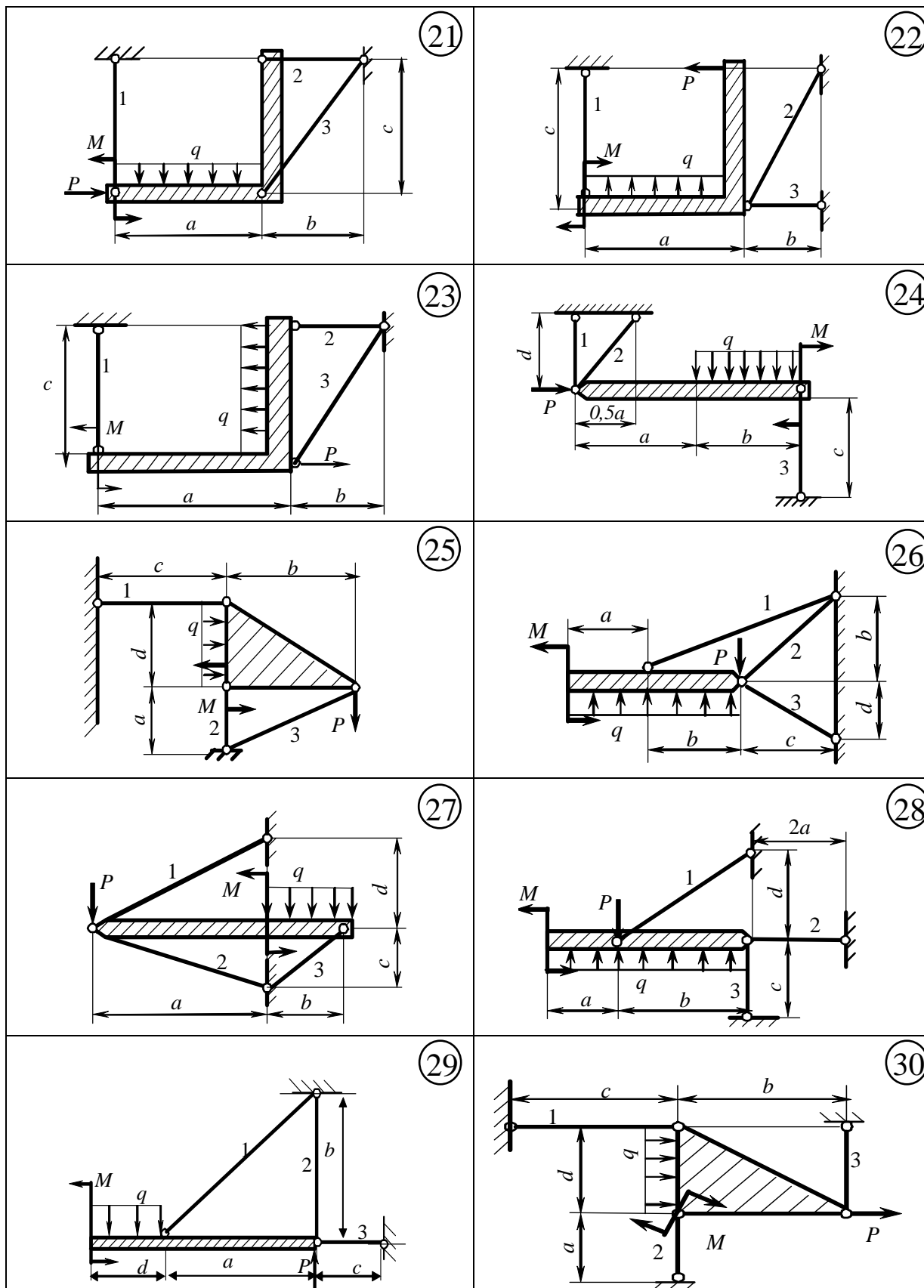


Рисунок 2.1, аркуш 3

Слід зауважити, що зазначені стрижневі системи є статично визначуваними, бо для визначення поздовжніх сил у стрижнях кожної з них достатньо рівнянь статичної рівноваги системи.

Задачу слід розв'язувати у такій послідовності.

1. З умови рівноваги визначити поздовжні сили у стрижнях системи.
2. Із умови (2.1) визначити потрібну площу поперечного перерізу кожного стрижня:

$$F_i \geq \frac{|N_i|}{[\sigma]}. \quad (2.2)$$

3. Визначити розміри поперечних перерізів стрижнів, зважаючи на їх задану форму.

а) Стрижень 1 має круглий переріз. Для нього:

$$F_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ звідки } d = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}}. \quad (2.3)$$

б) Стрижень 2 складається з двох рівнобічних кутиків. Для нього:

$$F_2 = 2F_{\text{кут}}, \text{ звідки } F_{\text{кут}} \geq \frac{F_2}{2}. \quad (2.4)$$

в) Стрижень 3 – двотавр. Для нього:

$$F_{\text{дв}} \geq F_3. \quad (2.5)$$

4. Знайдені величини  $d$ ,  $F_{\text{кут}}$  і  $F_3$  слід округлити до стандартних значень, керуючись відповідними таблицями сортаменту (додаток А).

5. Визначити абсолютне подовження (або скорочення) кожного із стрижнів системи:

$$\Delta \ell_i = \frac{N_i \cdot \ell_i}{E \cdot F_i}, \quad (2.6)$$

де  $\ell_i$  – довжина  $i$ -го стрижня;

$E$  – заданий модуль пружності матеріалу стрижнів (сталі);

$F_i$  – площа поперечного перерізу підбраного профілю.

### 2.1.2 Приклад розв'язання задачі 2.1

Схема конструкції зображена на рисунку 2.2.

Числові дані до задачі:  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 4$  м,  $P = 200$  кН,  $M = 250$  кНм,  $q = 300$  кН/м.

#### Розв'язання:

1. Позначаємо осі координат. Стрижні відкидаємо, а їхню дію на тіло, яке є заштрихованим, замінюємо реакціями  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  і  $\bar{N}_3$ , котрі спрямовані уздовж відповідних стрижнів (від тіла, якщо вважати стрижні розтягнутими) і дорівнюють поздовжнім силам у цих стрижнях. Позначаємо також потрібні точки і кут  $\alpha$  (рис. 2.3).

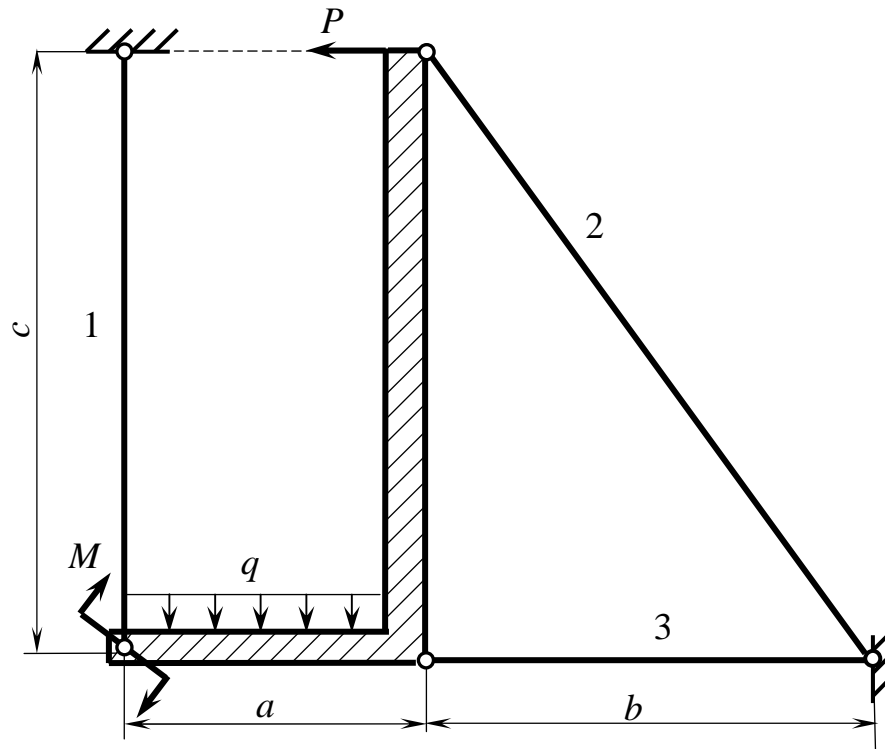


Рисунок 2.2 – Схема конструкції до прикладу задачі 2.1

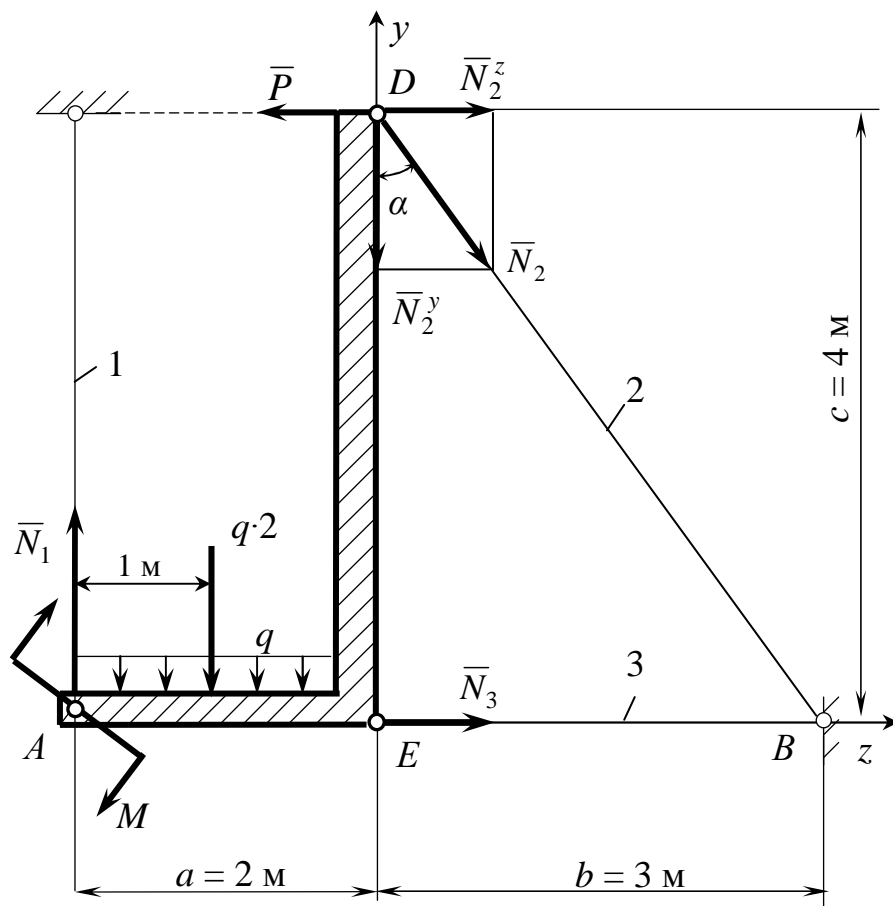


Рисунок 2.3 – Розрахункова схема до прикладу задачі 2.1

2. Спростуємо систему сил. Розподілене навантаження замінюємо його рівнодійною, яка дорівнює площі епюри цього навантаження і прикладена посередині навантаженої ділянки тіла. Силу  $\bar{N}_2$  розкладаємо на складові уздовж осей координат -  $\bar{N}_2^y$  і  $\bar{N}_2^z$  (див. рис. 2.3). Значення цих складових визначаємо таким чином:

$$N_2^y = N_2 \cdot \cos \alpha ,$$

$$N_2^z = N_2 \cdot \sin \alpha .$$

При цьому значення  $\sin \alpha$  і  $\cos \alpha$  підраховуємо, використовуючи прямокутний трикутник  $DBE$ :

$$\sin \alpha = \frac{BE}{BD} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0,6 ,$$

$$\cos \alpha = \frac{DE}{BD} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5} = 0,8 .$$

3. Класифікуємо діючу систему сил. Вона є довільною плоскою, для якої можна скласти три незалежних рівняння рівноваги, саме стільки, скільки невідомих реакцій присутнє в даній задачі.

4. Складаємо ці рівняння. З усіх можливих варіантів вибираємо такі, які забезпечують найбільш просте розв'язання рівнянь рівноваги, а саме:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0 : -M - q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 4 - N_2 \cdot \cos \alpha \cdot 2 - N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 4 = 0; & (2.7) \\ \sum m_B = 0 : -M + q \cdot 2 \cdot 4 + P \cdot 4 - N_1 \cdot 5 = 0; & (2.8) \\ \sum P_z = 0 : N_3 + N_2 \cdot \sin \alpha - P = 0. & (2.9) \end{cases}$$

5. Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги.

Із (2.7) знаходимо значення  $N_2$ :

$$\begin{aligned} -250 - 600 + 800 - N_2 \cdot 0,8 \cdot 2 - N_2 \cdot 0,6 \cdot 4 &= 0 ; \\ -50 - 4 \cdot N_2 &= 0 ; \\ N_2 &= -\frac{50}{4} = -12,5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Із (2.8) знаходимо значення  $N_1$ :

$$N_1 = \frac{1}{5} \cdot (-10M + 10q \cdot 2 \cdot 4 + 10P \cdot 4) = \frac{1}{5} \cdot (-250 + 2400 + 800) = \frac{2950}{5} = 590 \text{ кН.}$$

Із (2.9) знаходимо значення  $N_3$ :

$$N_3 = -N_2 \cdot \sin \alpha + P = -(-12,5) \cdot 0,6 + 200 = 207,5 \text{ кН.}$$

6. Виконуємо перевірку розв'язання системи рівнянь. Для цього складаємо додаткове рівняння рівноваги і підставляємо в нього знайдені величини зусиль у стрижнях конструкції:

$$\sum P_y = N_1 - q \cdot 2 - N_2 \cdot \cos \alpha = 590 - 600 - (-12,5) \cdot 0,8 = 600 - 600 = 0.$$

Оскільки ця умова рівноваги виконується, робимо висновок про вірність знайдених зусиль. Їхні знаки вказують на те, що стрижні 1 і 3 розтягнуті ( $N_1$ , і  $N_3$  – додатні), а стрижень 2 – стиснутий ( $N_2$  – від'ємне).

7. Тепер за допомогою формул (2.2)-(2.5) визначимо розміри поперечних перерізів стрижнів.

а) Стрижень 1:

$$F_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{590 \cdot 10^3}{160} = 3688 \text{ мм}^2; d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3688}{3,14}} = 68,5 \text{ мм}.$$

Приймаємо:  $d = 71$  мм.

б) Стрижень 2:

$$F_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{12,5 \cdot 10^3}{160} = 78 \text{ мм}^2 = 0,78 \text{ см}^2; F_{\text{кут}} \geq \frac{F_2}{2} = \frac{0,78}{2} = 0,39 \text{ см}^2.$$

Приймаємо: кутик 20x20x3, у якого  $F_{\text{кут}} = 1,13 \text{ см}^2$  (це – найменший з кутиків, наведених у сортаменті).

в) Стрижень 3:

$$F_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{207,5 \cdot 10^3}{160} = 1297 \text{ мм}^2 = 12,97 \text{ см}^2; F_{\text{дв}} \geq F_3 = 12,97 \text{ см}^2.$$

Приймаємо: двотавр 12, у якого  $F_{\text{дв}} = 14,7 \text{ см}^2$ .

8. Визначаємо абсолютні подовження (скорочення) стрижнів системи:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{N_1 \cdot l_1 \cdot 4}{E \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{590 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 71^2} = 3,0 \text{ мм (подовження);}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot 2F_{\text{кут}}} = -\frac{12,5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 1,13 \cdot 10^2} = -1,4 \text{ мм (скорочення);}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_{\text{дв}}} = \frac{207,5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 14,7 \cdot 10^2} = 2,1 \text{ мм (подовження),}$$

де  $l_1 = c = 4$  м;  $l_2 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  м;  $l_3 = b = 3$  м (див. рис. 2.3).

## 2.2 Визначення головних моментів інерції складного перерізу

Для заданого складного перерізу із стандартних профілів прокату визначити величини головних моментів інерції (тобто моментів інерції перерізу відносно його головних центральних осей).

Вихідні дані вибрати з таблиць 2.3 і 2.4 та рисунку 2.4.

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до задачі 2.2

| Величини       | Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                | 0   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| Номер двотавра | 18  | 20 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 40 | 33 |
| Номер швелера  | 24  | 22 | 27 | 20 | 18 | 33 | 40 | 30 | 30 | 36 |

Таблиця 2.4 – Вихідні дані до задачі 2.2

| Величини           | Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта |         |           |           |            |            |          |          |            |            |
|--------------------|---|---------|-----------|-----------|------------|------------|----------|----------|------------|------------|
|                    | 0   | 1       | 2         | 3         | 4          | 5          | 6        | 7        | 8          | 9          |
| Розміри кутика, мм | 80x50x5   | 90x56x8 | 100x63x10 | 140x90x10 | 160x100x12 | 180x110x12 | 100x63x7 | 140x90x8 | 160x100x14 | 180x110x12 |
| Розміри смуги, см  | 24x1,2  | 28x1,4  | 26x1,2    | 30x1,5    | 28x1,4     | 32x1,2     | 34x1,5   | 36x1,2   | 40x0,8     | 34x1,2     |

### 2.2.1 Методичні вказівки до задачі 2.2

Головними центральними осями перерізу зуться осі координат ( $U$ ,  $V$ ), що проходять через його центр ваги таким чином, щоб відцентровий момент інерції перерізу відносно цих осей дорівнював нулю, а осьові моменти інерції були екстремальними.

Виходячи з цього, можна встановити такий порядок дій для розв'язання задачі:

1. На схемі перерізу позначаються центри ваги простих фігур, з яких складається переріз (це – точки  $C_i$ ), та їх центральні осі ( $X_i$ ,  $Y_i$ ), також початкові осі координат ( $X$ ,  $Y$ ) для визначення положення центра ваги всього перерізу (точки  $C$ ).



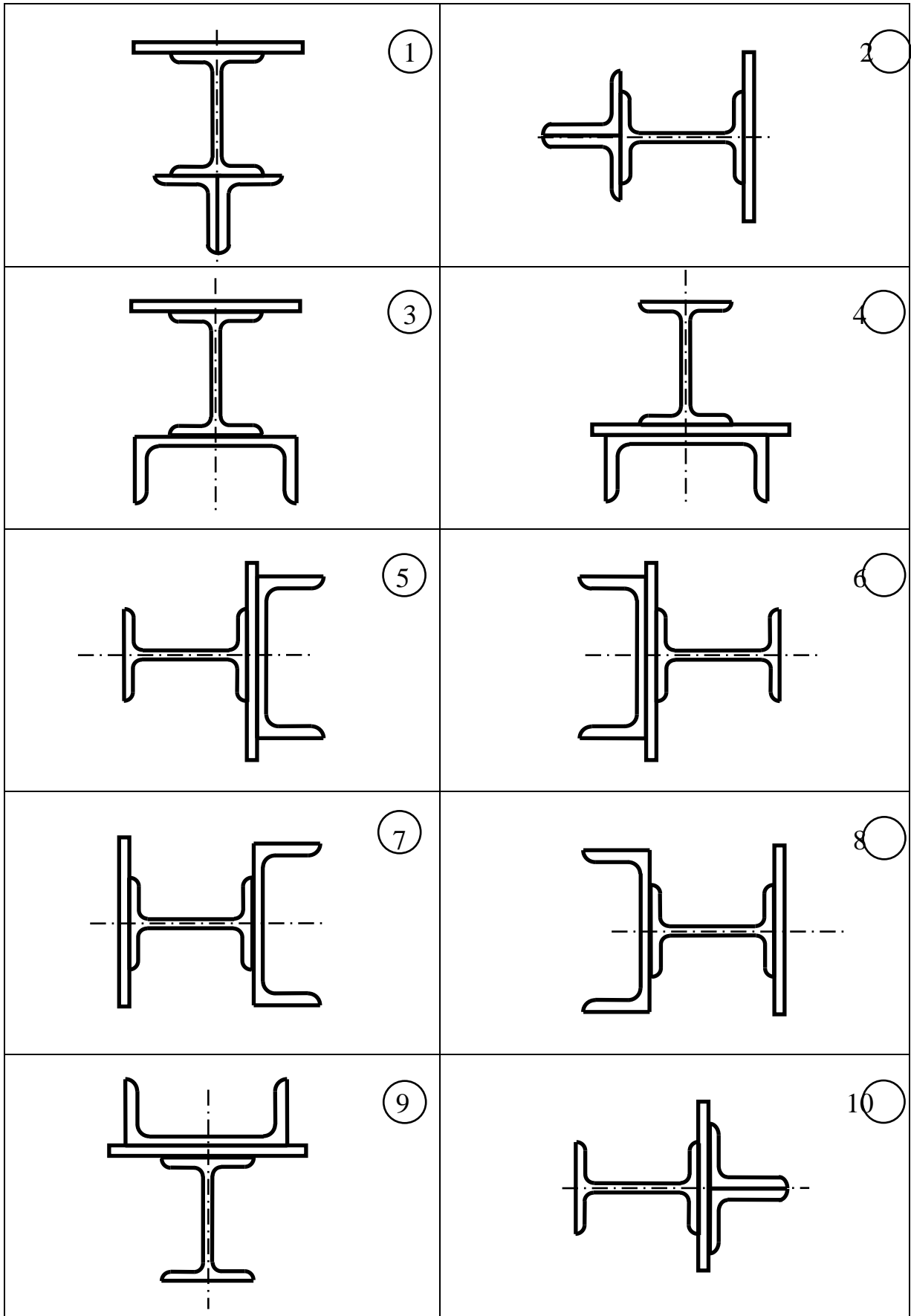


Рисунок 2.4 – Схеми перерізів до варіантів задачі 2.2

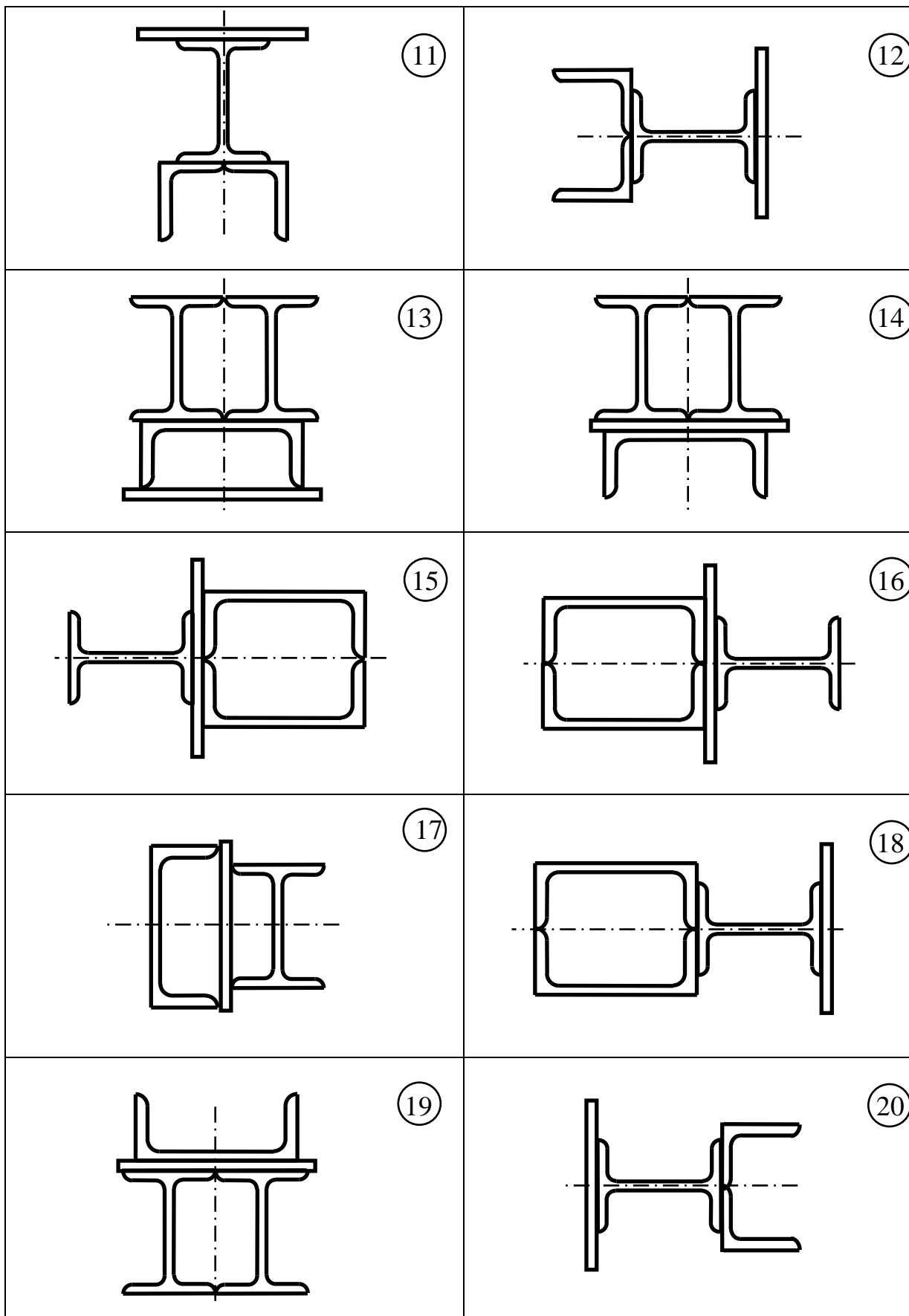


Рисунок 2.4, аркуш 2

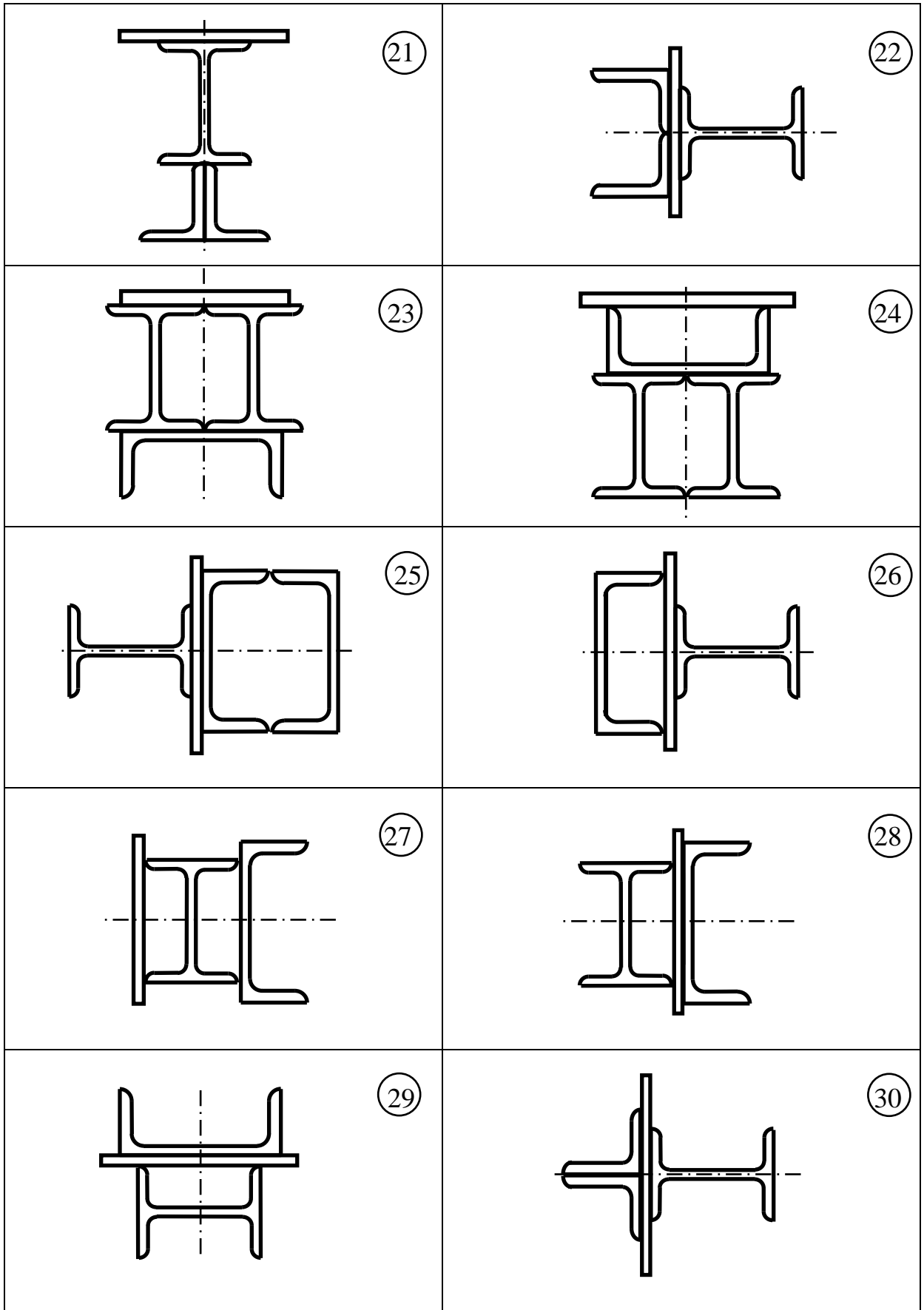


Рисунок 2.4, аркуш 3

2. У системі початкових осей визначаються координати центру ваги перерізу:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (2.10)$$

де  $x_i, y_i$  – координати центру ваги  $i$ -тої простої фігури (точки  $C_i$ );  
 $F_i$  – площа цієї фігури;  
 $n$  – число простих фігур у складному перерізі.

3. За знайденими координатами на схемі перерізу позначається точка  $C$  і через неї проводяться центральні осі перерізу –  $X_C, Y_C$ . У зв'язку з тим, що одна з цих осей є віссю симетрії, зазначені осі – головні центральні осі перерізу.

4. Визначаються величини головних моментів інерції:

$$J_U = J_{X_C} = \sum_{i=1}^n (J_{X_i} + a_i^2 \cdot F_i); \quad J_V = J_{Y_C} = \sum_{i=1}^n (J_{Y_i} + b_i^2 \cdot F_i), \quad (2.11)$$

де  $J_{X_i}, J_{Y_i}$  – моменти інерції  $i$ -тої простої фігури відносно її центральних осей;

$a_i$  – відстань між осями  $X_i$  та  $X_C$ ;

$b_i$  – відстань між осями  $Y_i$  та  $Y_C$ .

Для смуги величини  $J_{X_i}$  та  $J_{Y_i}$  визначаються за формулами:

$$J_{X_i} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3; \quad J_{Y_i} = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3, \quad (2.12)$$

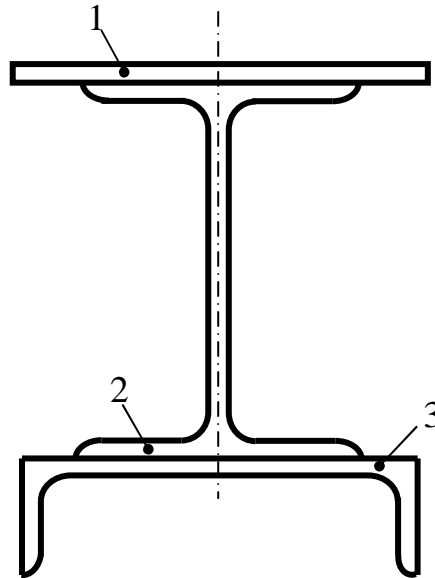
де  $X_i, Y_i$  – центральні осі поперечного перерізу смуги (прямокутника);

$b, h$  – його розміри уздовж осей  $X_i$  та  $Y_i$  відповідно.

Для інших профілів прокату величини  $J_{X_i}$  та  $J_{Y_i}$  визначаються із таблиць сортаменту (див. додаток А).

### 2.2.2 Приклад розв'язання задачі 2.2

Схема складного перерізу до цього прикладу зображена на рис. 2.5, розрахункова схема – на рис. 2.6.



1 – смуга 27 x 1,2 см<sup>2</sup>; 2 – двотавр 24; 3 – швелер 22  
Рисунок 2.5 – Схема перерізу до прикладу задачі 2.2

**Розв’язання:**

1. Визначаємо положення центру ваги перерізу. Оскільки переріз є симетричним відносно вертикальної осі, шукаємо тільки вертикальну координату точки  $C$  (її горизонтальна координата дорівнює нулю):

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

де  $y_1, y_2, y_3$  – вертикальні координати центрів ваги відповідно смуги, двотавра і швелера (точок  $C_1, C_2, C_3$ ) в початковій системі координат;  
 $F_1, F_2, F_3$  – площі зазначених фігур.

З урахуванням цих даних маємо:

$$y_C = \frac{12,6 \cdot 32,4 + 0 \cdot 34,8 + 14,21 \cdot 26,7}{32,4 + 34,8 + 26,7} = 0,31 \text{ см.}$$

2. На схемі перерізу позначаємо точку  $C$  з координатами  $x_C = 0, y_C = 0,31$  см і проводимо через неї осі  $X_C(U), Y_C(V)$  (див. рис. 2.6).

3. Визначаємо необхідні дані для підрахунку головних моментів інерції перерізу.

Величини моментів інерції двотавра і швелера відносно своїх центральних осей беремо із сортаменту:

$$J_{X_2} = 3460 \text{ см}^4; \quad J_{Y_2} = 198 \text{ см}^4;$$

$$J_{X_3} = 151 \text{ см}^4; \quad J_{Y_3} = 2110 \text{ см}^4.$$

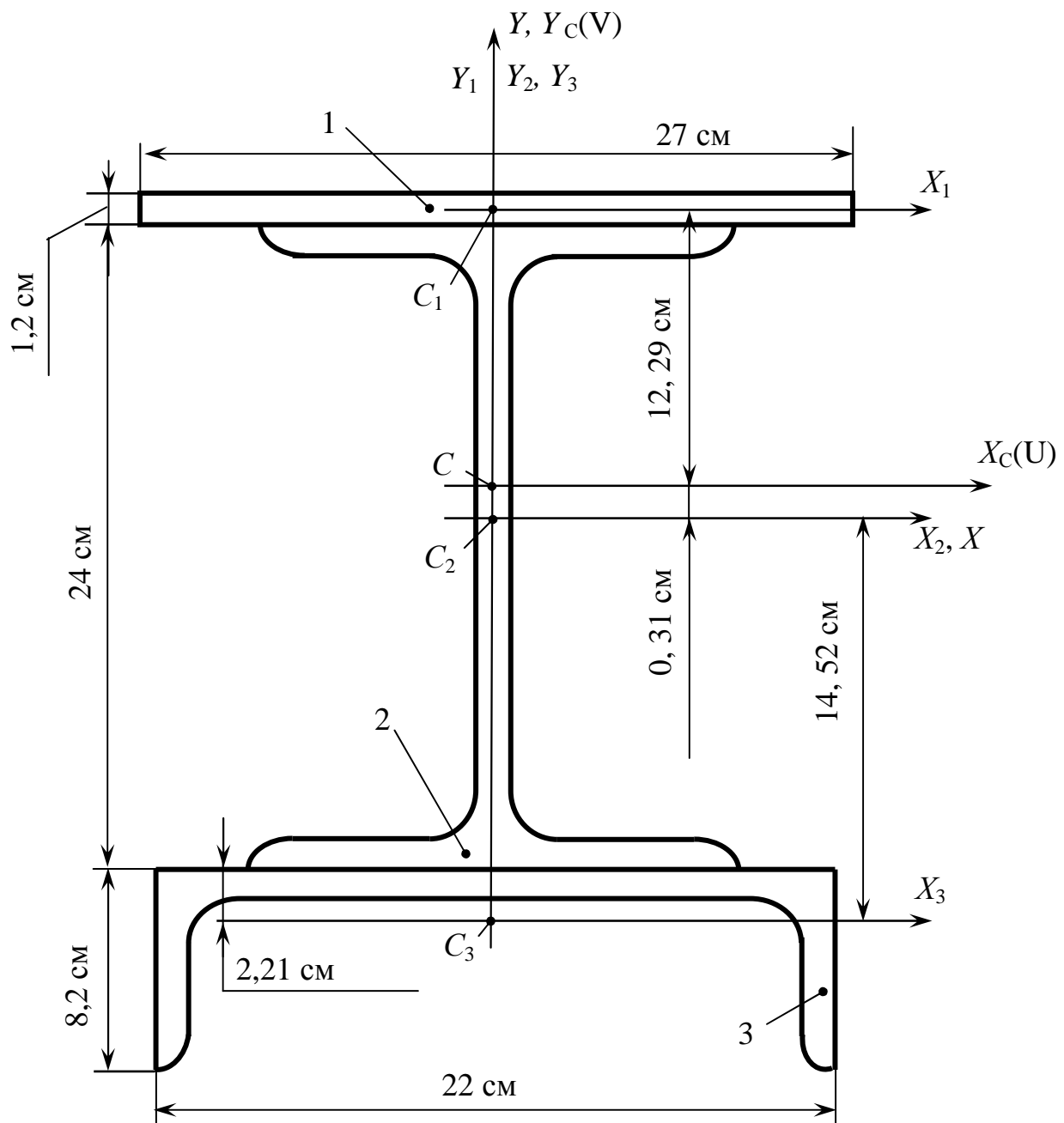


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема до прикладу задачі 2.2

Тут величини  $J_{X_3}$  та  $J_{Y_3}$  визначені з урахуванням того, що швелер у даному випадку розташований горизонтально, а в сортаменті – вертикально.

Значення величин  $J_{X_1}$  та  $J_{Y_1}$  (для смуги) розраховані за допомогою формул (2.12):

$$J_{X_1} = \frac{27 \cdot 1,2^3}{12} = 3,888 \text{ см}^4 \approx 4 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_1} = \frac{1,2 \cdot 27^3}{12} = 1968 \text{ см}^4.$$

Відстані між головними центральними осями і власними центральними осями частин перерізу:

$$a_1 = y_1 - y_C = 12,6 - 0,31 = 12,29 \text{ см};$$

$$a_2 = y_C - y_2 = 0,31 - 0 = 0,31 \text{ см};$$

$$a_3 = y_C + |y_3| = 0,31 + 14,21 = 14,52 \text{ см};$$

$b_1 = b_2 = b_3 = 0$ , бо точки  $C_1, C_2, C_3$  лежать на осі  $Y_C$ .

4. Підраховуємо головні моменти інерції перерізу:

$$J_U = J_{X_C} = \sum_{i=1}^3 (J_{X_i} + a_i^2 \cdot F_i) = 4 + 12,29^2 \cdot 32,4 + 3460 + 0,31^2 \cdot 34,8 + 151 + 14,52^2 \cdot 26,7 = 14141 \text{ см}^4;$$

$$J_V = J_{Y_C} = \sum_{i=1}^3 (J_{Y_i} + b_i^2 \cdot F_i) = 1968 + 198 + 2110 = 4276 \text{ см}^4.$$

### 2.3 Розрахунок статично визначуваної сталеві балки в умовах плоского згину

Для заданої сталеві балки підібрати розміри двотаврового, круглого і прямокутного (зі співвідношенням сторін  $h:b = 2$ ) перерізів, вибрати оптимальний варіант і провести повну перевірку на міцність за IV теорією міцності. Визначити переміщення точки  $L$  і кут повороту перерізу  $L$  балки.

Вихідні дані вибрати з таблиць 2.5 та 2.6 і рисунку 2.7.

Таблиця 2.5 – Вихідні дані до задачі 2.3

| Величини         | Значення величин відповідно до першої цифри номера варіанта |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                  | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $[\sigma]$ , МПа | 150   | 160 | 170 | 220 | 140 | 180 | 200 | 120 | 210 | 190 |
| $M$ , кН·м       | 20  | 50  | 80  | 30  | 40  | 65  | 35  | 55  | 45  | 70  |
| $P$ , кН         | 30  | 40  | 60  | 70  | 20  | 35  | 65  | 25  | 45  | 55  |
| $q$ , кН/м       | 12  | 10  | 14  | 20  | 16  | 22  | 18  | 15  | 18  | 24  |

Таблиця 2.6 – Вихідні дані до задачі 2.3

| Величини | Значення величин відповідно до другої цифри номера варіанта |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|          | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $a$ , м  | 2,0   | 2,2 | 2,4 | 2,3 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 2,1 |
| $b$ , м  | 1,8   | 1,9 | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 |
| $c$ , м  | 1,6   | 1,4 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| $d$ , м  | 1,4   | 1,8 | 2,2 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,6 | 1,8 | 1,6 | 1,8 |

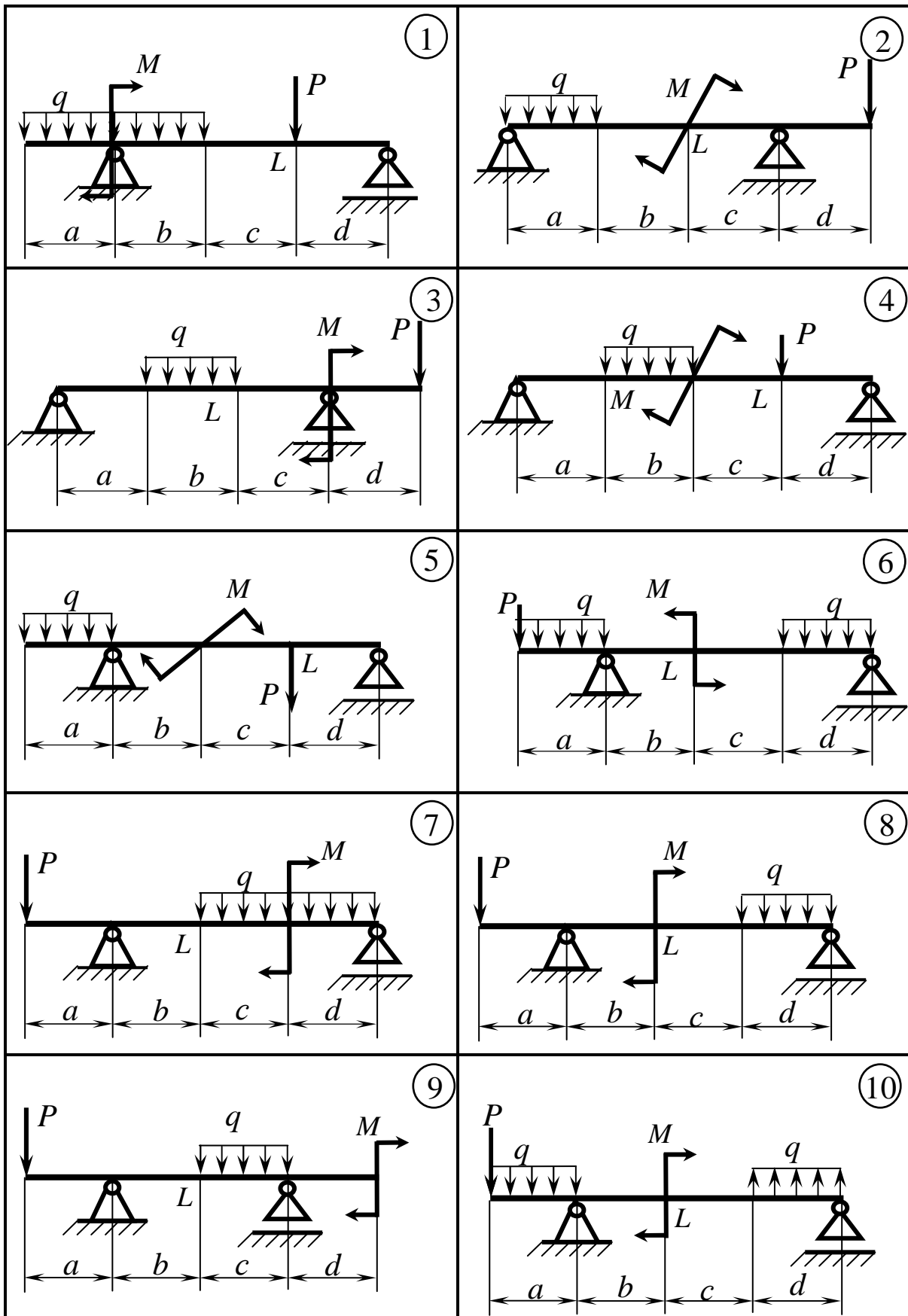


Рисунок 2.7 – Схеми до варіантів задачі 2.3



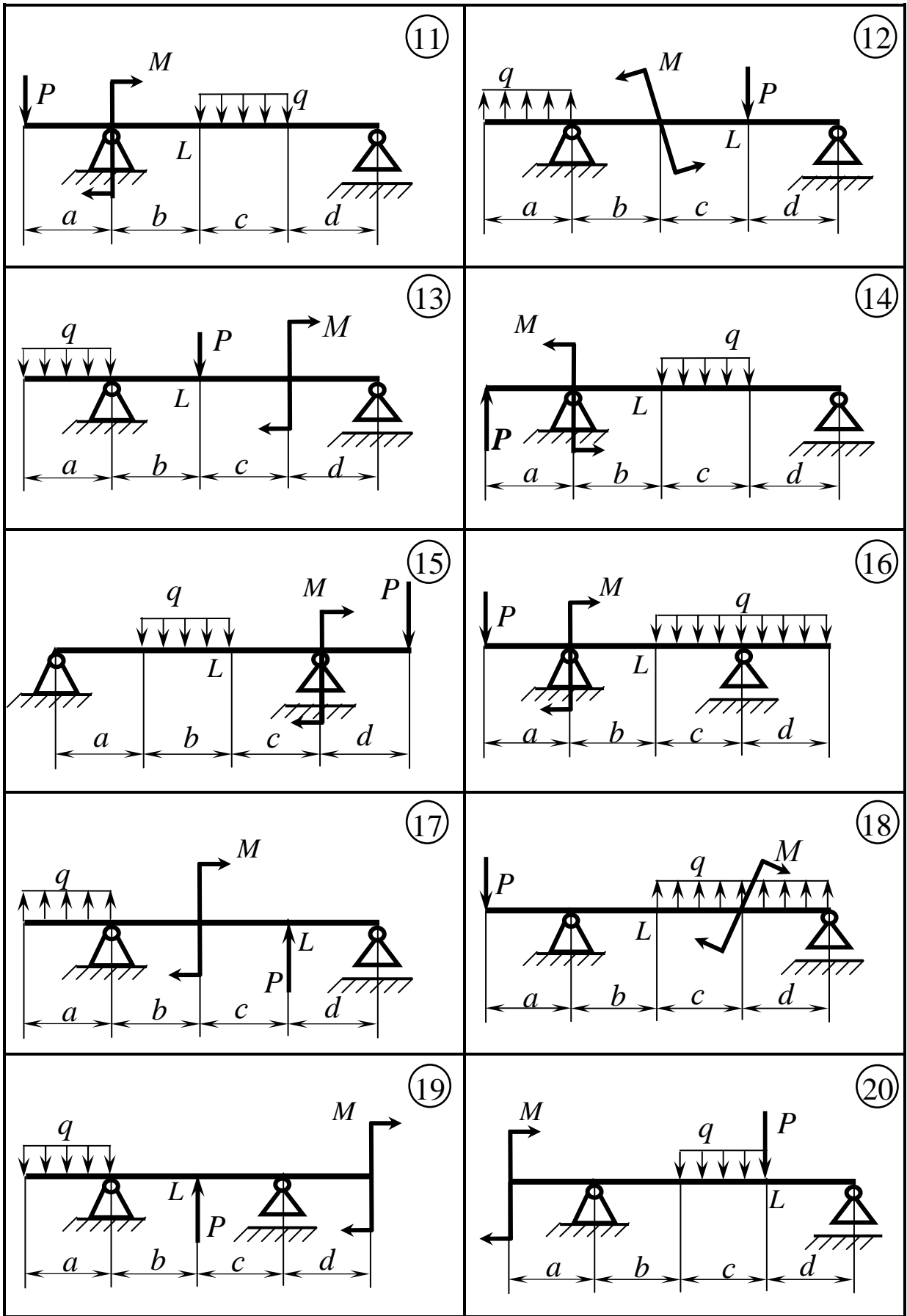


Рисунок 2.7, аркуш 2

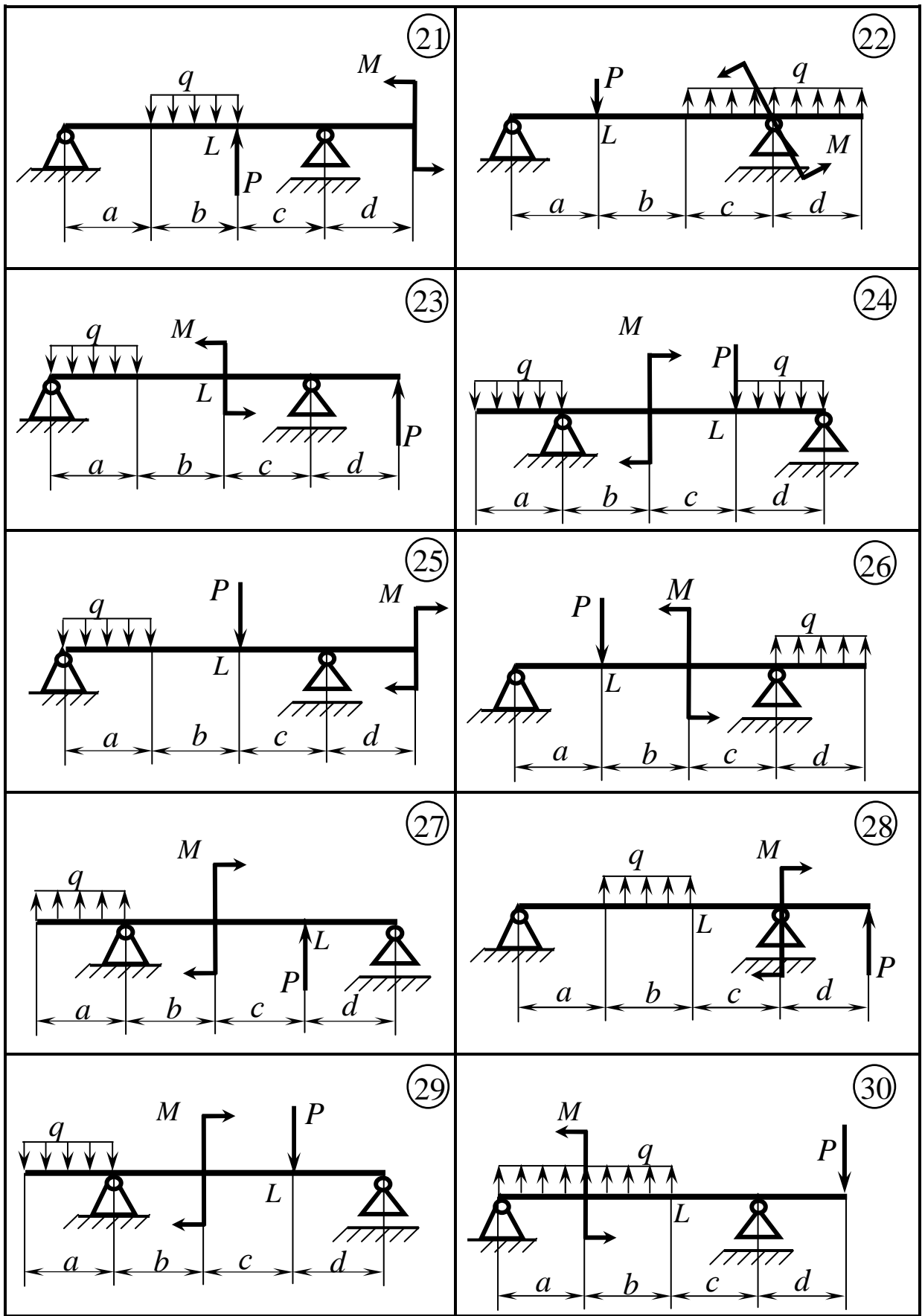


Рисунок 2.7, аркуш 3

### 2.3.1 Методичні вказівки до задачі 2.3

Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

1. Визначаються опорні реакції балки.
2. Будується епюри поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ .
3. З аналізу епюри згинальних моментів визначається максимальний за модулем згинальний момент  $M_{max}$ .
4. З умови міцності за нормальними напруженнями визначається потрібний осьовий момент опору перерізу балки –  $W_x$ :

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (2.13)$$

5. Із сортаменту (див. додаток А) вибирається потрібний номер двотавра і визначаються потрібні розміри круглого й прямокутного перерізів:

а) Круг:

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}}; \quad (2.14)$$

б) Прямокутник:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3; \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot W_x}. \quad (2.15)$$

6. Визначаються і порівнюються між собою площі зазначених варіантів перерізу балки. Найбільш доцільним (оптимальним) з економічної точки зору є той варіант, у якого площа перерізу найменша. Подальші розрахунки проводяться саме для цього варіанту (ним повинен стати двотавр).

7. Перевіряється міцність балки за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.16)$$

де  $\sigma_{max}$  – максимальне за модулем нормальне напруження в балці;

$[\sigma]$  – допустиме нормальне напруження для матеріалу балки.

8. З аналізу епюри поперечних сил визначається максимальна поперечна сила  $Q_{max}$ .

9. Перевіряється міцність балки за дотичними напруженнями відповідно до умови:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau], \quad (2.17)$$

де  $S_x$  – статичний момент половини площини перерізу відносно осі  $x$ ;

$d$  – ширина перерізу на осі  $x$  (рис. 2.8);

$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$ ;

$$[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}. \quad (2.18)$$

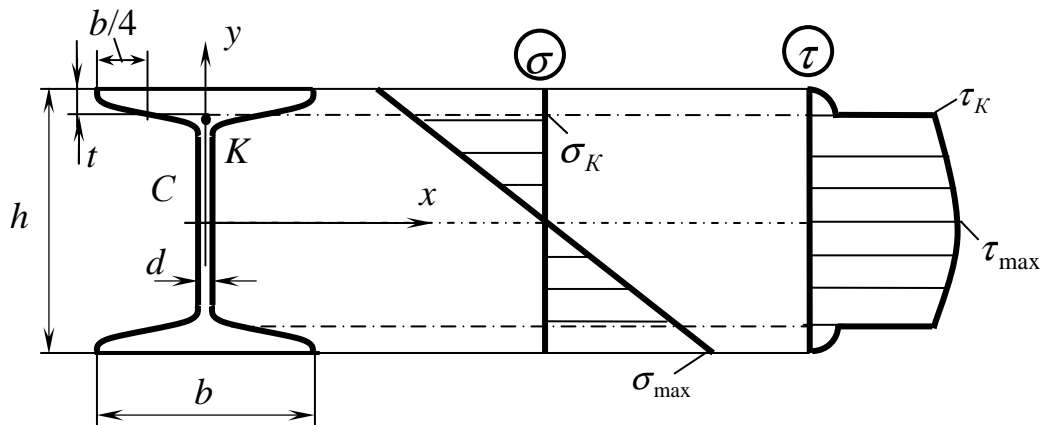


Рисунок 2.8 – Епюри нормальних ( $\sigma$ ) і дотичних ( $\tau$ ) напружень у поперечних перерізах балки

10. Перевіряється міцність балки за еквівалентними напруженнями відповідно до умови:

$$\sigma_{екв}^{\max} \leq [\sigma], \quad (2.19)$$

де  $\sigma_{екв}^{\max}$  – найбільше зі значень еквівалентних напружень у точках  $K$  (див. рис. 2.8) потенціально небезпечних перерізів балки, тобто таких перерізів, в яких  $M = M_{\max}$  і  $Q \neq 0$ , або  $Q = Q_{\max}$  і  $M \neq 0$ , або  $M$  і  $Q$  і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

Підрахунки еквівалентних напружень в точках  $K$  зазначених перерізів виконуються із застосуванням формул:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3\tau_K^2}; \quad (2.20)$$

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K; \quad (2.21)$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot J_x}, \quad (2.22)$$

де  $M$  і  $Q$  – відповідно згинальний момент і поперечна сила в кожному із зазначених перерізів;

$y_K$  – відстань точки  $K$  до осі  $x$  (див. рис. 2.8):

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad (2.23)$$

$S_x^*$  – статичний момент відносно осі  $x$  частини перерізу, яка розташована вище точки  $K$ :

$$S_x^* = 0,5 \cdot b \cdot t \cdot (h - t). \quad (2.24)$$

Підрахунок  $\sigma_k^{екв}$  у найбільш навантаженому (небезпечному) перерізі супроводжується рисунком, на якому проставляються конкретні значення розмірів перерізу та підраховані величини  $\sigma_k$  і  $\tau_k$ .

11. У випадку, коли будь-яка з умов міцності не виконується, слід вибрати наступний більший номер двотавра і перевірку повторити.

12. Переміщення в балці визначаються методом Мора.

Для визначення заданого лінійного переміщення в точці  $L$  ненавантаженої балки прикладається вертикальна одинична сила  $P' = 1$ , визначаються від її дії опорні реакції балки і будується епюра згинальних моментів  $\bar{M}_1$ . Після цього зазначене переміщення визначається шляхом "перемноження" із застосуванням формули крайніх ординат (додаток Б) епюри  $\bar{M}_1$  і раніше побудованої епюри згинальних моментів від заданого навантаження –  $M$  :

$$\delta_L = M \times \bar{M}_1. \quad (2.25)$$

Для визначення кута повороту перерізу  $L$  балки – дії ті самі, але замість одиничної сили до балки прикладається одиничний момент  $M' = 1$ . В цьому разі:

$$\theta_L = M \times \bar{M}_2, \quad (2.26)$$

де  $\bar{M}_2$  – епюра згинальних моментів від дії одиничного моменту  $M' = 1$ .

### 2.3.2 Приклад розв'язання задачі 2.3

Схема балки зображена на рисунку 2.9. Числові дані до задачі:  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $c = 4$  м,  $P = 20$  кН,  $M = 25$  кН·м,  $q = 30$  кН/м,  $[\sigma] = 160$  МПа.

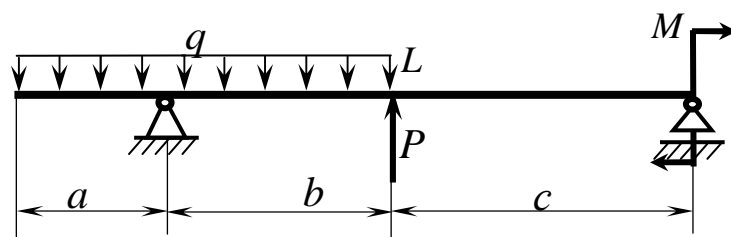
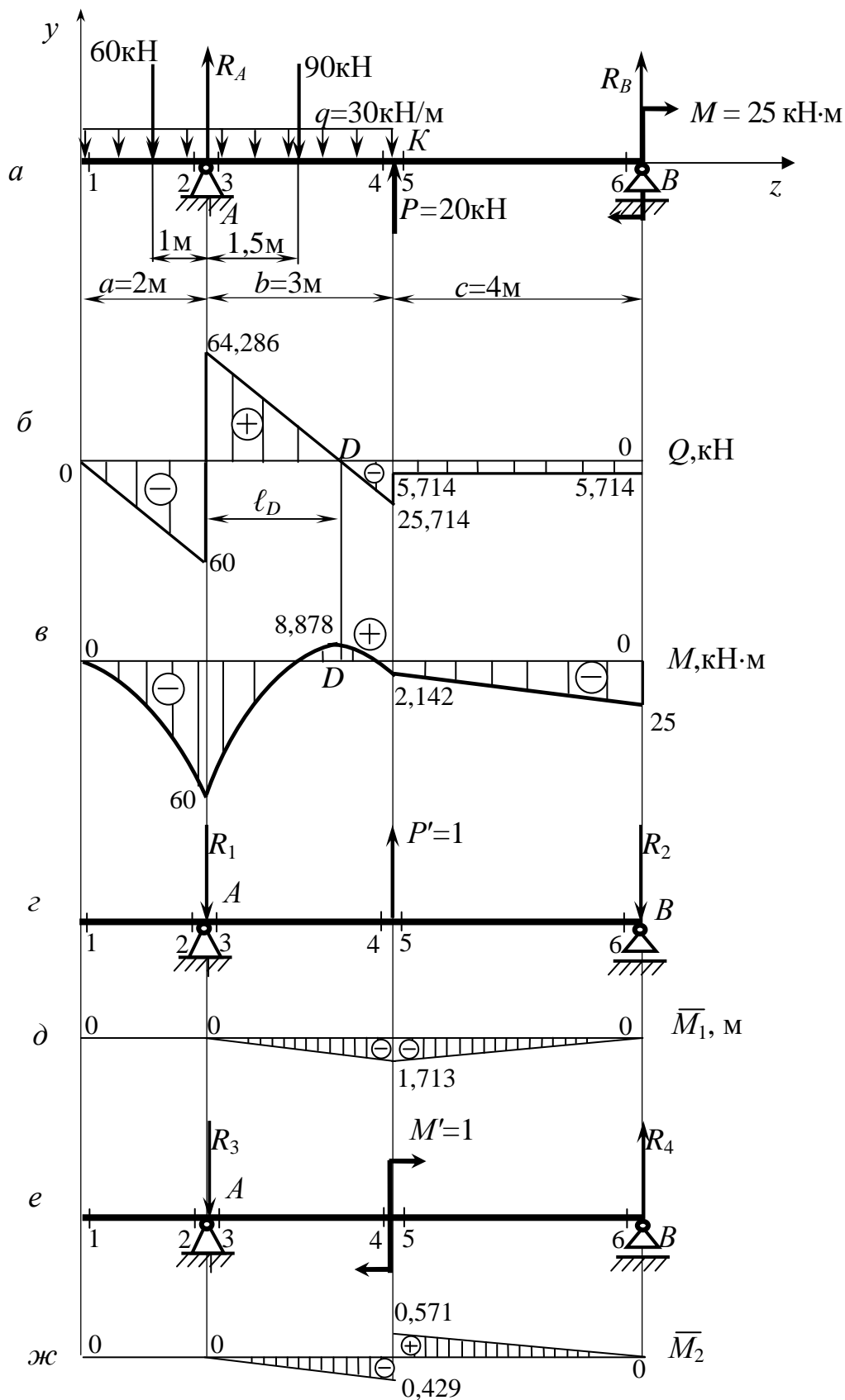


Рисунок 2.9 – Схема балки до прикладу задачі 2.3

#### Розв'язання:

1. Позначаємо осі координат, опорні точки і реакції, нумеруємо характерні перерізи балки (тобто ті, які розташовані у безпосередній близькості до сил і моменту, на початку і в кінці ділянок з розподіленим навантаженням). Обидві ділянки розподіленого навантаження замінюємо їх рівнодійними (рис. 2.10,а).



а – розрахункова схема балки; б – епюра поперечних сил; в – епюра згинальних моментів; г, д – навантаження балки одиничною силою і епюра згинальних моментів від цього навантаження; е, ж – навантаження балки одиничним моментом і епюра згинальних моментів від нього  
Рисунок 2.10 – Графічні побудови до прикладу задачі 2.3

2. Визначаємо опорні реакції балки із рівнянь рівноваги.

$$\sum m_A = 0: \quad q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + P \cdot b - M + R_B \cdot (b + c) = 0;$$

$$R_B = \frac{1}{b + c} \left( -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - P \cdot b + M \right) = \frac{1}{7} (-60 + 135 - 60 + 25) = 5,714 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0: \quad q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + b + c \right) - R_A \cdot (b + c) + q \cdot b \cdot \left( \frac{b}{2} + c \right) - P \cdot c - M = 0.$$

$$R_A = \frac{1}{b + c} \left( q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + b + c \right) + q \cdot b \cdot \left( \frac{b}{2} + c \right) - P \cdot c - M \right) = \\ = \frac{1}{7} (480 + 495 - 60 + 25) = 124,286 \text{ кН.}$$

Виконаємо перевірку:

$$\sum P_y = -q \cdot a + R_A - q \cdot b + P + R_B = \\ = -60 + 124,286 - 90 + 20 + 5,714 = -150 + 150 = 0.$$

Перевірка дає позитивний результат, тому робимо висновок про вірність визначення опорних реакцій.

3. Будуємо епюру поперечних сил для балки –  $Q$  (рис. 2.10,б). При цьому:

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = -q \cdot a = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН}; \\ Q_3 = Q_2 + R_A = -60 + 124,286 = 64,286 \text{ кН}; \\ Q_4 = Q_3 - q \cdot b = 64,286 - 30 \cdot 3 = -25,714 \text{ кН}; \\ Q_5 = Q_4 + P = -25,714 + 20 = -5,714 \text{ кН}; \\ Q_6 = Q_5 = -5,714 \text{ кН}; \\ \ell_D = Q_3 / q = 64,286 / 30 = 2,143 \text{ м.}$$

4. Будуємо епюру згинальних моментів для балки –  $M$  (рис. 2.10,в). При цьому:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_4 = M_5 = -q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + b \right) + R_A \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} = \\ = -30 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + 3 \right) + 124,286 \cdot 3 - 30 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -2,142 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_6 = -M = -25 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_D = -q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + \ell_D \right) + R_A \cdot \ell_D - q \cdot \ell_D \cdot \frac{\ell_D}{2} = \\ = -30 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + 2,143 \right) + 124,268 \cdot 2,143 - 30 \cdot 2,143 \cdot \frac{2,143}{2} = 8,878 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

5. За формулою (2.13) знаходимо потрібний осьовий момент опору перерізу балки –  $W_x$ :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{160} = 375 \text{ см}^3.$$

6. Переходимо до підбору перерізів.

а) Двотавровий переріз:

За таблицею сортаменту (див. додаток А) приймаємо двотавр 27а, у якого  $W_x = 407 \text{ см}^3$ ;  $h = 270 \text{ мм}$ ;  $b = 135 \text{ мм}$ ;  $d = 6,0 \text{ мм}$ ;  $t = 10,2 \text{ мм}$ ;  $F = 43,2 \text{ см}^2$ ;  $J_x = 5500 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 229 \text{ см}^3$ .

б) Круглий переріз:

Його діаметр визначаємо за формулою (2.14):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 375 \cdot 10^3}{3,14}} = 156,3 \text{ мм}.$$

Із сортаменту приймаємо  $d = 160 \text{ мм}$ . Площа перерізу в цьому разі становить:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{3,14}{4} \cdot 160^2 = 20096 \text{ мм}^2 = 200,96 \text{ см}^2.$$

в) Прямокутний переріз:

Його менший розмір (ширину) визначаємо за формулою (2.15):

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot W_x} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 375} = 8,255 \text{ см} = 82,55 \text{ мм}.$$

Із сортаменту приймаємо:  $b = 90 \text{ мм}$ ;  $h = 2b = 2 \cdot 90 = 180 \text{ мм}$ . Площа такого перерізу становить:  $F = b \cdot h = 90 \cdot 180 = 16200 \text{ мм}^2 = 162 \text{ см}^2$ .

Порівняння зазначених перерізів свідчить про явну перевагу двотаврового перерізу перед прямокутним і круглим: при однаковій міцності площа двотавра в 3,75 рази менша за площу прямокутника і в 4,65 рази менша за площу круга.

Таким чином, подальші розрахунки ведемо саме для двотаврового перерізу.

7. Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями використовуючи формулу (2.16):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60 \cdot 10^6}{407 \cdot 10^3} = 147,42 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Ця умова міцності є забезпеченою.



8. Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями, використовуючи формулу (2.17):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{64,286 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 44,61 \text{ МПа} < [\tau].$$

Як бачимо, і ця умова міцності виконується.

9. Перевіряємо міцність балки за еквівалентними напруженнями (рис. 2.11).

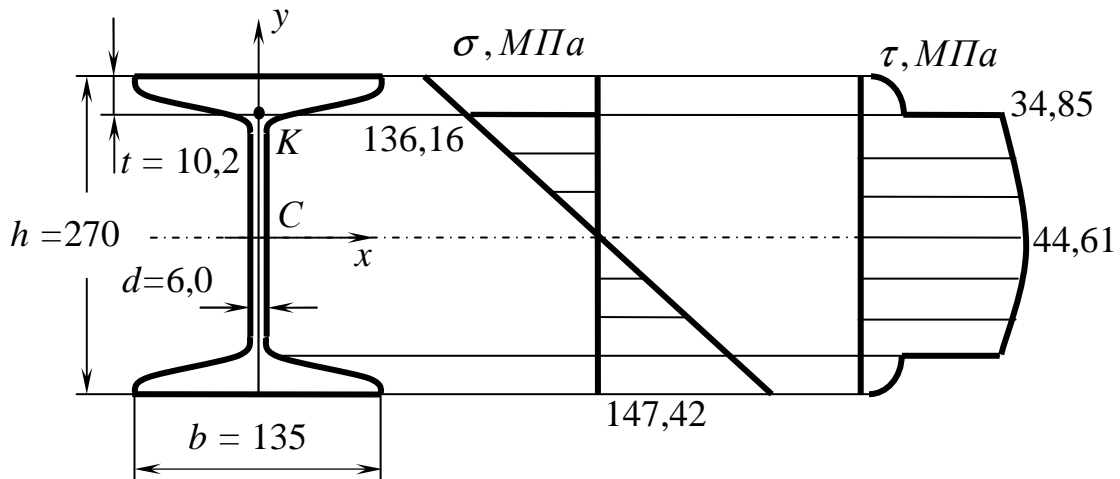


Рисунок 2.11 – Схема до визначення еквівалентних напружень в небезпечному перерізі балки

Аналізуючи рис. 2.10, бачимо, що небезпечним з точки зору еквівалентних напружень є переріз 3 балки, в якому

$$Q = Q_{\max} = 64,286 \text{ кН і } M = M_{\max} = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Розрахунок ведемо само для цього перерізу, використовуючи формули (2.19) – (2.24):

$$y_K = \frac{h}{2} - t = \frac{270}{2} - 10,2 = 124,8 \text{ мм};$$

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K = \frac{60 \cdot 10^6}{5500 \cdot 10^4} \cdot 124,8 = 136,16 \text{ МПа};$$

$$S_x^* = 0,5 \cdot b \cdot t \cdot (h - t) = 0,5 \cdot 135 \cdot 10,2 \cdot (270 - 10,2) = 178872 \text{ мм}^3 = 178,872 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S_x^*}{d \cdot J_x} = \frac{64,286 \cdot 10^3 \cdot 178,872 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 34,85 \text{ МПа};$$

$$\sigma_K^{екв} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3\tau_K^2} = \sqrt{136,16^2 + 3 \cdot 34,85^2} = 148,94 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв}^{\max} = \sigma_K^{екв} = 148,94 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

Ця умова міцності балки також є забезпеченою.

10. Переміщення точки  $L$  балки –  $\delta_L$  визначаємо за методом Мора. Згідно з ним прикладаємо в зазначеній точці одиничну силу  $P' = 1$  (рис. 2.10, г) і будуємо від її дії епюру згинальних моментів –  $\overline{M}_1$  (рис. 2.10, д), визначаючи попередньо реакції опор балки –  $R_1$  і  $R_2$ :

$$\sum m_A = 0: P' \cdot b - R_2 \cdot (b + c) = 0;$$

$$R_2 = \frac{P' \cdot b}{b + c} = \frac{1 \cdot 3}{7} = 0,429.$$

$$\sum m_B = 0: R_1 \cdot (b + c) - P' \cdot c = 0.$$

$$R_1 = \frac{P' \cdot c}{b + c} = \frac{1 \cdot 4}{7} = 0,571.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -R_1 + P' - R_2 = -0,571 + 1 - 0,429 = -1 + 1 = 0.$$

Результат перевірки свідчить про правильність визначення  $R_1$  і  $R_2$ .

Згинальні моменти у характерних перерізах балки в даному разі мають такі значення:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_6 = 0; M_4 = M_5 = -R_1 \cdot b = -1,713 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для визначення  $\delta_L$  застосуємо універсальну формулу крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\begin{aligned} \delta_L = M \times \overline{M}_1 &= \frac{3}{6EJ_x} [(2 \cdot (-60) \cdot 0 + 2 \cdot (-2,142) \cdot (-1,713) + (-60) \cdot (-1,713) + (-2,142) \cdot 0)] + \\ &+ \frac{30 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0 - 1,713) + \frac{4}{6EJ_x} [2 \cdot (-2,142) \cdot (-1,713) + 2 \cdot (-25) \cdot 0 + (-25) \cdot (-1,713)] = \\ &= \frac{184,126}{6EJ_x} = \frac{186,126 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 2,8 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Оскільки величина  $\delta_L$  має знак плюс, точка  $L$  переміщується в напрямку дії одиничної сили, тобто вгору.

7. Кут повороту перерізу  $L$  балки –  $\theta_L$  також визначаємо за методом Мора.

Прикладаємо в точці  $L$  балки одиничний момент  $M' = 1$  і визначаємо від його дії опорні реакції –  $R_3$  і  $R_4$  (рис. 2.10, е):

$$\sum m_A = 0: M' + R_4 \cdot (b + c) = 0; \quad R_4 = \frac{M'}{b + c} = \frac{1}{7} = 0,143 \text{ м}^{-1}.$$

$$\sum m_B = 0: R_3 \cdot (b + c) - M' = 0. \quad R_3 = \frac{M'}{b + c} = \frac{1}{7} = 0,143 \text{ м}^{-1}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -R_3 + R_4 = -0,143 + 1,143 = 0.$$

Результат перевірки підтверджує вірність значень  $R_3$  і  $R_4$ .

Визначаємо згинальні моменти в характерних перерізах балки від дії одиничного моменту ( $M' = 1$ ) і будуємо епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 2.10, ж):

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_3 = M_6 &= 0; \\ M_4 &= -R_3 \cdot b = -0,143 \cdot 3 = -0,429; \\ M_5 &= M_4 + M' = -0,429 + 1 = -0,571. \end{aligned}$$

Значення  $\theta_L$  підраховуємо за допомогою формули крайніх ординат (див. додаток Б):

$$\begin{aligned} \theta_L = M \times \bar{M}_2 &= \frac{3}{6EJ_x} [(2 \cdot (-60) \cdot 0 + 2 \cdot (-2,142) \cdot (-0,429) + (-60) \cdot (-0,429) + (-2,142) \cdot 0)] + \\ &+ \frac{30 \cdot 3^3}{24EJ_x} (0 - 0,429) + \frac{4}{6EJ_x} [2 \cdot (-2,142) \cdot 0,571 + 2 \cdot (-25) \cdot 0 + (-2,142) \cdot 0 + (-25) \cdot 0,571] = \\ &= -\frac{71024}{6EJ_x} = -\frac{71024 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5500 \cdot 10^4} = -0,001 \text{ рад.} \approx -0,057 \text{ град.} \end{aligned}$$

Величина  $\theta_L$  є від'ємною, тож переріз  $L$  обертається проти напрямку одиничного моменту, тобто проти ходу годинникової стрілки.

## 2.4 Підбір перерізу стиснутої стійки

Для заданої стійки довжиною  $\ell$ , що стискається центрально прикладеною силою  $P$ , з умови стійкості підібрати розміри поперечного перерізу, якщо матеріал стійки – сталь Ст.3,  $[\sigma] = 160$  МПа, недовантаження – мінімальне.

Вихідні дані вибрати із таблиць 2.7 та 2.8 і рисунку 2.12.

Таблиця 2.7 – Вихідні дані до задачі 2.4

|                             |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Перша цифра номера варіанта | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| Значення $P$ , кН           | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 |

Таблиця 2.8 – Вихідні дані до задачі 2.4

|                             |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Друга цифра номера варіанта | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| Значення $\ell$ , м         | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |

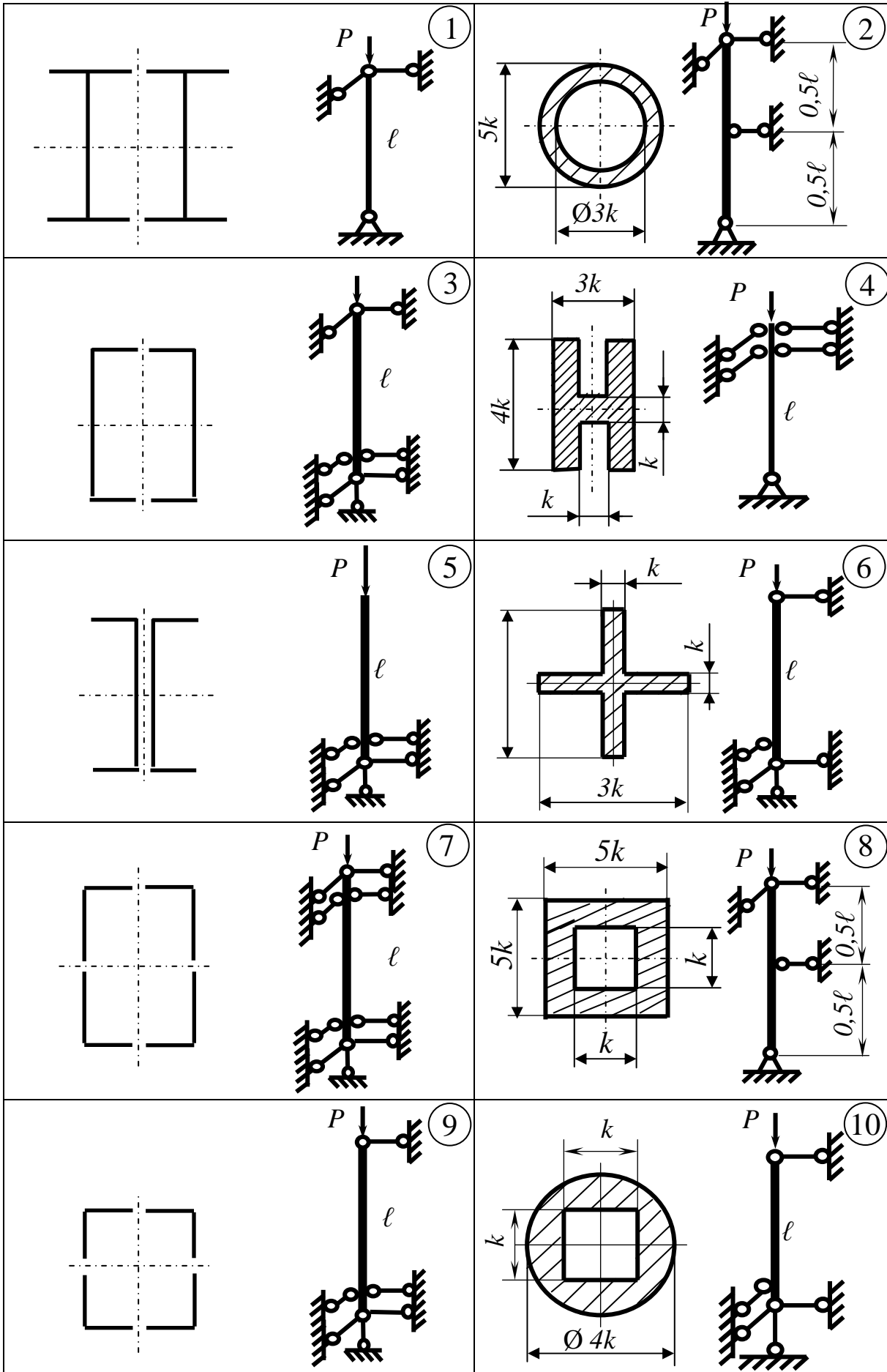


Рисунок 2.12 – Схеми до варіантів задачі 2.4

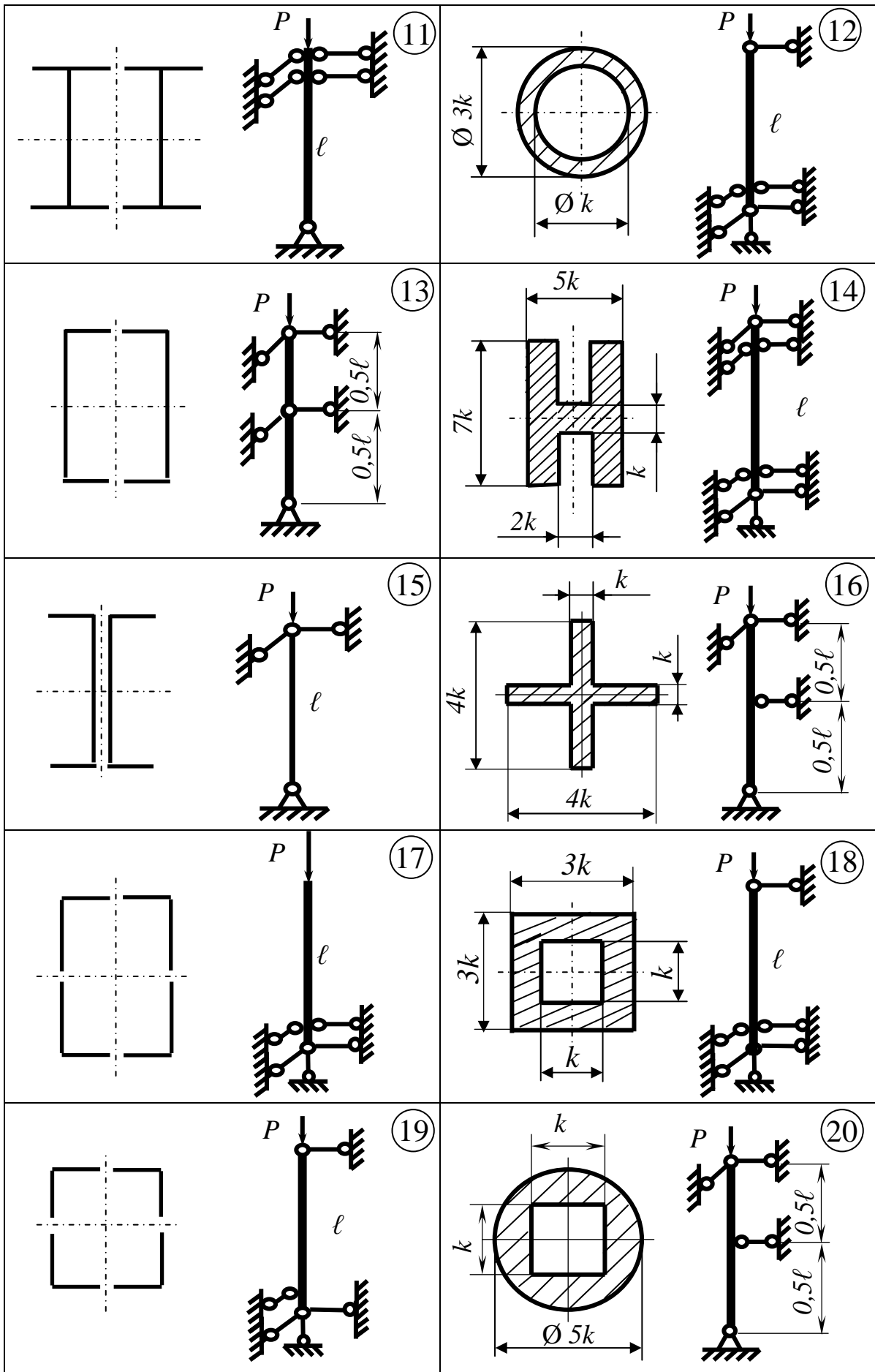


Рисунок 2.12, аркуш 2

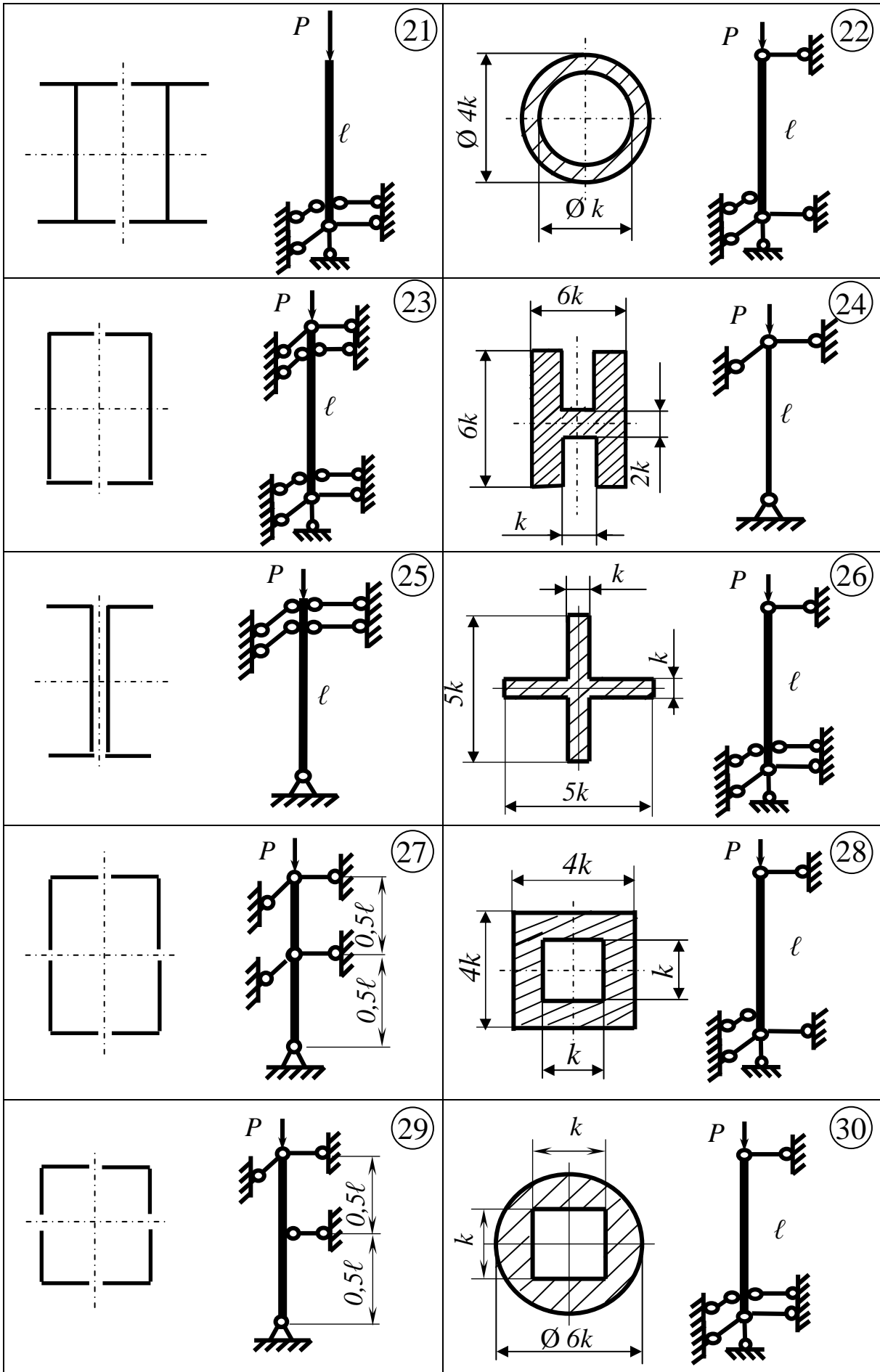


Рисунок 2.12, аркуш 3

### 2.4.1 Методичні вказівки до задачі 2.4

1 Підбір перерізу стиснутої стійки здійснюється з умови її стійкості:

$$\sigma \leq [\sigma_{\text{ст}}], \quad (2.27)$$

$$\text{де } \sigma = \frac{P}{F} \text{ – діюче напруження в стійці}; \quad (2.28)$$

$F$  – площа поперечного перерізу стійки;

$[\sigma_{\text{ст}}]$  – допустиме напруження на стійкість;

$$[\sigma_{\text{ст}}] = \varphi \cdot [\sigma], \quad (2.29)$$

$[\sigma]$  – основне допустиме напруження (при стисканні) для матеріалу стійки;

$\varphi$  – коефіцієнт зниження основного допустимого напруження ( $0 \leq \varphi \leq 1$ ).

Оскільки в умову стійкості входять дві взаємозалежні невідомі величини  $F$  і  $\varphi$ , то задачу варто розв'язувати шляхом послідовних наближень, роблячи крок за кроком.

1. На першому кроці задається деяке початкове значення коефіцієнта  $\varphi$  (найбільш доцільно обирати  $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$ ) і визначається відповідна площа перерізу стійки –  $F_1$ :

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]}. \quad (2.30)$$

Орієнтуючись на значення  $F_1$ , за допомогою таблиць сортаменту (додаток А) визначаються конкретні розміри перерізу і його головні моменти інерції –  $J_x$  та  $J_y$ , а також відповідні радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F_1}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F_1}}. \quad (2.31)$$

Далі визначаються величини гнучкості стійки у головних площинах  $xz$  і  $yz$  ( $x$  і  $y$  – головні центральні осі перерізу,  $z$  – поздовжня вісь стійки):

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y}, \quad \lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x}. \quad (2.32)$$

де  $\mu_{xz}$  і  $\mu_{yz}$  – відповідні коефіцієнти приведення довжини стійки (додаток В).

Для більшого із значень гнучкості і заданого матеріалу стійки визначається величина коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження в кінці першого кроку –  $\varphi'_1$  (див. додаток В).

Після цього виконується перевірка умови стійкості (2.27) з урахуванням знайдених величин  $F_1$  і  $\varphi'_1$ .

При негативному результаті перевірки треба безпосередньо перейти до наступного кроку. При позитивному ж результаті треба спочатку підрахувати величину недовантаження стійки:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{ст}] - \sigma}{[\sigma_{ст}]} \cdot 100 \%. \quad (2.33)$$

Перехід до наступного кроку і в цьому разі є необхідним: він потрібен для визначення мінімально можливої величини недовантаження.

2. На другому кроці початкове значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження визначається як середньозважене його величин на початку і в кінці попереднього кроку:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}. \quad (2.34)$$

Подальший розрахунок на другому кроці – такий же, як і на першому.

3. На подальших кроках (при їх необхідності) процедура розрахунку – така ж, як і на другому кроці.

4. Розрахунок закінчується при виконанні обох вимог завдання, а саме в разі позитивного результату перевірки умови стійкості і досягненні мінімально можливого недовантаження стійки.

#### 2.4.2 Приклад 1 розв'язання задачі 2.4

Схема стійки зображена на рисунку 2.13. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних:  $P = 420$  кН,  $\ell = 3,2$  м.

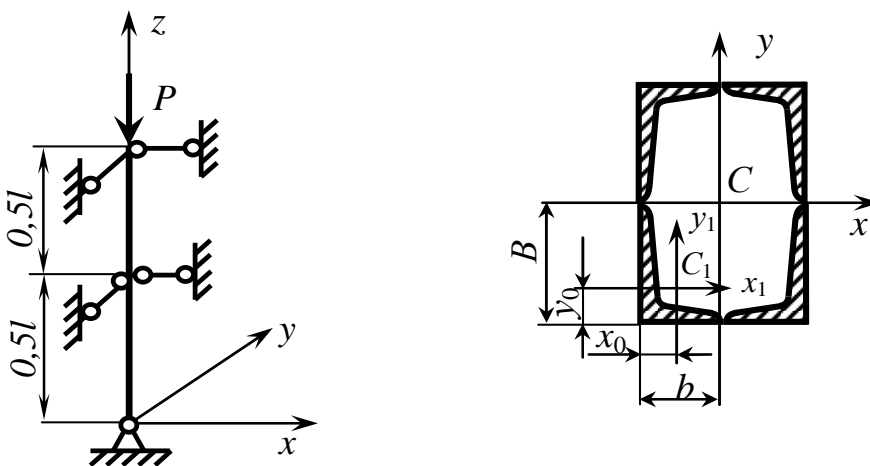


Рисунок 2.13 – Схема стійки до прикладу 1 задачі 2.4

#### Розв'язання:

1. Перший крок

Приймаємо на його початку середнє значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження:  $\varphi_1 = 0,5$ .



Тоді:

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{420 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 5250 \text{ мм}^2 = 52,50 \text{ см}^2.$$

Відповідна площа кожного з чотирьох кутиків, що створюють переріз:

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{52,50}{4} = 13,125 \text{ см}^2.$$

З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо найближчий за площею кутик 110x70x8, у якого  $F_{\text{кут}} = 13,9 \text{ см}^2$ ;  $J_{x1} = 172 \text{ см}^4$ ;  $J_{y1} = 54,6 \text{ см}^4$ ;  $B = 11 \text{ см}$ ;  $b = 7 \text{ см}$ ;  $x_0 = 1,64 \text{ см}$ ;  $y_0 = 3,61 \text{ см}$ .

Підраховуємо головні моменти інерції перерізу стійки:

$$J_x = 4 \cdot [J_{x_1} + F_{\text{кут}} \cdot (B - y_0)^2] = 4 \cdot [172 + 13,9 \cdot (11 - 3,61)^2] = 3724 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4 \cdot [J_{y_1} + F_{\text{кут}} \cdot (b - x_0)^2] = 4 \cdot [54,6 + 13,9 \cdot (7 - 1,64)^2] = 1815 \text{ см}^4;$$

Підраховуємо відповідні радіуси інерції перерізу:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{4 \cdot F_{\text{кут}}}} = \sqrt{\frac{3724}{4 \cdot 13,9}} = 8,18 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{4 \cdot F_{\text{кут}}}} = \sqrt{\frac{1815}{4 \cdot 13,9}} = 5,71 \text{ см}.$$

Для заданої схеми стійки (див. додаток В):

$$\mu_{xz} = \mu_{yz} = \mu = 0,5.$$

Визначаємо величини гнучкості стійки в її головних площинах:

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{5,71} = 28,0;$$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{8,18} = 19,6.$$

Порівнюючи значення  $\lambda_{xz}$  і  $\lambda_{yz}$ , бачимо, що  $\lambda_{\text{max}} = \lambda_{xz}$ . Саме для цього значення  $\lambda$  і ведемо подальший розрахунок.

Зважаючи на те, що у відповідній таблиці (див. додаток В) значення  $\lambda = 28,0$  нема, величину коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження на кінці першого кроку –  $\varphi'_1$  визначимо методом лінійної інтерполяції (рис. 2.14):

$$\varphi'_1 = 0,94 + (30 - 28,0) \cdot \text{tg } \alpha = 0,94 + (30 - 28,0) \cdot \frac{(0,96 - 0,94)}{(30 - 20)} = 0,944.$$

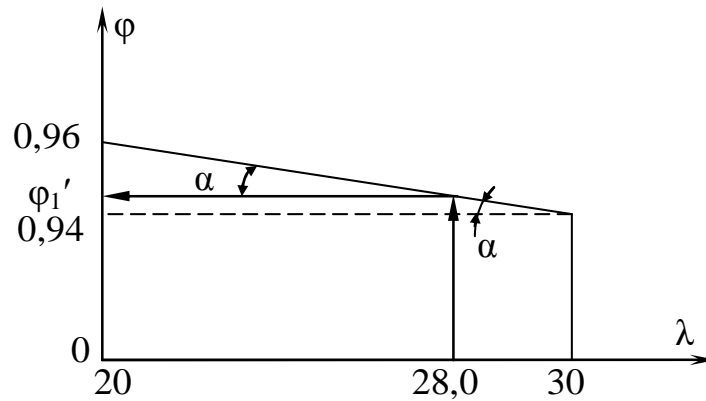


Рисунок 2.14 – Схема до визначення коефіцієнта  $\varphi$  на кінці першого кроку прикладу 1

Виконаємо перевірку на стійкість:

$$\sigma = \frac{P}{4 \cdot F_{\text{кут}}} = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 13,9 \cdot 10^2} = 75,5 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{ст}}] = \varphi_1' \cdot [\sigma] = 0,944 \cdot 160 = 151,0 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості виконується:  $\sigma < [\sigma_{\text{ст}}]$ .

Підрахуємо величину недовантаження на першому кроці:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{\text{ст}}] - \sigma}{[\sigma_{\text{ст}}]} \cdot 100 = \frac{(151,0 - 75,5)}{151,0} \cdot 100 = 50 \% .$$

2. Другий крок

$$\text{Приймаємо: } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,944}{2} = 0,722 .$$

Тоді:

$$F_2 \geq \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{420 \cdot 10^3}{0,722 \cdot 160} = 3636 \text{ мм}^2 = 36,36 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{36,36}{4} = 9,09 \text{ см}^2.$$

Підбираємо кутик 80x60x7, у якого  $F_{\text{кут}} = 9,42 \text{ см}^2$ ;  $J_{y1} = 28,74 \text{ см}^4$ ;  $b = 6 \text{ см}$ ;  $x_0 = 1,53 \text{ см}$  (інші параметри кутика для визначення  $\lambda_{\text{max}}$  не потрібні).

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [28,74 + 9,42 \cdot (6 - 1,53)^2] = 868 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{868}{4 \cdot 9,42}} = 4,80 \text{ см}; \quad \lambda_{\text{max}} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,80} = 33,3 .$$

Величину  $\varphi'_2$  і в цьому разі визначимо методом лінійної інтерполяції, беручи необхідні дані з додатку В:

$$\varphi'_2 = 0,92 + (40 - 33,30) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,933.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 9,42 \cdot 10^2} = 111,5 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{\text{ст}}] = 0,933 \cdot 160 = 149,3 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на другому кроці виконується.  
Недовантаження стійки в цьому разі становить:

$$\Delta = \frac{(149,3 - 111,5)}{149,3} \cdot 100 = 25,3 \text{ \%}.$$

3. Третій крок

Приймаємо:  $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,722 + 0,933}{2} = 0,828.$

Тоді:

$$F_3 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,828 \cdot 160} = 3170 \text{ мм}^2 = 31,70 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{31,70}{4} = 7,925 \text{ см}^2.$$

Підбираємо кутик 80x60x6, у якого  $F_{\text{кут}} = 8,15 \text{ см}^2$ ;  $J_{y1} = 25,18 \text{ см}^4$ ;  
 $b = 6 \text{ см}$ ;  $x_0 = 1,49 \text{ см}$ .

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot \left[ 25,18 + 8,15 \cdot (6 - 1,49)^2 \right] = 764 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{764}{4 \cdot 8,15}} = 4,84 \text{ см};$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,84} = 33,1.$$

Визначимо методом лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_3 = 0,92 + (40 - 33,1) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,934.$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 8,15 \cdot 10^2} = 128,8 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{\text{ст}}] = 0,934 \cdot 160 = 149,4 \text{ МПа}.$$

Умова стійкості на третьому кроці також виконується.  
Недовантаження в цьому разі становить:

$$\Delta = \frac{(149,4 - 128,8)}{149,4} \cdot 100 = 13,8 \% .$$

4. Четвертий крок

$$\text{Приймаємо: } \varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,828 + 0,934}{2} = 0,881 .$$

Тоді:

$$F_4 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,881 \cdot 160} = 2980 \text{ мм}^2 = 29,80 \text{ см}^2 ;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{29,80}{4} = 7,45 \text{ см}^2 .$$

Підбираємо кутик 80x50x6, у якого  $F_{\text{кут}} = 7,55 \text{ см}^2$ ;  $J_{y1} = 14,85 \text{ см}^4$ ;  
 $b = 5 \text{ см}$ ;  $x_0 = 1,17 \text{ см}$ .

Підраховуємо:

$$J_y = 4 \cdot [14,85 + 7,55 \cdot (5 - 1,17)^2] = 502 \text{ см}^4 ;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{502}{4 \cdot 7,55}} = 4,08 \text{ см} ;$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{0,5 \cdot 3,2 \cdot 10^2}{4,08} = 39,2 .$$

Знаходимо за допомогою метода лінійної інтерполяції:

$$\varphi'_4 = 0,92 + (40 - 39,2) \cdot \frac{(0,94 - 0,92)}{(40 - 30)} = 0,922 .$$

Перевіряємо умову стійкості:

$$\sigma = \frac{420 \cdot 10^3}{4 \cdot 7,55 \cdot 10^2} = 139,1 \text{ МПа} ;$$

$$[\sigma_{\text{ст}}] = 0,922 \cdot 160 = 147,5 \text{ МПа} .$$

Умова стійкості на четвертому кроці також виконується.  
Недовантаження в цьому разі становить:

$$\Delta = \frac{(147,52 - 139,1)}{147,52} \cdot 100 = 5,7 \% .$$

5. П'ятий крок

$$\text{Приймаємо: } \varphi_5 = \frac{\varphi_4 + \varphi'_4}{2} = \frac{0,881 + 0,922}{2} = 0,902 .$$

Тоді:

$$F_5 \geq \frac{420 \cdot 10^3}{0,902 \cdot 160} = 2910 \text{ мм}^2 = 29,10 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{кут}} \geq \frac{29,10}{4} = 7,275 \text{ см}^2.$$

Підбираємо кутик 80x50x6, у якого  $F_{\text{кут}} = 7,55 \text{ см}^2$ .

Зважаючи на те, що він вже був на четвертому кроці, розрахунок припиняємо. Вказані розміри кутика є остаточними, а відповідне недовантаження  $\Delta = 5,7\%$  – мінімально можливе.

### 2.4.3 Приклад 2 розв'язання задачі 2.4

Схема стійки зображена на рисунку 2.15. Розрахунок виконаємо при таких вихідних даних:  $P = 320 \text{ кН}$ ,  $\ell = 2,2 \text{ м}$ .

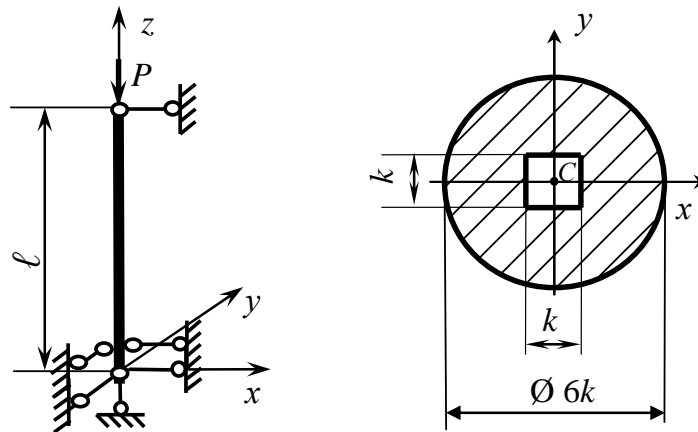


Рисунок 2.15 – Схема стійки до прикладу 2 задачі 2.4

#### Розв'язання:

Особливістю даної схеми є те, що в ній усі розміри перерізу стійки визначає параметр  $k$ . Тому весь розрахунок спрямовується на визначення величини цього параметра.

Враховуємо, що площа перерізу стійки –  $F$  пов'язана з параметром  $k$  такою залежністю:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot (6k)^2 - k^2 = 27,26 \cdot k^2.$$

1. Перший крок.

Приймаємо на його початку  $\varphi_1 = 0,5$ . Тоді відповідна площа перерізу становитиме:

$$F_1 \geq \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 4000 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо величину параметра  $k$  на цьому кроці:

$$k_1 \geq \sqrt{\frac{F_1}{27,26}} = \sqrt{\frac{4000}{27,26}} = 12,1 \text{ мм.}$$

Округляємо величину  $k_1$  до найближчого цілого числа:  $k_1 = 13 \text{ мм.}$

Визначаємо головні моменти інерції перерізу стійки і відповідні радіуси інерції:

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{64} \cdot (6k_1)^4 - \frac{1}{12} \cdot k_1 \cdot k_1^3 = 63,502 \cdot k_1^4 = 63,502 \cdot 13^4 = 1,814 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_x}{27,26 \cdot k_1^2}} = \sqrt{\frac{1,814 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 13^2}} = 19,84 \text{ мм.}$$

Коефіцієнти приведення довжини стійки при заданій схемі її кріплення (рис. 2.16) становлять:  $\mu_{xz} = 0,7$ ;  $\mu_{yz} = \mu_{\max} = 2,0$  (див. додаток В).

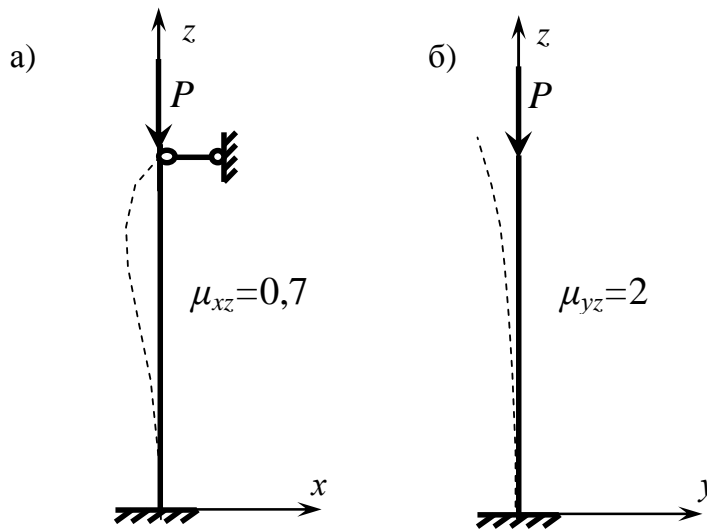


Рисунок 2.16 – Схеми кріплення стійки у площинах  $xz$  і  $yz$

З урахуванням цього визначимо величини гнучкості стійки у її головних площинах  $xz$  і  $yz$ :

$$\lambda_{xz} = \frac{\mu_{xz} \cdot \ell}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{19,84} = 77,6;$$

$$\lambda_{yz} = \frac{\mu_{yz} \cdot \ell}{i_x} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{19,84} = 221,8.$$

Порівнюючи ці величини, бачимо, що  $\lambda_{\max} = \lambda_{yz}$ . Саме це значення гнучкості візьмемо для подальшого розрахунку.

Враховуючи те, що значення  $\lambda = 221,8$  переважає максимальне в додатку В ( $\lambda = 200$ ), приймаємо в кінці першого кроку:

$$\varphi'_1 = \varphi_{\min} = 0.$$

В цьому разі допустиме напруження

$$[\sigma_{cm}] = \varphi'_1 \cdot [\sigma] = 0$$

і перевірка на стійкість не має сенсу. Тому переходимо до наступного кроку.

2. Другий крок

$$\text{Приймаємо: } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0}{2} = 0,25.$$

Тоді:

$$F_2 \geq \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 160} = 8000 \text{ мм}^2.$$

$$k_2 \geq \sqrt{\frac{F_2}{27,26}} = \sqrt{\frac{8000}{27,26}} = 17,1 \text{ мм.}$$

Приймаємо:  $k_2 = 18 \text{ мм.}$

Підраховуємо:

$$J_x = 63,502 \cdot 18^4 = 6,666 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{6,666 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 18^2}} = 27,47 \text{ мм;}$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{yz} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{27,47} = 160,2.$$

Зважаючи на те, що у додатку В точно такого значення немає, величину коефіцієнта  $\varphi$  на кінці другого кроку визначимо методом лінійної інтерполяції (рис. 2.17):

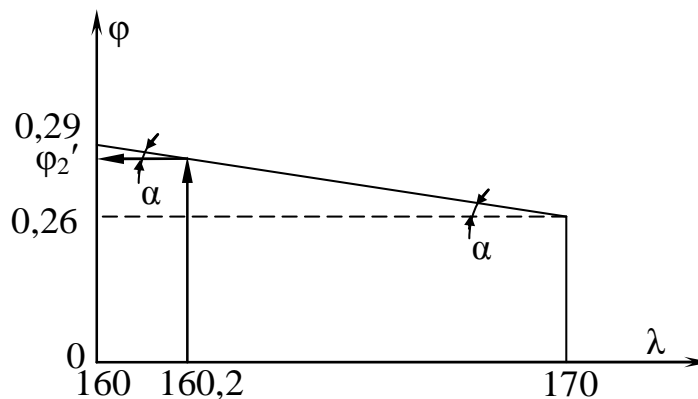


Рисунок 2.17 – Схема до визначення коефіцієнта  $\varphi$  на кінці другого кроку прикладу 2

$$\varphi'_2 = 0,26 + (170 - 160,2) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,26 + (170 - 160,2) \cdot \frac{(0,29 - 0,26)}{(170 - 160)} = 0,289.$$

Перевіримо умову стійкості.

Діюче напруження в стійці:

$$\sigma = \frac{P}{F_2} = \frac{P}{27,26 \cdot k_2^2} = \frac{320 \cdot 10^3}{27,26 \cdot 18^2} = 36,2 \text{ МПа.}$$

Допустиме напруження:

$$[\sigma_{cm}] = \varphi'_2 \cdot [\sigma] = 0,289 \cdot 160 = 46,2 \text{ МПа.}$$

Оскільки  $\sigma < [\sigma_{cm}]$ , умова стійкості виконується.

Підрахуємо величину недовантаження стійки:

$$\Delta = \frac{[\sigma_{ct}] - \sigma}{[\sigma_{ct}]} \cdot 100 = \frac{(46,2 - 36,2)}{46,2} \cdot 100 = 21,6 \% .$$

3. Третій крок

$$\text{Приймаємо: } \varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,25 + 0,289}{2} = 0,270 .$$

Тоді:

$$F_3 \geq \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,270 \cdot 160} = 7407 \text{ мм}^2;$$

$$k_3 \geq \sqrt{\frac{F_3}{27,26}} = \sqrt{\frac{7407}{27,26}} = 16,5 \text{ мм.}$$

Приймаємо:  $k_3 = 17 \text{ мм.}$

Підраховуємо:

$$J_x = 63,502 \cdot 17^4 = 5,304 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{5,304 \cdot 10^6}{27,26 \cdot 17^2}} = 25,95 \text{ мм};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2,0 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{25,95} = 169,6 .$$

Використовуючи метод лінійної інтерполяції, визначаємо:

$$\varphi'_3 = 0,26 + (170 - 169,7) \cdot \frac{(0,29 - 0,26)}{(170 - 160)} = 0,261 .$$

Перевірка стійкості:

$$\sigma = \frac{320 \cdot 10^3}{27,26 \cdot 17^2} = 40,6 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{cm}] = 0,261 \cdot 160 = 41,80 \text{ МПа.}$$

Оскільки  $\sigma < [\sigma_{cm}]$ , стійкість в цьому разі також забезпечена.



Величина недовантаження:

$$\Delta = \frac{(41,8 - 40,6)}{41,8} \cdot 100 = 2,9 \% .$$

4. Четвертий крок

$$\text{Приймаємо: } \varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,270 + 0,261}{2} = 0,266 .$$

Тоді:

$$F_4 \geq \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,266 \cdot 160} = 7519 \text{ мм}^2;$$

$$k_4 \geq \sqrt{\frac{F_4}{27,26}} = \sqrt{\frac{7519}{27,26}} = 16,6 \text{ мм}.$$

Приймаємо:  $k_4 = 17$  мм.

Зважаючи на те, що цей результат вже був на третьому кроці, розрахунок припиняємо. Вказане значення параметра  $k$  є остаточним, а відповідне недовантаження  $\Delta = 2,9\%$  – мінімально можливе.

## ЛІТЕРАТУРА

1. **Гонтаровська Т. М.** Технічна механіка : навчальний посібник / Т. М. Гонтаровська та ін. – Житомир : ЖІТІ, 2001. – 241 с.
2. **Сапрыкин В. Н.** Техническая механика / В. Н. Сапыкин.– Ростов н/Д : Феникс ; Харьков : Торсинг, 2003. – 560 с.
3. **Тарг С. М.** Краткий курс теоретической механики / Тарг С. М. – М. : Наука, 1986. – 415 с.
4. **Іскрицький В. М.** Теоретична механіка. Статика і кінематика : навчальний посібник / В. М. Іскрицький [та ін.]. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – 204 с.
5. Теоретическая механика. Конспект лекций. Часть 1. Кинематика и Статика. / сост.: С. В. Подлесный., Ю. А. Ерфорт. – Краматорск : ДГМА , 2005. – 115 с.
6. Конспект лекций по теоретической механике. Часть II. Динамика. / сост.: С. В. Подлесный, Ю. А. Ерфорт. – Краматорск : ДГМА , 2005. – 250 с.
7. **Дарков А. В.** Сопротивление материалов : учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шапиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1989. – 654 с. : ил.
8. Конспект лекцій з дисципліни «Опір матеріалів» (для студентів всіх механічних спеціальностей денної і заочної форм навчання) / укл.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зінченко, В. А. Овчаренко. – Краматорськ : ДДМА, 2007. – Ч. 1. – 196 с.
9. Конспект лекцій з дисципліни «Опір матеріалів» (для студентів всіх механічних спеціальностей денної і заочної форми навчання) / укл.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зінченко, В. А. Овчаренко. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – Ч. 2. – 168 с.
10. Конспект лекций по дисциплине «Сопротивление материалов». (для студентов всех механических специальностей очной и заочной формы обучения) / сост.: Л. В. Кутовой, Т. П. Зинченко, В. А. Овчаренко. – Краматорск : ДГМА, 2004. – Ч. 1.– 172 с.
11. Конспект лекций по дисциплине «Сопротивление материалов». (для студентов всех механических специальностей очной и заочной формы обучения) / сост. : Л. В. Кутовой, Т. П. Зинченко, В. А. Овчаренко. – Краматорск : ДГМА, 2005. – Ч. 2. – 176 с.
12. Побудова епюр внутрішніх силових факторів для балок і плоских рам: навч. посібник / Ю. С. Холодняк [ та ін.]. – Краматорськ : ДДМА, 2010. – 128 с.
- 13 Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу "Технічна механіка" / укл.: В. А. Овчаренко, Л. В. Кутовой – Краматорськ : ДДМА, 2008. – 144 с

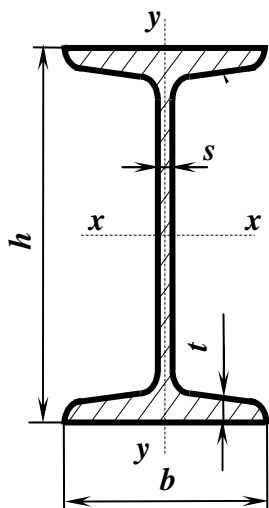
## Додаток А

### Основні параметри катаних профілів

#### 1 Нормальні лінійні розміри, мм (по ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,5 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,6 | 6,3 | 7,1 | 8,0 | 9,0 | 10  | 11  | 12  | 14  |
| 16  | 18  | 20  | 22  | 25  | 28  | 32  | 36  | 40  | 45  | 50  | 56  |
| 63  | 71  | 80  | 90  | 100 | 110 | 125 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 |
| 250 | 280 | 320 | 360 | 400 | 450 | 500 | 560 | 630 | 710 | 800 | 900 |



Таблиця А.2

#### 2. Двотаври сталіні гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

$h$  – висота профілю

$b$  – ширина полки

$s$  – товщина стінки

$t$  – середня товщина полки

$F$  – площа перерізу

$J$  – момент інерції

$W$  – момент опору

$i$  – радіус інерції

$S$  – статичний момент

напівперерізу

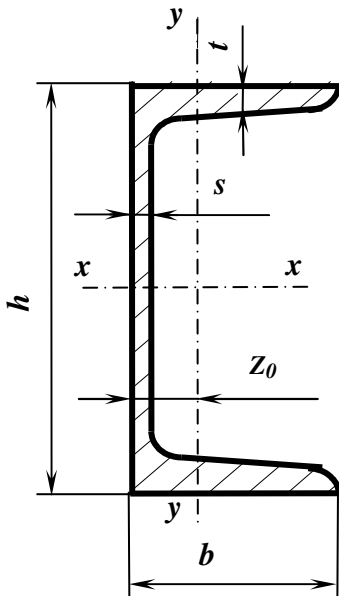
Приклад позначення  
профілю:

**Двотавер 30 ГОСТ 8239-89**

| Номер профілю | Основні розміри, мм |     |     |      | $F$<br>см <sup>2</sup> | $J_X$<br>см <sup>4</sup> | $W_X$<br>см <sup>3</sup> | $i_X$<br>см | $S_X$<br>см <sup>3</sup> | $J_Y$<br>см <sup>4</sup> | $W_Y$<br>см <sup>3</sup> | $i_Y$<br>см |
|---------------|---------------------|-----|-----|------|------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------|
|               | $h$                 | $b$ | $s$ | $t$  |                        |                          |                          |             |                          |                          |                          |             |
| 10            | 100                 | 55  | 4,5 | 7,2  | 12,0                   | 198                      | 39,7                     | 4,06        | 23,0                     | 17,9                     | 6,49                     | 1,22        |
| 12            | 120                 | 64  | 4,8 | 7,3  | 14,7                   | 350                      | 58,4                     | 4,88        | 33,7                     | 27,9                     | 8,72                     | 1,38        |
| 14            | 140                 | 73  | 4,9 | 7,5  | 17,4                   | 572                      | 81,7                     | 5,73        | 46,8                     | 41,9                     | 11,5                     | 1,55        |
| 16            | 160                 | 81  | 5,0 | 7,8  | 20,2                   | 873                      | 109                      | 6,57        | 62,3                     | 58,6                     | 14,5                     | 1,70        |
| 18            | 180                 | 90  | 5,1 | 8,1  | 23,4                   | 1290                     | 143                      | 7,42        | 81,4                     | 82,6                     | 18,4                     | 1,88        |
| 18a           | 180                 | 100 | 5,1 | 8,3  | 25,4                   | 1430                     | 159                      | 7,51        | 89,8                     | 114                      | 22,8                     | 2,12        |
| 20            | 200                 | 100 | 5,2 | 8,4  | 26,8                   | 1840                     | 184                      | 8,28        | 104                      | 115                      | 23,1                     | 2,07        |
| 20a           | 200                 | 110 | 5,2 | 8,6  | 28,9                   | 2030                     | 203                      | 8,37        | 114                      | 155                      | 28,2                     | 2,32        |
| 22            | 220                 | 110 | 5,4 | 8,7  | 30,6                   | 2550                     | 232                      | 9,13        | 131                      | 157                      | 28,6                     | 2,27        |
| 22a           | 220                 | 120 | 5,4 | 8,9  | 32,8                   | 2790                     | 254                      | 9,22        | 143                      | 206                      | 34,3                     | 2,50        |
| 24            | 240                 | 115 | 5,6 | 9,5  | 34,8                   | 3460                     | 289                      | 9,97        | 163                      | 198                      | 34,5                     | 2,37        |
| 24a           | 240                 | 125 | 5,6 | 9,8  | 37,5                   | 3800                     | 317                      | 10,1        | 178                      | 260                      | 41,6                     | 2,63        |
| 27            | 270                 | 125 | 6,0 | 9,8  | 40,2                   | 5010                     | 371                      | 11,2        | 210                      | 260                      | 41,5                     | 2,54        |
| 27a           | 270                 | 135 | 6,0 | 10,2 | 43,2                   | 5500                     | 407                      | 11,3        | 229                      | 337                      | 50,0                     | 2,80        |
| 30            | 300                 | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5                   | 7080                     | 472                      | 12,3        | 268                      | 337                      | 49,9                     | 2,69        |
| 30a           | 300                 | 145 | 6,5 | 10,7 | 49,9                   | 7780                     | 518                      | 12,5        | 292                      | 436                      | 60,1                     | 2,95        |
| 33            | 330                 | 140 | 7,0 | 11,2 | 53,8                   | 9840                     | 597                      | 13,5        | 339                      | 419                      | 59,9                     | 2,79        |
| 36            | 360                 | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9                   | 13380                    | 743                      | 14,7        | 423                      | 516                      | 71,1                     | 2,89        |
| 40            | 400                 | 155 | 8,3 | 13,0 | 72,6                   | 19062                    | 953                      | 16,2        | 545                      | 667                      | 86,1                     | 3,03        |
| 45            | 450                 | 160 | 9   | 14,2 | 84,7                   | 27696                    | 1231                     | 18,1        | 708                      | 808                      | 101                      | 3,09        |
| 50            | 500                 | 170 | 10  | 15,2 | 100                    | 39727                    | 1589                     | 19,9        | 919                      | 1043                     | 123                      | 3,23        |
| 55            | 550                 | 180 | 11  | 16,5 | 118                    | 55962                    | 2035                     | 21,8        | 1181                     | 1356                     | 151                      | 3,39        |
| 60            | 600                 | 190 | 12  | 17,8 | 138                    | 76806                    | 2560                     | 23,6        | 1491                     | 1725                     | 182                      | 3,54        |

### 3. Швелери сталіні гарячекатані

( за ГОСТ 8240-89)



Таблиця А.3

Позначення:

$h$  – висота профілю  
 $b$  – ширина полки  
 $s$  – товщина стінки  
 $t$  – середня товщина полки  
 $F$  – площа перерізу  
 $J$  – момент інерції

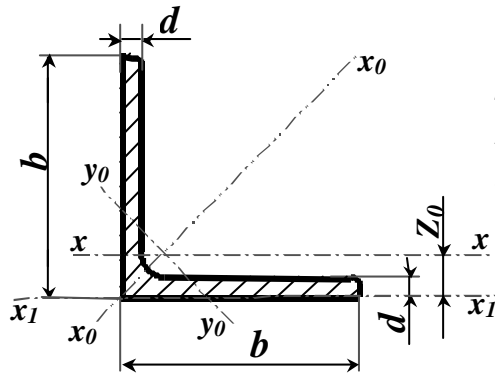
$W$  – момент опору  
 $i$  – радіус інерції  
 $S$  – статичний момент  
 напівперерізу  
 $Z_0$  – відстань від осі  $y$   
 до зовнішньої грані стінки

Приклад позначення профілю:

**Швелер 30 ГОСТ 8240-89**

| Номер профілю | Основні розміри, мм |     |     |      | $F$<br>см <sup>2</sup> | $J_X$<br>см <sup>4</sup> | $W_X$<br>см <sup>3</sup> | $i_X$<br>см | $S_X$<br>см <sup>3</sup> | $J_Y$<br>см <sup>4</sup> | $W_Y$<br>см <sup>3</sup> | $i_Y$<br>см | $Z_0$<br>см |
|---------------|---------------------|-----|-----|------|------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------|-------------|
|               | $h$                 | $b$ | $s$ | $t$  |                        |                          |                          |             |                          |                          |                          |             |             |
| 5             | 50                  | 32  | 4,4 | 7,0  | 6,16                   | 22,8                     | 9,1                      | 1,92        | 5,59                     | 5,61                     | 2,75                     | 0,954       | 1,16        |
| 6,5           | 65                  | 36  | 4,4 | 7,2  | 7,51                   | 48,6                     | 15,0                     | 2,54        | 9,0                      | 8,7                      | 3,68                     | 1,08        | 1,24        |
| 8             | 80                  | 40  | 4,5 | 7,4  | 8,98                   | 89,4                     | 22,4                     | 3,16        | 13,3                     | 12,8                     | 4,75                     | 1,19        | 1,31        |
| 10            | 100                 | 46  | 4,5 | 7,6  | 10,9                   | 174                      | 34,8                     | 3,99        | 20,4                     | 20,4                     | 6,46                     | 1,37        | 1,44        |
| 12            | 120                 | 52  | 4,8 | 7,8  | 13,3                   | 304                      | 50,6                     | 4,78        | 29,6                     | 31,2                     | 8,52                     | 1,53        | 1,54        |
| 14            | 140                 | 58  | 4,9 | 8,1  | 15,6                   | 491                      | 70,2                     | 5,60        | 40,8                     | 45,4                     | 11,0                     | 1,70        | 1,67        |
| 14a           | 140                 | 62  | 4,9 | 8,7  | 17,0                   | 545                      | 77,8                     | 5,66        | 45,1                     | 57,5                     | 13,3                     | 1,84        | 1,87        |
| 16            | 160                 | 64  | 5,0 | 8,4  | 18,1                   | 747                      | 93,4                     | 6,42        | 54,1                     | 63,6                     | 13,8                     | 1,87        | 1,80        |
| 16a           | 160                 | 68  | 5,0 | 9,0  | 19,5                   | 823                      | 103                      | 6,49        | 59,4                     | 78,8                     | 16,4                     | 2,01        | 2,00        |
| 18            | 180                 | 70  | 5,1 | 8,7  | 20,7                   | 1090                     | 121                      | 7,24        | 69,8                     | 86                       | 17,0                     | 2,04        | 1,94        |
| 18a           | 180                 | 74  | 5,1 | 9,3  | 22,2                   | 1190                     | 132                      | 7,32        | 76,1                     | 105                      | 20,0                     | 2,18        | 2,13        |
| 20            | 200                 | 76  | 5,2 | 9,0  | 23,4                   | 1520                     | 152                      | 8,07        | 87,8                     | 113                      | 20,5                     | 2,20        | 2,07        |
| 20a           | 200                 | 80  | 5,2 | 9,7  | 25,2                   | 1670                     | 167                      | 8,15        | 95,9                     | 139                      | 24,2                     | 2,35        | 2,28        |
| 22            | 220                 | 82  | 5,4 | 9,5  | 26,7                   | 2110                     | 192                      | 8,89        | 110                      | 151                      | 25,1                     | 2,37        | 2,21        |
| 22a           | 220                 | 87  | 5,4 | 10,2 | 28,8                   | 2330                     | 212                      | 8,99        | 121                      | 187                      | 30,0                     | 2,55        | 2,46        |
| 24            | 240                 | 90  | 5,6 | 10,0 | 30,6                   | 2900                     | 242                      | 9,73        | 139                      | 208                      | 31,6                     | 2,60        | 2,42        |
| 24a           | 240                 | 95  | 5,6 | 10,7 | 32,9                   | 3180                     | 265                      | 9,84        | 151                      | 254                      | 37,2                     | 2,78        | 2,67        |
| 27            | 270                 | 95  | 6,0 | 10,5 | 35,2                   | 4160                     | 308                      | 10,9        | 178                      | 262                      | 37,3                     | 2,73        | 2,47        |
| 30            | 300                 | 100 | 6,5 | 11,0 | 40,5                   | 5810                     | 387                      | 12,0        | 224                      | 327                      | 43,6                     | 2,84        | 2,52        |
| 33            | 330                 | 105 | 7,0 | 11,7 | 46,5                   | 7980                     | 484                      | 13,1        | 281                      | 410                      | 51,8                     | 2,97        | 2,59        |
| 36            | 360                 | 110 | 7,5 | 12,6 | 53,4                   | 10820                    | 601                      | 14,2        | 350                      | 513                      | 61,7                     | 3,10        | 2,68        |
| 40            | 400                 | 115 | 8,0 | 13,5 | 61,5                   | 15220                    | 761                      | 15,7        | 444                      | 642                      | 73,4                     | 3,23        | 2,75        |

**4 КУТИКИ СТАЛЄВІ  
ГАРЯЧЕКАТАНІ РІВНОПОЛИЧНІ  
(за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)**



Позначення:

$b$  – ширина полки

$d$  – товщина полки

$F$  – площа перерізу

$J$  – момент інерції

$i$  – радіус інерції

$Z_0$  – відстань від центра ваги перерізу до зовнішньої грані полки

Приклад позначення профілю:

**Куттик 50х50х3 ГОСТ 8509-93**

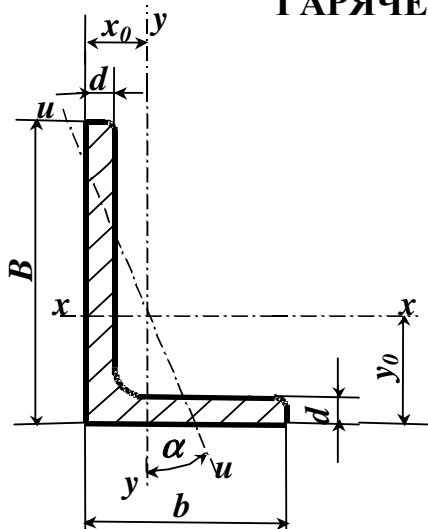
Таблиця А.4

| Номер куттика | Основні розміри мм |     | $F$<br>см <sup>2</sup> | $J_x$<br>см <sup>4</sup> | $i_x$<br>см | $J_{x_0}$<br>max<br>см <sup>4</sup> | $i_{x_0}$<br>max<br>см | $J_{y_0}$<br>min<br>см <sup>4</sup> | $i_{y_0}$<br>min<br>см | $Z_0$<br>см |
|---------------|--------------------|-----|------------------------|--------------------------|-------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------|
|               | $b$                | $d$ |                        |                          |             |                                     |                        |                                     |                        |             |
| 2             | 20                 | 3   | 1,13                   | 0,40                     | 0,59        | 0,6                                 | 0,75                   | 0,17                                | 0,39                   | 0,60        |
|               |                    | 4   | 1,46                   | 0,50                     | 0,58        | 0,8                                 | 0,73                   | 0,22                                | 0,38                   | 0,64        |
| 2,5           | 25                 | 3   | 1,43                   | 0,81                     | 0,75        | 1,3                                 | 0,95                   | 0,34                                | 0,49                   | 0,73        |
|               |                    | 5   | 2,27                   | 1,22                     | 0,73        | 1,9                                 | 0,92                   | 0,53                                | 0,48                   | 0,80        |
| 2,8           | 28                 | 3   | 1,62                   | 1,16                     | 0,85        | 1,8                                 | 1,07                   | 0,48                                | 0,55                   | 0,80        |
| 3             | 30                 | 3   | 1,74                   | 1,45                     | 0,91        | 2,3                                 | 1,15                   | 0,60                                | 0,59                   | 0,85        |
|               |                    | 5   | 2,78                   | 2,20                     | 0,89        | 3,5                                 | 1,12                   | 0,94                                | 0,58                   | 0,93        |
| 3,2           | 32                 | 3   | 1,86                   | 1,77                     | 0,97        | 2,8                                 | 1,23                   | 0,74                                | 0,63                   | 0,89        |
|               |                    | 4   | 2,43                   | 2,26                     | 0,96        | 3,6                                 | 1,21                   | 0,94                                | 0,62                   | 0,94        |
| 3,5           | 35                 | 3   | 2,04                   | 2,35                     | 1,07        | 3,7                                 | 1,35                   | 0,97                                | 0,69                   | 0,97        |
|               |                    | 5   | 3,28                   | 3,61                     | 1,05        | 5,7                                 | 1,32                   | 1,52                                | 0,68                   | 1,05        |
| 4             | 40                 | 3   | 2,35                   | 3,55                     | 1,23        | 5,6                                 | 1,55                   | 1,47                                | 0,79                   | 1,09        |
|               |                    | 6   | 4,48                   | 6,41                     | 1,20        | 10,1                                | 1,50                   | 2,70                                | 0,78                   | 1,21        |
| 4,5           | 45                 | 3   | 2,65                   | 5,13                     | 1,39        | 8,1                                 | 1,75                   | 2,12                                | 0,89                   | 1,21        |
|               |                    | 6   | 5,08                   | 9,35                     | 1,36        | 14,8                                | 1,71                   | 3,90                                | 0,88                   | 1,34        |
| 5             | 50                 | 3   | 2,96                   | 7,11                     | 1,55        | 11,3                                | 1,95                   | 2,95                                | 1,00                   | 1,33        |
|               |                    | 6   | 5,69                   | 13,07                    | 1,52        | 20,7                                | 1,91                   | 5,43                                | 0,98                   | 1,46        |
| 5,6           | 56                 | 4   | 4,38                   | 13,1                     | 1,73        | 20,8                                | 2,18                   | 5,41                                | 1,11                   | 1,52        |
|               |                    | 5   | 5,41                   | 16,0                     | 1,72        | 25,4                                | 2,16                   | 6,59                                | 1,10                   | 1,57        |
| 6,3           | 63                 | 4   | 4,96                   | 18,9                     | 1,95        | 29,9                                | 2,45                   | 7,81                                | 1,25                   | 1,69        |
|               |                    | 6   | 7,28                   | 27,1                     | 1,93        | 42,9                                | 2,43                   | 11,20                               | 1,24                   | 1,78        |
| 7             | 70                 | 4,5 | 6,20                   | 29,0                     | 2,16        | 46,0                                | 2,72                   | 12,0                                | 1,39                   | 1,88        |
|               |                    | 8   | 10,7                   | 48,2                     | 2,13        | 76,4                                | 2,68                   | 20,0                                | 1,37                   | 2,02        |
| 7,5           | 75                 | 5   | 7,39                   | 39,5                     | 2,31        | 62,6                                | 2,91                   | 16,4                                | 1,49                   | 2,02        |
|               |                    | 9   | 12,8                   | 66,1                     | 2,27        | 105,0                               | 2,86                   | 27,5                                | 1,46                   | 2,18        |

Продовження таблиці А.4

| Номер<br>кутика | Основні розмі-<br>ри мм |      | $F$<br>см <sup>2</sup> | $J_X$<br>см <sup>4</sup> | $i_X$<br>см | $J_{x_0}$<br>max<br>см <sup>4</sup> | $i_{x_0}$<br>max<br>см | $J_{y_0}$<br>min<br>см <sup>4</sup> | $i_{y_0}$<br>min<br>см | $Z_0$<br>см |
|-----------------|-------------------------|------|------------------------|--------------------------|-------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------|
|                 | $b$                     | $d$  |                        |                          |             |                                     |                        |                                     |                        |             |
| 8               | 80                      | 5,5  | 8,63                   | 52,7                     | 2,47        | 83,6                                | 3,11                   | 21,8                                | 1,59                   | 2,17        |
|                 |                         | 6    | 9,38                   | 57,0                     | 2,47        | 90,4                                | 3,11                   | 23,5                                | 1,58                   | 2,19        |
|                 |                         | 7    | 10,8                   | 65,3                     | 2,45        | 104,0                               | 3,09                   | 27,0                                | 1,58                   | 2,23        |
|                 |                         | 8    | 12,3                   | 73,4                     | 2,34        | 116,0                               | 3,08                   | 30,3                                | 1,57                   | 2,27        |
| 9               | 90                      | 6    | 10,6                   | 82,1                     | 2,78        | 130                                 | 3,50                   | 34,0                                | 1,79                   | 2,43        |
|                 |                         | 7    | 12,3                   | 94,3                     | 2,77        | 150                                 | 3,49                   | 38,9                                | 1,78                   | 2,47        |
|                 |                         | 8    | 13,9                   | 106,0                    | 2,76        | 168                                 | 3,48                   | 43,8                                | 1,77                   | 2,51        |
|                 |                         | 9    | 15,6                   | 118,0                    | 2,75        | 186                                 | 3,46                   | 48,6                                | 1,77                   | 2,55        |
| 10              | 100                     | 6,5  | 12,8                   | 122                      | 3,09        | 193                                 | 3,88                   | 50,7                                | 1,99                   | 2,68        |
|                 |                         | 7    | 13,8                   | 131                      | 3,08        | 207                                 | 3,88                   | 54,2                                | 1,98                   | 2,71        |
|                 |                         | 8    | 15,6                   | 147                      | 3,07        | 233                                 | 3,87                   | 60,9                                | 1,98                   | 2,75        |
|                 |                         | 10   | 19,2                   | 179                      | 2,05        | 284                                 | 3,84                   | 74,1                                | 1,96                   | 2,83        |
|                 |                         | 12   | 22,8                   | 209                      | 3,03        | 331                                 | 3,81                   | 86,9                                | 1,95                   | 2,91        |
|                 |                         | 14   | 26,3                   | 237                      | 3,00        | 375                                 | 3,78                   | 99,3                                | 1,94                   | 2,99        |
| 11              | 110                     | 7    | 15,2                   | 176                      | 3,40        | 279                                 | 4,29                   | 72,7                                | 2,19                   | 2,96        |
|                 |                         | 8    | 17,2                   | 198                      | 3,39        | 315                                 | 4,28                   | 81,8                                | 2,18                   | 3,00        |
|                 |                         | 8    | 19,7                   | 294                      | 3,37        | 467                                 | 4,87                   | 122                                 | 2,49                   | 3,36        |
|                 |                         | 9    | 22,0                   | 327                      | 3,86        | 520                                 | 4,86                   | 135                                 | 2,48                   | 3,40        |
| 12,5            | 125                     | 10   | 24,3                   | 360                      | 3,85        | 571                                 | 4,84                   | 149                                 | 2,47                   | 3,45        |
|                 |                         | 12   | 28,9                   | 422                      | 3,82        | 670                                 | 4,82                   | 174                                 | 2,46                   | 3,53        |
|                 |                         | 14   | 33,4                   | 482                      | 3,80        | 764                                 | 4,78                   | 200                                 | 2,45                   | 3,61        |
|                 |                         | 16   | 37,8                   | 539                      | 3,78        | 853                                 | 4,75                   | 224                                 | 2,44                   | 3,68        |
|                 |                         | 9    | 24,7                   | 466                      | 4,34        | 739                                 | 5,47                   | 192                                 | 2,79                   | 3,78        |
| 14              | 140                     | 10   | 27,3                   | 512                      | 4,33        | 814                                 | 5,46                   | 211                                 | 2,78                   | 3,82        |
|                 |                         | 12   | 32,5                   | 602                      | 4,31        | 957                                 | 5,43                   | 248                                 | 2,76                   | 3,90        |
|                 |                         | 10   | 31,4                   | 774                      | 4,96        | 1229                                | 6,25                   | 319                                 | 3,19                   | 4,30        |
| 16              | 160                     | 11   | 34,4                   | 844                      | 4,95        | 1341                                | 6,24                   | 348                                 | 3,18                   | 4,35        |
|                 |                         | 12   | 37,4                   | 913                      | 4,94        | 1450                                | 6,23                   | 376                                 | 3,17                   | 4,39        |
|                 |                         | 14   | 43,3                   | 1046                     | 4,92        | 1662                                | 6,20                   | 431                                 | 3,16                   | 4,47        |
|                 |                         | 16   | 49,1                   | 1175                     | 4,89        | 1866                                | 6,17                   | 485                                 | 3,14                   | 4,55        |
|                 |                         | 18   | 54,8                   | 1299                     | 4,87        | 2061                                | 6,13                   | 537                                 | 3,13                   | 4,63        |
|                 |                         | 20   | 60,4                   | 1419                     | 4,85        | 2248                                | 6,10                   | 589                                 | 3,12                   | 4,70        |
|                 |                         | 11   | 38,8                   | 1216                     | 5,60        | 1933                                | 7,06                   | 500                                 | 3,59                   | 4,85        |
| 18              | 180                     | 12   | 42,2                   | 1317                     | 5,59        | 2093                                | 7,04                   | 540                                 | 3,58                   | 4,89        |
|                 |                         | 12   | 47,1                   | 1823                     | 6,22        | 2896                                | 7,84                   | 749                                 | 3,99                   | 5,37        |
| 20              | 200                     | 13   | 50,9                   | 1961                     | 6,21        | 3116                                | 7,83                   | 805                                 | 3,98                   | 5,42        |
|                 |                         | 14   | 54,6                   | 2097                     | 6,20        | 3333                                | 7,81                   | 861                                 | 3,97                   | 5,46        |
|                 |                         | 16   | 62,0                   | 2363                     | 6,17        | 3755                                | 7,78                   | 970                                 | 3,96                   | 5,54        |
|                 |                         | 20   | 76,5                   | 2871                     | 6,12        | 4560                                | 7,72                   | 1182                                | 3,93                   | 5,70        |
|                 |                         | 25   | 94,3                   | 3466                     | 6,06        | 5494                                | 7,63                   | 1438                                | 3,91                   | 5,89        |
|                 |                         | 30   | 111,5                  | 4020                     | 6,00        | 6351                                | 7,55                   | 1688                                | 3,89                   | 6,07        |
| 22              | 220                     | 14   | 60,4                   | 2814                     | 6,83        | 4470                                | 8,60                   | 1159                                | 4,38                   | 5,93        |
|                 |                         | 16   | 68,6                   | 3175                     | 6,81        | 5045                                | 8,58                   | 1306                                | 4,36                   | 6,02        |
| 25              | 250                     | 16   | 78,4                   | 4717                     | 7,76        | 7492                                | 9,78                   | 1942                                | 4,98                   | 6,75        |
|                 |                         | 18   | 87,7                   | 5247                     | 7,73        | 8337                                | 9,75                   | 2158                                | 4,96                   | 6,83        |
|                 |                         | 20   | 97,0                   | 5765                     | 7,71        | 9160                                | 9,72                   | 2370                                | 4,94                   | 6,91        |
|                 |                         | 22   | 106,1                  | 6270                     | 7,69        | 9961                                | 9,69                   | 2579                                | 4,93                   | 7,00        |
|                 |                         | 25   | 119,7                  | 7006                     | 7,65        | 11125                               | 9,64                   | 2887                                | 4,91                   | 7,11        |
|                 |                         | 28   | 133,1                  | 7717                     | 7,61        | 12244                               | 9,59                   | 3190                                | 4,89                   | 7,23        |
| 30              | 142,0                   | 8117 | 7,59                   | 12965                    | 9,56        | 3389                                | 4,89                   | 7,31                                |                        |             |

## 5 КУТИКИ СТАЛЕВІ ГАРЯЧЕКАТАНІ НЕРІВНОПОЛИЧНІ (за ГОСТ 8510-86)



Позначення:

$B$  – ширина більшої полки

$b$  – ширина меншої полки

$d$  – товщина полки

$F$  – площа перерізу

$I$  – момент інерції

$i$  – радіус інерції

$x_0, y_0$  – відстані від центра ваги перерізу до зовнішніх граней полкок,

$\alpha$  – кут нахилу осі  $u$

Приклад позначення профілю:

Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-86

Таблиця А.5

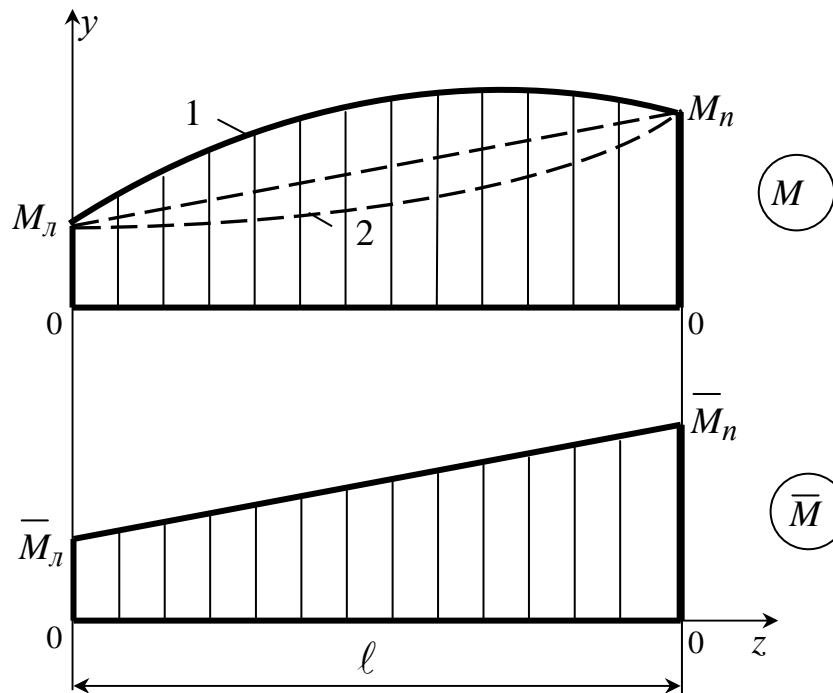
| Номер кутика | Основні розміри, мм |     |     | $F$<br>см <sup>2</sup> | $J_x$<br>см <sup>4</sup> | $J_y$<br>см <sup>4</sup> | $J_u$<br>min<br>см <sup>4</sup> | $i_u$<br>см | $x_0$<br>см | $y_0$<br>см | tg $\alpha$ |
|--------------|---------------------|-----|-----|------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|              | $B$                 | $b$ | $d$ |                        |                          |                          |                                 |             |             |             |             |
| 2,5/1,6      | 25                  | 16  | 3   | 1,16                   | 0,70                     | 0,22                     | 0,13                            | 0,34        | 0,42        | 0,86        | 0,392       |
| 3/2          | 30                  | 20  | 3   | 1,43                   | 1,27                     | 0,45                     | 0,26                            | 0,43        | 0,51        | 1,00        | 0,427       |
|              |                     |     | 4   | 1,86                   | 1,61                     | 0,56                     | 0,34                            | 0,43        | 0,54        | 1,04        | 0,421       |
| 3,2/2        | 32                  | 20  | 3   | 1,49                   | 1,52                     | 0,46                     | 0,28                            | 0,43        | 0,49        | 1,08        | 0,382       |
|              |                     |     | 4   | 1,94                   | 1,93                     | 0,57                     | 0,35                            | 0,43        | 0,53        | 1,12        | 0,374       |
| 4/2,5        | 40                  | 25  | 3   | 1,89                   | 3,06                     | 0,93                     | 0,56                            | 0,54        | 0,59        | 1,32        | 0,385       |
|              |                     |     | 4   | 2,47                   | 3,93                     | 1,18                     | 0,71                            | 0,54        | 0,63        | 1,37        | 0,381       |
|              |                     |     | 5   | 3,03                   | 4,73                     | 1,41                     | 0,86                            | 0,53        | 0,66        | 1,41        | 0,374       |
| 4/3          | 40                  | 39  | 4   | 2,67                   | 4,18                     | 2,01                     | 1,09                            | 0,64        | 0,78        | 1,28        | 0,544       |
|              |                     |     | 5   | 3,28                   | 5,04                     | 2,41                     | 1,33                            | 0,64        | 0,82        | 1,32        | 0,539       |
| 4,5/2,8      | 45                  | 28  | 3   | 2,14                   | 4,41                     | 1,32                     | 0,79                            | 0,61        | 0,64        | 1,47        | 0,382       |
|              |                     |     | 4   | 2,80                   | 5,68                     | 1,69                     | 1,02                            | 0,60        | 0,68        | 1,51        | 0,379       |
| 5/3,2        | 50                  | 32  | 3   | 2,42                   | 6,18                     | 1,99                     | 1,18                            | 0,70        | 0,72        | 1,60        | 0,403       |
|              |                     |     | 4   | 3,17                   | 7,98                     | 2,56                     | 1,52                            | 0,69        | 0,76        | 1,65        | 0,401       |
| 5,6/3,6      | 56                  | 36  | 4   | 3,58                   | 11,4                     | 3,7                      | 2,19                            | 0,78        | 0,84        | 1,82        | 0,406       |
|              |                     |     | 5   | 4,41                   | 13,8                     | 4,48                     | 2,66                            | 0,78        | 0,88        | 1,86        | 0,404       |
| 6,3/4        | 63                  | 40  | 4   | 4,04                   | 16,3                     | 5,16                     | 3,07                            | 0,87        | 0,91        | 2,03        | 0,397       |
|              |                     |     | 5   | 4,98                   | 19,9                     | 6,26                     | 3,72                            | 0,86        | 0,95        | 2,08        | 0,396       |
|              |                     |     | 6   | 5,90                   | 23,3                     | 7,28                     | 4,36                            | 0,86        | 0,99        | 2,12        | 0,393       |
|              |                     |     | 8   | 7,68                   | 29,6                     | 9,15                     | 5,58                            | 0,85        | 1,07        | 2,20        | 0,386       |
| 6,5/5        | 65                  | 50  | 5   | 5,56                   | 23,41                    | 12,08                    | 6,41                            | 1,07        | 1,26        | 2,00        | 0,576       |
|              |                     |     | 6   | 6,60                   | 27,46                    | 14,12                    | 7,52                            | 1,07        | 1,30        | 2,04        | 0,575       |
|              |                     |     | 7   | 7,62                   | 31,32                    | 16,05                    | 8,60                            | 1,06        | 1,34        | 2,08        | 0,571       |
|              |                     |     | 8   | 8,62                   | 35,00                    | 18,88                    | 9,65                            | 1,06        | 1,37        | 2,12        | 0,570       |
| 7/4,5        | 70                  | 45  | 5   | 5,59                   | 27,76                    | 9,05                     | 5,34                            | 0,98        | 1,05        | 2,28        | 0,406       |
| 7,5/5        | 75                  | 50  | 5   | 6,11                   | 34,81                    | 12,47                    | 7,24                            | 1,09        | 1,17        | 2,39        | 0,436       |
|              |                     |     | 6   | 7,25                   | 40,92                    | 14,60                    | 8,48                            | 1,08        | 1,21        | 2,44        | 0,435       |
|              |                     |     | 7   | 8,37                   | 46,77                    | 16,61                    | 9,69                            | 1,08        | 1,25        | 2,48        | 0,435       |
|              |                     |     | 8   | 9,47                   | 52,38                    | 18,52                    | 10,87                           | 1,07        | 1,29        | 2,52        | 0,430       |

Продовження таблиці А.5

| Номер<br>кутика | Основні роз-<br>міри, мм |     |     | $F$<br>см <sup>2</sup> | $J_X$<br>см <sup>4</sup> | $J_Y$<br>см <sup>4</sup> | $J_u$<br>min<br>см <sup>4</sup> | $i_u$<br>см | $x_0$<br>см | $y_0$<br>см | tg $\alpha$ |
|-----------------|--------------------------|-----|-----|------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                 | $B$                      | $b$ | $d$ |                        |                          |                          |                                 |             |             |             |             |
| 8/5             | 80                       | 50  | 5   | 6,36                   | 41,64                    | 12,68                    | 7,57                            | 1,09        | 1,13        | 2,60        | 0,387       |
|                 |                          |     | 6   | 7,55                   | 48,98                    | 14,85                    | 8,88                            | 1,08        | 1,17        | 2,65        | 0,386       |
| 8/6             | 80                       | 60  | 6   | 8,15                   | 52,06                    | 25,18                    | 13,61                           | 1,29        | 1,49        | 2,47        | 0,547       |
|                 |                          |     | 7   | 9,42                   | 59,61                    | 28,74                    | 15,58                           | 1,29        | 1,53        | 2,52        | 0,546       |
|                 |                          |     | 8   | 10,6                   | 66,88                    | 32,15                    | 17,49                           | 1,28        | 1,57        | 2,56        | 0,544       |
| 9/5,6           | 90                       | 56  | 5,5 | 7,86                   | 65,3                     | 19,7                     | 11,8                            | 1,22        | 1,26        | 2,92        | 0,384       |
|                 |                          |     | 6   | 8,54                   | 70,6                     | 21,2                     | 12,7                            | 1,22        | 1,28        | 2,95        | 0,384       |
|                 |                          |     | 8   | 11,2                   | 90,9                     | 27,1                     | 16,3                            | 1,21        | 1,36        | 3,04        | 0,380       |
| 10/6,3          | 100                      | 63  | 6   | 9,59                   | 98,3                     | 30,6                     | 18,20                           | 1,38        | 1,42        | 3,23        | 0,393       |
|                 |                          |     | 7   | 11,1                   | 113,0                    | 35,0                     | 20,83                           | 1,37        | 1,46        | 3,28        | 0,392       |
|                 |                          |     | 8   | 12,6                   | 127,0                    | 39,2                     | 23,38                           | 1,36        | 1,50        | 3,32        | 0,391       |
|                 |                          |     | 10  | 15,5                   | 154,0                    | 47,1                     | 28,34                           | 1,35        | 1,58        | 3,40        | 0,387       |
| 10/6,5          | 100                      | 65  | 7   | 11,2                   | 114,0                    | 38,3                     | 22,77                           | 1,41        | 1,52        | 3,24        | 0,415       |
|                 |                          |     | 8   | 12,7                   | 138,3                    | 43,0                     | 25,24                           | 1,41        | 1,56        | 3,28        | 0,414       |
|                 |                          |     | 10  | 15,7                   | 155,5                    | 51,7                     | 30,60                           | 1,40        | 1,64        | 3,37        | 0,410       |
| 11/7            | 110                      | 70  | 6,5 | 11,4                   | 142                      | 45,6                     | 26,9                            | 1,53        | 1,58        | 3,55        | 0,402       |
|                 |                          |     | 8   | 13,9                   | 172                      | 54,6                     | 32,3                            | 1,52        | 1,64        | 3,61        | 0,400       |
| 12,5/8          | 125                      | 80  | 7   | 14,1                   | 227                      | 73,7                     | 43,4                            | 1,76        | 1,80        | 4,01        | 0,407       |
|                 |                          |     | 8   | 16,0                   | 256                      | 83,0                     | 48,8                            | 1,75        | 1,84        | 4,05        | 0,406       |
|                 |                          |     | 10  | 19,7                   | 312                      | 100,0                    | 59,3                            | 1,74        | 1,92        | 4,14        | 0,404       |
|                 |                          |     | 12  | 23,4                   | 365                      | 117,0                    | 69,5                            | 1,72        | 2,00        | 4,22        | 0,400       |
| 14/9            | 140                      | 90  | 8   | 18,0                   | 364                      | 120                      | 70,3                            | 1,98        | 2,03        | 4,49        | 0,411       |
|                 |                          |     | 10  | 22,2                   | 444                      | 146                      | 85,5                            | 1,96        | 2,12        | 4,58        | 0,409       |
| 16/10           | 160                      | 100 | 9   | 22,9                   | 606                      | 186                      | 110                             | 2,20        | 2,23        | 5,19        | 0,391       |
|                 |                          |     | 10  | 25,3                   | 667                      | 204                      | 121                             | 2,19        | 2,28        | 5,23        | 0,390       |
|                 |                          |     | 12  | 30,0                   | 784                      | 239                      | 142                             | 2,18        | 2,36        | 5,32        | 0,388       |
|                 |                          |     | 14  | 34,7                   | 897                      | 272                      | 162                             | 2,16        | 2,43        | 5,40        | 0,385       |
| 18/11           | 180                      | 110 | 10  | 28,3                   | 952                      | 276                      | 165                             | 2,42        | 2,44        | 5,88        | 0,375       |
|                 |                          |     | 12  | 33,7                   | 1123                     | 324                      | 194                             | 2,40        | 2,52        | 5,97        | 0,374       |
| 20/12,5         | 200                      | 125 | 11  | 34,9                   | 1449                     | 446                      | 264                             | 2,75        | 2,79        | 6,50        | 0,392       |
|                 |                          |     | 12  | 37,9                   | 1568                     | 482                      | 285                             | 2,74        | 2,83        | 6,54        | 0,392       |
|                 |                          |     | 14  | 43,9                   | 1801                     | 551                      | 327                             | 2,73        | 2,91        | 6,62        | 0,390       |
|                 |                          |     | 16  | 49,8                   | 2026                     | 617                      | 367                             | 2,72        | 2,99        | 6,71        | 0,388       |
| 25/16           | 250                      | 160 | 12  | 48,3                   | 3147                     | 1032                     | 604                             | 3,54        | 3,53        | 7,97        | 0,410       |
|                 |                          |     | 16  | 63,6                   | 4091                     | 1333                     | 781                             | 3,50        | 3,69        | 8,14        | 0,408       |
|                 |                          |     | 18  | 71,1                   | 4545                     | 1475                     | 896                             | 3,49        | 3,77        | 8,23        | 0,407       |
|                 |                          |     | 20  | 78,5                   | 4987                     | 1613                     | 949                             | 3,48        | 3,85        | 8,31        | 0,405       |



**Додаток Б**  
**Формула крайніх ординат і особливості її застосування**



$$\Delta = M \times \bar{M} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_L \cdot \bar{M}_L + 2M_n \cdot \bar{M}_n + M_L \cdot \bar{M}_n + M_n \cdot \bar{M}_L) \pm \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} (\bar{M}_L + \bar{M}_n).$$

Формула призначена для визначення (по Мору) переміщень в балках і рамах при плоскому згині. В ній позначено:

$\Delta$  – переміщення (лінійне –  $\delta$ , кутове –  $\theta$ ) в заданому місці балки або рами;

$M$  і  $\bar{M}$  – відповідно епюри згинальних моментів від заданого навантаження і одиничного силового фактору (сили або моменту);

$\ell$  – довжина ділянки балки або стрижня рами (тобто відрізка, на якому кожна з обох епюр зображується єдиною лінією);

$yz$  – силова площина;

$x$  і  $y$  – головні центральні осі перерізу балки або стрижня рами (вісь  $x$  на схемі не зображена);

$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$ ;

$E$  – модуль пружності першого роду для матеріалу балки або рами;

$q$  – інтенсивність розподіленого навантаження;

$M_L, M_n$  – крайні ординати епюри  $M$ ;

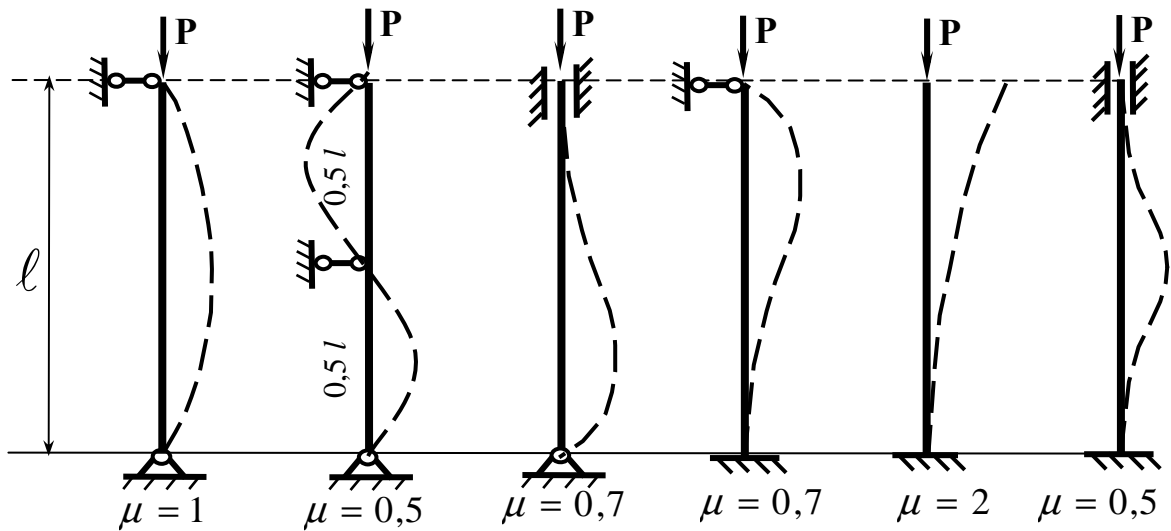
$\bar{M}_L, \bar{M}_n$  – крайні ординати епюри  $\bar{M}$ .

Формула застосовується для кожної ділянки балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого знайдені для всіх ділянок величини  $\Delta$  складаються з урахуванням їхніх знаків. У рамках ці величини визначаються для всіх зазначених ділянок усіх стрижнів.

Величини крайніх ординат обох епюр підставляються у формулу зі своїми знаками; на схемі вони показані як додатні.

Знак "плюс" перед поправкою на кривизну (тобто другою складовою у формулі крайніх ординат) ставиться в разі, коли епюра  $M$  є опуклою (крива 1), а мінус – коли вона вогнута (крива 2). Коли ж ця епюра прямолінійна, поправка на кривизну дорівнює нулю.

**Додаток В**  
**Основні параметри стиснутих стрижнів**  
**1 Коефіцієнти  $\mu$  приведеної довжини**



**2 Коефіцієнти  $\varphi$  зменшення основного допустимого напруження**

*Таблиця Б.1*

| Гнучкість $\lambda$ | <i>сталь</i><br><i>Ст 4, 3, 2</i> | <i>сталь</i><br><i>Ст5</i> | <i>сталь</i><br><i>СПК</i> | <i>чавун</i> | <i>дерево</i> |
|---------------------|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------|---------------|
| 0                   | 1,00                              | 1,00                       | 1,00                       | 1,00         | 1,00          |
| 10                  | 0,99                              | 0,98                       | 0,97                       | 0,97         | 0,99          |
| 20                  | 0,96                              | 0,95                       | 0,95                       | 0,91         | 0,97          |
| 30                  | 0,94                              | 0,92                       | 0,91                       | 0,81         | 0,93          |
| 40                  | 0,92                              | 0,89                       | 0,87                       | 0,69         | 0,87          |
| 50                  | 0,89                              | 0,86                       | 0,83                       | 0,57         | 0,80          |
| 60                  | 0,86                              | 0,82                       | 0,79                       | 0,44         | 0,71          |
| 70                  | 0,81                              | 0,76                       | 0,72                       | 0,34         | 0,60          |
| 80                  | 0,75                              | 0,70                       | 0,65                       | 0,26         | 0,48          |
| 90                  | 0,69                              | 0,62                       | 0,55                       | 0,20         | 0,38          |
| 100                 | 0,60                              | 0,51                       | 0,43                       | 0,16         | 0,31          |
| 110                 | 0,52                              | 0,43                       | 0,35                       | -            | 0,25          |
| 120                 | 0,45                              | 0,36                       | 0,30                       | -            | 0,22          |
| 130                 | 0,40                              | 0,33                       | 0,26                       | -            | 0,18          |
| 140                 | 0,36                              | 0,29                       | 0,23                       | -            | 0,16          |
| 150                 | 0,32                              | 0,26                       | 0,21                       | -            | 0,14          |
| 160                 | 0,29                              | 0,24                       | 0,19                       | -            | 0,12          |
| 170                 | 0,26                              | 0,21                       | 0,17                       | -            | 0,11          |
| 180                 | 0,23                              | 0,19                       | 0,15                       | -            | 0,10          |
| 190                 | 0,21                              | 0,17                       | 0,14                       | -            | 0,09          |
| 200                 | 0,19                              | 0,16                       | 0,13                       | -            | 0,08          |

**Додаток Г**  
**Зразок титульного аркуша розрахунково-графічного завдання**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ

Кафедра технічної механіки

Розрахунково-графічне завдання 1.1 з технічної механіки

**Визначення кінематичних характеристик  
механічних передач**

Варіант № 7214

Виконав  
Студент гр. ІТ 13-1  
Петренко М. П.

Перевірив  
Холодняк Ю. С.

Краматорськ 2015