

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

С. В. Подлесний, В. М. Іскрицький, Ю. С. Холодняк

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Курс лекцій

Навчальний посібник

**для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки»
денної форми навчання**

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол №10 від 29.04.2021.

Краматорськ
2021

УДК 531(075.8)

П 44

Рецензенти:

Гаврюков О.В., д-р техн. наук, доцент, Донбаська національна академія будівництва і архітектури;

Тарасов О.Ф., д-р. техн. наук, професор, Донбаська державна машинобудівна академія.

Подлесний, С. В.

П 44 Технічна механіка : *навчальний посібник [для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки» денної форми навчання]* /

С. В. Подлесний, В. М. Іскрицький, Ю. С. Холодняк. – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 331 с.

ISBN 978-966-379-986-5

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, методики та приклади розв'язання задач з технічної механіки у межах навчальної програми даної дисципліни для спеціальності «Комп'ютерні науки». Він може бути корисним також для інших немеханічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

УДК 531(075.8)

ISBN 978-966-379-986-5

© С. В. Подлесний,
В. М. Іскрицький,
Ю. С. Холодняк, 2021
© ДДМА, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП	7
1 ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.....	8
1.1 Кінематика.....	8
1.1.1 Кінематика точки.....	8
1.1.1.1 Вступ до кінематики. Основні поняття і визначення	8
1.1.1.2 Способи задавання руху точки.....	9
1.1.1.3 Визначення швидкості точки	11
1.1.1.4 Визначення прискорення точки	13
1.1.1.5 Окремі випадки руху точки.....	17
1.1.1.6 Приклади визначення кінематичних характеристик руху точки ..	18
1.1.2 Кінематика простих рухів твердого тіла	22
1.1.2.1 Поступальний рух твердого тіла.....	22
1.1.2.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість і кутове прискорення	23
1.1.2.3 Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі.....	26
1.1.2.4 Приклади визначення кінематичних характеристик простих рухів тіла.....	30
1.1.3 Плоско-паралельний рух твердого тіла.....	32
1.1.3.1 Основні визначення. Рівняння плоско-паралельного руху.....	32
1.1.3.2 Визначення швидкості точок плоскої фігури.....	33
1.1.3.3 Визначення прискорень точок плоскої фігури.....	38
1.1.3.4 Приклади визначення кінематичних характеристик плоского руху тіла і його точок.....	39
1.1.4 Складний рух точки.....	42
1.1.4.1 Відносний, переносний та абсолютний рухи точки. Абсолютна та відносна похідні від вектора.....	42
1.1.4.2 Теорема про додавання швидкостей при складному русі точки...45	
1.1.4.3 Теорема Коріоліса про додавання прискорень при складному русі точки.....	47
1.1.4.4 Визначення модуля і напрямку прискорення Коріоліса. Правило Жуковського.....	49
1.1.4.5 Приклади розв'язання задач складного руху точки.....	50
1.2 СТАТИКА.....	54
1.2.1 Основні поняття і аксіоми. Система збіжних сил	54
1.2.1.1 Основні поняття статички	54
1.2.1.2 Аксіоми статички.....	56
1.2.1.3 В'язі та їх реакції	58
1.2.1.4 Проекція сили на вісь.....	61
1.2.1.5 Система збіжних сил	63
1.2.1.6 Методика і приклади розв'язання задач	64
1.2.2 Момент сили. Пара сил	65

1.2.2.1 Момент сили відносно точки	65
1.2.2.2 Момент сили відносно осі	67
1.2.2.3 Теорема Варіньона про момент рівнодійної.....	69
1.2.2.4 Пара сил та її момент	71
1.2.2.5 Теореми про властивості пари сил. Умови рівноваги	72
1.2.3 Основна теорема статички і умови рівноваги довільної системи сил ..	74
1.2.3.1 Теорема про паралельне перенесення сили	74
1.2.3.2 Основна теорема статички (теорема Пуансо) про приведення довільної системи сил до заданого центру	74
1.2.3.3 Рівновага систем сил	76
1.2.3.4 Розподілене навантаження	79
1.2.3.5 Методика і приклади розв'язання задач рівноваги тіла під дією плоскої системи сил	80
1.2.4 Рівновага тіл при наявності тертя	83
1.2.4.1 Тертя ковзання. Закони тертя.....	83
1.2.4.2 Реакція шорсткої поверхні. Кут і конус тертя.....	85
1.2.4.3 Тертя кочення.....	87
1.2.4.4 Розв'язання задач рівноваги тіла на шорсткій поверхні	89
1.3 Динаміка	94
1.3.1 Динаміка матеріальної точки. Динаміка відносного руху	94
1.3.1.1 Введення в динаміку. Закони динаміки	94
1.3.1.2 Диференціальні рівняння руху точки.....	96
1.3.1.3 Дві задачі динаміки і методи їх розв'язання	97
1.3.1.4 Диференціальні рівняння гармонійних коливань	99
1.3.1.5 Приклади розв'язання другої задачі динаміки точки	101
1.3.2 Введення в динаміку механічної системи. Геометрія мас.	105
1.3.2.1 Основні поняття і визначення	105
1.3.2.2 Моменти інерції.....	107
1.3.2.3 Моменти інерції найпростіших однорідних тіл	109
1.3.2.4 Диференціальні рівняння руху механічної системи	112
1.3.3 Теореми про зміну кількості руху і про рух центра мас	113
1.3.3.1 Кількості руху точки і механічної системи. Елементарний і повний імпульс сили	114
1.3.3.2 Теорема про зміну кількості руху.....	115
1.3.3.3 Приклади розв'язання задач	116
1.3.3.4 Теорема про рух центра мас	118
1.3.3.5 Приклади розв'язання задач	119
1.3.4 Теорема про зміну кінетичного моменту	123
1.3.4.1 Кінетичний момент точки і механічної системи	124
1.3.4.2 Теорема про зміну кінетичного моменту	125
1.3.4.3 Приклади розв'язання задач	127
1.3.5 Теорема про зміну кінетичної енергії.....	129
1.3.5.1 Кінетична енергія точки і системи.....	129
1.3.5.2 Робота сили.....	130
1.3.5.3 Теорема про зміну кінетичної енергії.....	136

1.3.5.4	Потенціальне силове поле і силова функція	139
1.3.5.5	Потенціальна енергія.....	141
1.3.5.6	Закон збереження механічної енергії	142
1.3.5.7	Приклади розв'язання задач	143
1.3.6	Принцип Даламбера	145
1.3.6.1	Принципу Даламбера для матеріальної точки	145
1.3.6.2	Принципу Даламбера для механічної системи.....	146
1.3.6.3	Головний вектор і головний момент сил інерції.....	148
1.3.6.4	Сили інерції твердого тіла в окремих випадках його руху.....	149
1.3.6.5	Приклади розв'язання задач	150
1.3.7	Основні поняття аналітичної механіки. Принцип можливих переміщень та загальне рівняння динаміки	154
1.3.7.1	В'язі та їх класифікація.....	154
1.3.7.2	Можливі переміщення.	155
1.3.7.3	Можлива робота сили. Ідеальні в'язі.....	155
1.3.7.4	Принцип можливих переміщень.....	156
1.3.7.5	Загальне рівняння динаміки	157
1.3.7.6	Приклади розв'язання задач	159
2	ЕЛЕМЕНТИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ	164
2.1	Вступ. Метод перерізів	164
2.1.1	Основні поняття і завдання науки про опір матеріалів. Стисла історична довідка.....	164
2.1.2	Реальний об'єкт і розрахункова схема. Типові елементи конструкцій. Допущення опору матеріалів	166
2.1.3	Зовнішні сили і внутрішні зусилля. Метод перерізів	171
2.1.4	Напруження повне, нормальне і дотичне. Загальні принципи розрахунку елементів конструкції	173
2.2	Розтягання-стискання.....	175
2.2.1	Внутрішні зусилля у поперечних перерізах стрижнів, побудова їх епюр	175
2.2.2	Деформації і напруження при розтяганні - стисканні. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона	178
2.2.3	Умови міцності й жорсткості. Приклади розв'язання задач.....	180
2.2.4	Випробування матеріалів на розтягання і стискання	184
2.3	Геометрія плоских перерізів.....	194
2.3.1	Статичні моменти плоских перерізів. Визначення центрів ваги простих фігур	194
2.3.2	Моменти інерції плоских перерізів. Радіуси інерції.....	197
2.3.3	Моменти інерції простих фігур.....	198
2.3.4	Перетворення моментів інерції при паралельному переносі й повороті осей координат.....	201
2.3.5	Визначення напрямів головних центральних осей і величин головних моментів інерції	204
2.3.6	Приклади розрахунків.....	206
2.4	Теорія напруженого стану	213

2.4.1 Лінійний напружений стан	213
2.4.2 Поняття про головні напруження. Види напружених станів.....	215
2.4.3 Плоский напружений стан.....	217
2.4.4 Об'ємний напружений стан.....	226
2.5 Теорії міцності	232
2.5.1 Завдання теорій міцності. Критерії міцності, еквівалентні напруження.....	232
2.5.2 Перша теорія міцності (теорія найбільших розтягуючих напружень).....	233
2.5.3 Друга теорія міцності (теорія найбільших відносних подовжень).....	234
2.5.4 Третя теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень).....	235
2.5.5 Четверта теорія міцності (енергетична теорія формозмінення).....	236
2.5.6 Теорія міцності Мора	237
2.6 Плоске згинання прямих стрижнів	238
2.6.1 Основні поняття і визначення	238
2.6.2 Побудова епюр внутрішніх зусиль балок	240
2.6.3 Визначення нормальних напружень в балках	250
2.6.4 Визначення дотичних напружень	257
2.6.5 Сумісна дія нормальних і дотичних напружень. Повна перевірка міцності балок	265
2.7 Зсув.....	277
2.7.1 Чистий зсув, його особливості та напружений стан.....	277
2.7.2 Деформація і закон Гука при чистому зсуві.....	279
2.7.3 Розрахунки на міцність при зсуві	280
2.8 Кручення.....	285
2.8.1 Загальні положення. Побудова епюр крутних моментів.....	285
2.8.2 Напруження і деформації при крученні вала	288
2.8.3 Умови міцності й жорсткості при крученні. Приклади розв'язання задач	292
2.9 Переміщення в балках при плоскому згині	295
2.9.1 Потенційна енергія пружної деформації стрижнів	295
2.9.2 Теорема Кастільяно	301
2.9.3 Метод Мора.....	304
2.9.4 Правило Верещагіна.....	307
2.9.5 Формула крайніх ординат.....	312
2.10 Стійкість стиснутих стрижнів	318
2.10.1 Подовжній згин, його сутність.....	318
2.10.2 Визначення критичної сили. Задача Ейлера	319
2.10.3 Межі застосування формули Ейлера для критичного напруження. Формула Ясинського	322
2.10.4 Розрахунки на стійкість з використанням коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження.....	325
ЛІТЕРАТУРА	331
Додаток А. Основні параметри катаних профілів.....	332
Додаток Б. Параметри безпечного факторного простору двотаврів.....	338
Додаток В. Основні параметри стиснутих стрижнів	339

ВСТУП

Задачі, які ставить перед інженерами сучасна техніка, потребують проведення складних технічних розрахунків при проектуванні і експлуатації різноманітних механізмів і машин.

В сучасних умовах інформаційного та програмного забезпечення такі розрахунки проводяться зазвичай за участю фахівців, що мають вищу освіту зі спеціальності «Комп'ютерні науки».

У Донбаській державній машинобудівній академії таких фахівців готують на денному відділенні. Курс технічної механіки для них є одним із визначальних у їх загальній інженерній підготовці. Згідно з навчальною програмою він складається з найбільш значущих розділів теоретичної механіки і опору матеріалів, які супроводжуються багатьма прикладами розв'язання практичних задач.

Теоретична механіка закладає у майбутніх фахівців базові знання про механічний рух і силову взаємодію твердих тіл, а опір матеріалів – знання інженерних методів виконання розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Знання, набуті в курсі технічної механіки, дозволять студентам успішно опанувати подальші курси загальної інженерної підготовки і добре підготуватись до майбутньої професійної діяльності. Студенти отримають той мінімум фундаментальних знань, на базі яких вони зможуть професійно здійснювати комп'ютерні розрахунки реальних об'єктів нової техніки, самостійно оволодівати усіма новинками, які привносить науково – технічний прогрес.

Незважаючи на те, що даний навчальний посібник призначений в першу чергу для студентів, які навчаються за спеціальністю «Комп'ютерні науки», він буде корисним також студентам інших немеханічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

1 ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

У розділі «Теоретична механіка» розглядаються основні закони і принципи механіки, вивчаються загальні властивості руху механічних систем.

За характером розглядуваних завдань теоретичну механіку поділяють на три підрозділи: статику, кінематику і динаміку.

У статисти вивчаються умови рівноваги матеріальних об'єктів (тіл) під дією прикладених сил і методи еквівалентного перетворення систем сил, приведення їх до простішого вигляду.

У кінематиці розглядається рух матеріальних об'єктів (точок і тіл) з чисто геометричної точки зору, тобто без урахування їх інертності і діючих на них сил.

У динаміці вивчається механічний рух матеріальних об'єктів з урахуванням діючих сил.

Усе розмаїття матеріальних об'єктів моделюється в теоретичній механіці матеріальною точкою, системою матеріальних точок і абсолютно твердим тілом.

Матеріальною точкою називають просту модель матеріального об'єкта, розміри якого настільки малі, що ними можна нехтувати при вивченні того чи іншого руху, тобто це геометрична точка, яка має масу.

Система матеріальних точок – це сукупність матеріальних точок, рух і положення кожної з яких залежить від руху і положення всіх інших точок.

Абсолютно твердим тілом (надалі – твердим тілом) називають систему матеріальних точок, відстані між якими залишаються весь час незмінними.

1.1 Кінематика

1.1.1 Кінематика точки

1.1.1.1 Введення в кінематику. Основні поняття і визначення

Кінематикою називається розділ механіки, у якому вивчається рух матеріальних об'єктів (точок і тіл) без урахування їх інертності і діючих на них сил.

Рух завжди розглядають щодо деякої системи відліку: пов'язаної з деяким тілом (наприклад, Землею) системи координат.

Рівняння, що дозволяють визначати положення об'єктів у вибраній системі відліку в будь-який момент часу називаються рівняннями руху цих об'єктів і висловлюють закони руху цих об'єктів.

Одне із завдань кінематики точки – завдання її закони руху, тобто встановлення математичного рівняння, у якому параметри, що визначають положення точки, є функцією від часу.

Інше основне завдання кінематики полягає у визначенні за заданим законом руху точки її траєкторії, швидкості і прискорення, інших кінематичних характеристик цього руху.

Траєкторією точки називають геометричне місце послідовних положень рухомої точки. Траєкторія – це безперервна лінія, яка може бути прямою або кривою. Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то її рух називають прямолінійним, а якщо ця умова не виконується, то – криволінійним.

Швидкість – фізична величина, що характеризує швидкість зміни положення точки з часом.

Прискорення характеризує швидкість зміни швидкості точки з часом.

1.1.1.2 Способи задавання руху точки

Рух точки задають трьома основними способами: векторним, координатним і натуральним.

Векторний спосіб. За цим способом положення рухомої точки M у просторі в кожний момент часу можна визначати радіусом-вектором $\vec{r} = \overline{OM}$, проведеним з деякої нерухомої точки O простору в рухому точку M (рис. 1.1).

Рівняння руху точки при векторному способі завдання руху висловлює залежність радіуса-вектора точки від часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

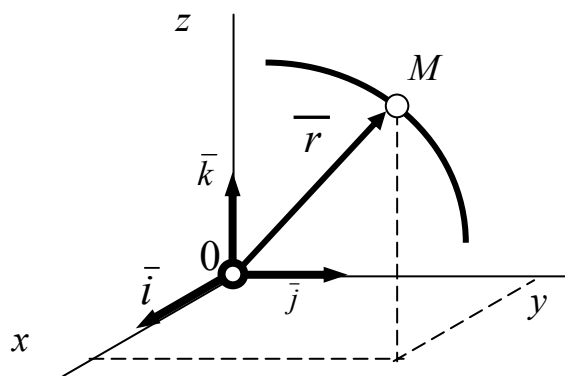


Рисунок 1.1

Кінець вектора \vec{r} під час руху точки переміщується за її траєкторією. Геометричне місце кінців змінного вектора, початок якого весь час знаходиться в одній і тій самій точці, називають годографом вектора. Отже, траєкторія точки є годографом її радіуса-вектора.

Координатний спосіб. Положення точки відносно деякої системи координат визначають координатами точки. У прямокутній декартовій системі координат цей спосіб полягає у вираженні координат x , y , z рухомої точки M (див. рис. 1.1) як відомих функцій часу:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (1.1)$$

У цьому випадку радіус-вектор точки M

$$\bar{r} = \bar{i}r_x + \bar{j}r_y + \bar{k}r_z = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z,$$

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орти координатних осей.

Рівняння (1.1) руху точки у координатній формі можна розглядати також як рівняння траєкторії точки, де параметром виступає час t . Виключивши з цих рівнянь руху параметр t , можна знайти рівняння траєкторії у звичайній координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами точки.

Натуральний спосіб. Для задавання руху точки натуральним способом необхідно знати траєкторію точки із заданим на ній початком O і додатнім напрямком відліку по дузі траєкторії дуговою координатою s точки (рис. 1.2).

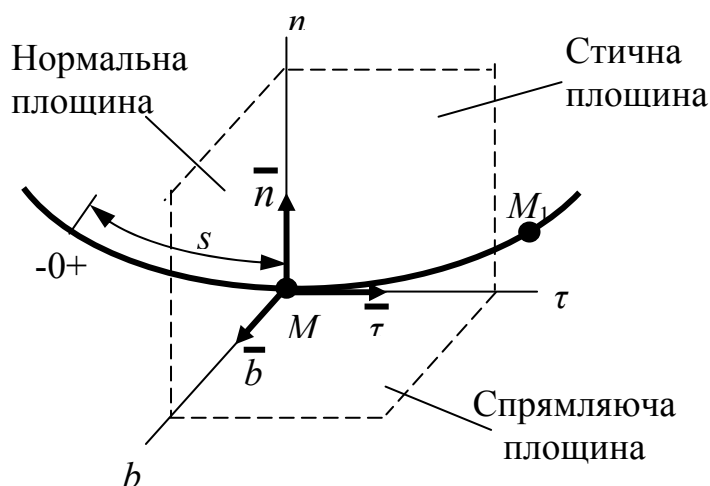


Рисунок 1.2

Тоді положення точки M у будь-який момент часу визначають дуговою координатою s , вимірюваною вздовж дуги траєкторії від початку відліку, і відповідно залежності

$$s = s(t),$$

яку називають рівняння руху точки в натуральній формі.

При вивченні руху точки, заданого натуральним способом, вводять зв'язану з рухомою точкою M рухомою прямокутну систему координат $M\tau nb$ (див. рис. 1.2). Осі цієї системи координат (осі натурального тригранника) направлені таким чином: дотична вісь $M\tau$ – за дотичною до траєкторії в напрямку збільшення координати s , вісь головна нормаль Mn – перпендикулярно до дотичної осі у бік угнутості траєкторії, вісь бінормаль Mb – перпендикулярно першим двом осям, створюючи з ними праву систему координат. Орти $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ цих координатах осей встановлюють відомі з диференціальної геометрії три взаємно перпендикулярні напрямки (дотична, головна нормаль і бінормаль) і створюють координатні площини: стична площина проходить через дотичну $\bar{\tau}$ і головну нормаль \bar{n} , нормальна – через головну нормаль \bar{n} і бінормаль \bar{b} , а спрямляючі – через дотичну $\bar{\tau}$ та бінормаль \bar{b} . Якщо траєкторія точки є плоскою кривою, то вона розміщена в стичній площині.

1.1.1.3 Визначення швидкості точки

Швидкість точки характеризує зміну з плином часу положення і напрямки руху точки у вибраній системі відліку.

Вектор швидкості точки

При векторному способі задавання руху вектор швидкості \bar{V} визначають, розглядаючи зміну радіуса-вектора \bar{r} точки на величину $\Delta\bar{r}$ (рис. 1.3) за проміжок часу Δt , коли точка перемістилась із положення M в положення M_1 . Тоді середньою швидкістю точки за проміжок часу Δt буде відношення

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

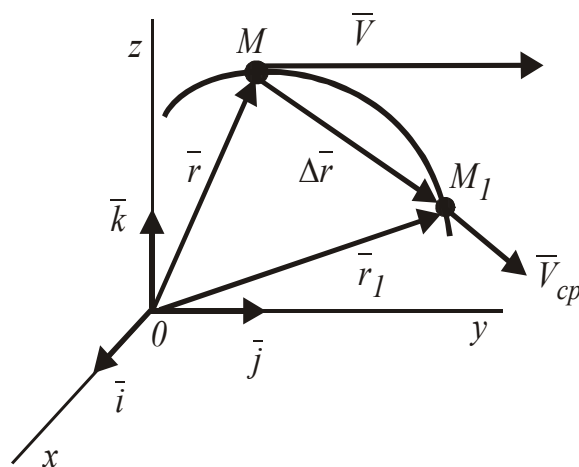


Рисунок 1.3

Напрямок вектора середньої швидкості \bar{V}_{cp} співпадає з напрямком вектора $\Delta\bar{r}$ – вздовж хорди у напрямку переміщення Δt .

Швидкість \bar{V} точки у цей момент часу знаходиться як межа середньої швидкості при прагненні Δt до нуля, тобто

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}. \quad (1.2)$$

Направлений цей вектор за дотичною до траєкторії у напрямку руху точки.

Одиниця виміру швидкості точки у системі СІ – 1 м/с.

Формули для визначення швидкості точки при координатному способі завдання руху

Якщо рух точки задано координатним способом, то швидкість точки визначається через проєкції вектора швидкості на осі координат:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}.$$

Проєкції вектора швидкості на декартові осі координат дорівнюють першій похідній за часом від відповідних координат точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

За цими проєкціями можна визначити модуль вектора швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

і його напрямні косинуси:

$$\cos\left(\widehat{\bar{V}, \bar{i}}\right) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos\left(\widehat{\bar{V}, \bar{j}}\right) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos\left(\widehat{\bar{V}, \bar{k}}\right) = \frac{V_z}{V}.$$

Швидкість точки при натуральному способі задавання руху

При натуральному способі завдання руху точки її швидкість визначають за такою залежністю:

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}.$$

Проекцію вектора швидкості $V_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ на дотичну вісь $M\tau$ називають алгебраїчною швидкістю точки. Знак алгебраїчної швидкості залежить від напрямку руху точки: якщо $V_\tau > 0$, то точка рухається в позитивному напрямку відліку дугової координати, а якщо $V_\tau < 0$, то – в негативному. Модуль вектора швидкості $V = |V_\tau| = |\dot{s}|$ відрізняється від алгебраїчної швидкості тільки відсутністю знака, тому будемо позначати ці дві величини одним і тим самим символом.

1.1.1.4 Визначення прискорення точки

Прискоренням точки називається векторна величина, яка характеризує зміну з часом модуля і напрямку вектора швидкості точки.

Вектор прискорення точки

Вводячи поняття середнього прискорення $\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$, яке характеризує зміну вектора швидкості точки $\Delta \bar{V} = \bar{V} - \bar{V}_1$ при її переміщенні з положення M у положення M_1 за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ (рис. 1.4), знайдемо прискорення точки у момент часу t як межу, до якої прямує середнє прискорення \bar{a}_{cp} при наближенні Δt до нуля:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

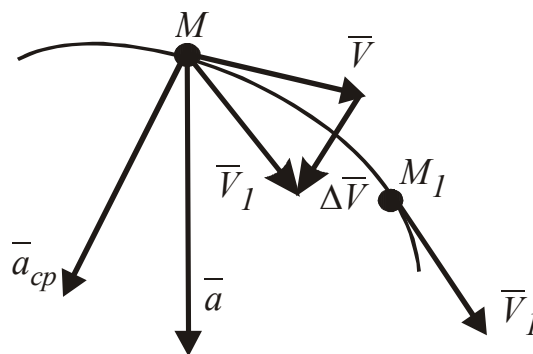


Рисунок 1.4

Тоді, з врахуванням (1.2), де $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$, матимемо:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}. \quad (1.3)$$

Отже, вектор прискорення точки у певний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом.

Вектор \bar{a}_{cp} лежить у площині, створеній векторами \bar{V} і \bar{V}_1 . Коли Δt прямує до нуля, точка M_1 наближається до точки M , і площина векторів (\bar{V}, \bar{V}_1) повертається навколо вектора \bar{V} , прагнучи до положення стичної площини. Отже, вектор прискорення \bar{a} лежить у стичній площині $M\tau\pi$ (див. рис. 1.2) і направлений у бік увігнутості траєкторії.

Одиниця виміру прискорення в системі СІ – 1 м/с^2 .

Прискорення точки при координатному способі задавання руху

При координатному способі завдання руху прискорення точки визначають через його проєкції на координатні осі:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\bar{i} + \frac{dV_y}{dt}\bar{j} + \frac{dV_z}{dt}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

Проєкції вектора прискорення точки на декартові осі координат визначаються формулами :

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}.$$

За проєкціями вектора прискорення визначимо його модуль

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

і його напрямні косинуси:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Прискорення точки при натуральному способі задавання руху

Підставимо вираз вектора швидкості точки у вигляді $\bar{V} = V_\tau \cdot \bar{\tau}$, де $V_\tau = \dot{s}$ – проєкція вектора швидкості на вісь τ , у формулу (1.3) для визначення прискорення:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_\tau \cdot \bar{\tau}) = \frac{dV_\tau}{dt}\bar{\tau} + V_\tau \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (1.4)$$

Перший доданок у правій частині $\frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau}$ направлений за дотичною осі у напрямку збільшення координати s , якщо алгебраїчна швидкість точки V_τ збільшується, або в напрямку зменшення s , якщо V_τ зменшується. Він називається дотичною складовою (*дотичним прискоренням*) і позначається \bar{a}_τ . Отже,

$$\bar{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} \bar{\tau} = \ddot{s} \bar{\tau}.$$

Як виходить з (1.4), *дотичне прискорення характеризує зміну швидкості і дорівнює першій похідній від проєкції швидкості на дотичну або другій похідній від дугової координати за часом.*

Для визначена величиною другого доданку у виразі (1.4), подамо його у вигляді

$$V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt} = V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V_\tau^2 \frac{d\bar{\tau}}{ds}. \quad (1.5)$$

Встановимо величину і напрямок вектора $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$. Вектор $\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}$ завжди направлений у бік увігнутості траєкторії і лежить в площині, що проходить через точку M і вектори $\bar{\tau}, \bar{\tau}_1$ (рис. 1.5).

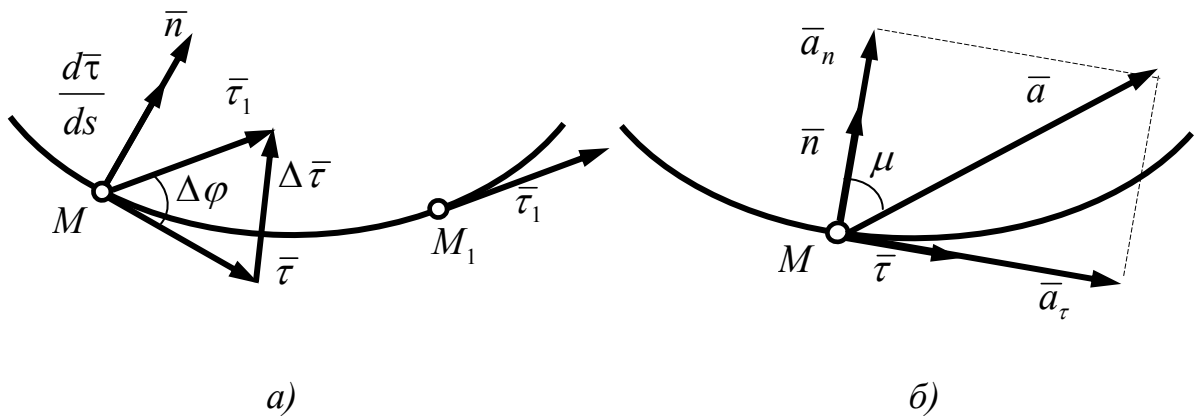


Рисунок 1.5

Кут нахилу вектора $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ до вектора $\bar{\tau}$ визначимо, диференціюючи за s тотожність $\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = \bar{\tau}^2 = 1$; одержимо $2 \frac{d\bar{\tau}}{ds} \bar{\tau} = 0$. Із цього випливає, що

вектори $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ і $\bar{\tau}$ взаємно перпендикулярні. Отже, вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ направлений за головною нормаллю до центра кривизни траєкторії.

Визначаючи модуль вектора, встановимо, що $|\Delta\bar{\tau}| = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ (див. рис. 1.5). Тому

$$\left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Тут $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}$ – це відома з математики величина, яку називають кривизною кривої в цій точці M , а обернена їй величина $\rho = \frac{1}{k}$ – радіус кривизни. Отже,

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\bar{n}}{\rho}. \quad (1.6)$$

Тоді з врахуванням (1.5) і (1.6) другий доданок виразу (1.4) набуде вигляду $V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt} = V^2 \cdot \frac{\bar{n}}{\rho}$, оскільки $V_\tau^2 = V^2$. Це друга складова прискорення точки, яка називається *нормальним прискоренням* \bar{a}_n , тобто

$$\bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \bar{n} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}.$$

Звідси випливає, що *нормальне прискорення* \bar{a}_n направлене у бік *ввігнутості траєкторії до центра кривизни і характеризує зміну вектора швидкості за напрямком*.

Таким чином, вектор прискорення точки має дві складові: дотичну та нормальну, які лежать у стичній площині (рис. 1.5, б):

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Складова вектора прискорення у напрямку бінормалі дорівнює нулю, тобто $\bar{a}_g = 0$.

Модуль вектора прискорення заходиться за формулою

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$


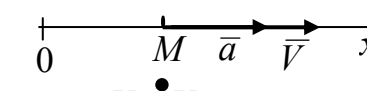
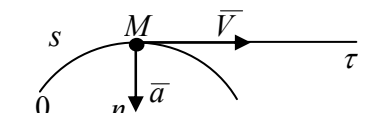
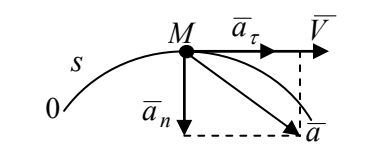
Напрямок вектора \bar{a} визначимо кутом μ між векторами \bar{a} та \bar{a}_n :

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a_\tau}{a_n}$$

1.1.1.5 Окремі випадки руху точки

Розглянемо зведені в таблиці 1.1 випадки характеру руху точки залежно від значень дотичного і нормального прискорень.

Таблиця 1.1

Характер руху точки	Значення прискорення			Траєкторія, вектори швидкості і прискорення, кінематичні залежності
	\bar{a}_τ	\bar{a}_n	\bar{a}	
Рівномірний прямолінійний рух	$a_\tau = a_x = 0$	$a_n = 0$	$a = 0$	 $\bar{V} = \text{const}; x = x_0 + Vt$
Рівнозмінний прямолінійний рух	$a_\tau = a_x =$ $= \frac{dV}{dt} =$ $= \text{const}$	$a_n = 0$	$\bar{a} = \bar{a}_\tau$	 $V = V_0 + at$ $x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$
Рівномірний криволінійний рух	$a_\tau = 0$	$a_n = \frac{V^2}{\rho}$	$\bar{a} = \bar{a}_n$	 $s = s_0 + Vt$ $V = \text{const}$
Рівнозмінний криволінійний рух	$a_\tau = \frac{dV}{dt} =$ $= \text{const}$	$a_n = \frac{V^2}{\rho}$	$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$	 $V = V_0 + a_\tau t$ $s = s_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$

Як бачимо, тільки в разі рівномірного прямолінійного руху точки її прискорення дорівнюють нулю. В інших окремих випадках руху точка має відмінне від нуля прискорення: при змінному прямолінійному русі прискорення точки буде тільки дотичним, при рівномірному криволінійному – тільки нормальним, а при змінному криволінійному русі прискорення точки буде складатися з дотичного і нормального прискорень.

Слід зазначити, що дотичне прискорення дорівнює нулю при русі точки з постійною алгебраїчною швидкістю, або в моменти часу, коли алгебраїчна швидкість набуває екстремальних значень (максимум або мінімум).

Нормальне прискорення дорівнюватиме нулю при прямолінійному русі або в місцях перегину траєкторії, тобто коли $\rho = \infty$, а також в ті моменти часу, коли швидкість точки дорівнює нулю.

1.1.1.6 Приклади визначення кінематичних характеристик руху точки

Приклад 1. Знайти рівняння траєкторії, швидкість, прискорення та радіус кривизни траєкторії точки в момент часу $t_1 = \frac{\pi}{8}$ с, якщо рух точки задано рівняннями $x = 25 \cos 2t$; $y = 15 \sin 2t$ (x, y – у сантиметрах).

Розв'язання

У цій задачі закон руху точки заданий у координатній формі.

Для визначення рівняння траєкторії точки M виключимо час t з рівняння руху, виразивши значення тригонометричних функцій:

$$\cos 2t = \frac{x}{25}; \quad \sin 2t = \frac{y}{15}$$

Піднісши обидві частини цих рівностей до квадрату та склавши їх, одержимо:

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1.$$

Отже, траєкторія точки буде еліпсом з півосями 25 і 15 см з центром в точці O . Побудуємо траєкторію у вибраному масштабі і покажемо на ній положення точки M у заданий момент часу $t_1 = \frac{\pi}{8}$ с, коли її координати будуть

$$x_M = 25 \cos \frac{\pi}{4} = 17,675 \text{ см}; \quad y_M = 15 \sin \frac{\pi}{4} = 10,605 \text{ см (рис. 1.6)}.$$

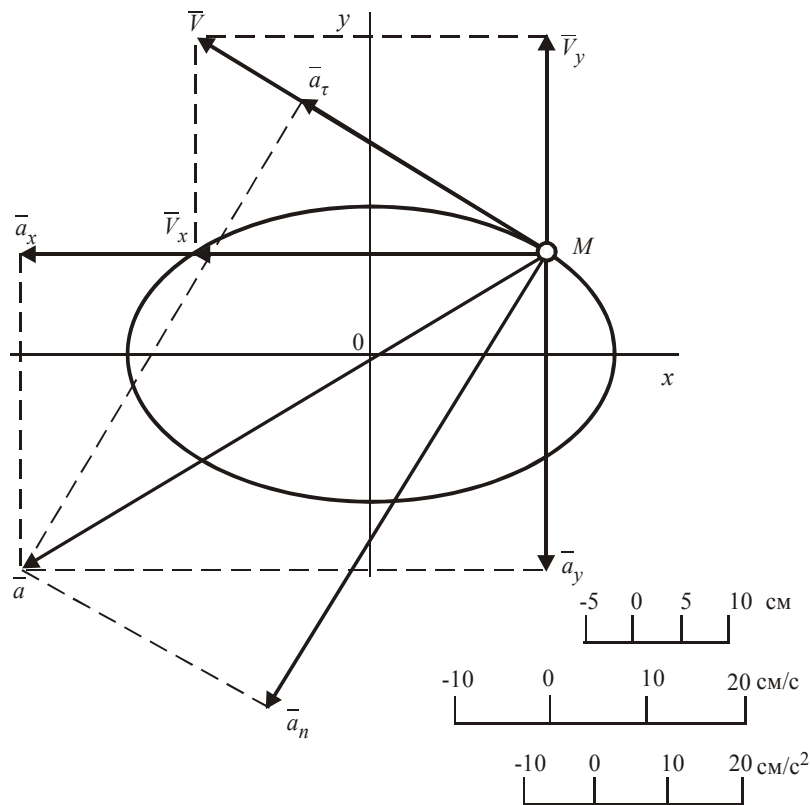


Рисунок 1.6

Швидкість і прискорення точки знайдемо за їх проекціями на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = -50 \sin 2t; \quad V_y = \dot{y} = 30 \cos 2t;$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -100 \cos 2t; \quad a_y = -60 \sin 2t;$$

Визначимо модулі та напрямки швидкості і прискорення :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 10 \sqrt{25 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t};$$

При $t_1 = \frac{\pi}{8}$ с маємо:

$$V_x = -50 \sin \frac{\pi}{4} = -35,35 \text{ см/с}, \quad V_y = 30 \cos \frac{\pi}{4} = 21,2 \text{ см/с}, \quad V = \sqrt{(-35,35)^2 + 21,2^2} = 41,2 \text{ см/с};$$

$$a_x = -100 \cos \frac{\pi}{4} = -70,7 \text{ см/с}^2; \quad a_y = -60 \sin \frac{\pi}{4} = -42,4 \text{ см/с}^2; \quad a = \sqrt{(-70,7)^2 + (-42,4)^2} = 82,45 \text{ см/с}^2.$$

Напрямок вектора \vec{V} у будь-який момент часу визначається направляючими косинусами:

$$\cos\left(\vec{V}, x\right) = \frac{V_x}{V} = \frac{5 \sin 2t}{\sqrt{25 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}};$$

$$\cos\left(\vec{V}, y\right) = \frac{V_y}{V} = \frac{3 \cos 2t}{\sqrt{25 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10\sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t};$$

направляючі конуса вектора прискорення:

$$\cos\left(\vec{a}, x\right) = \frac{a_x}{a} = -\frac{10 \cos 2t}{\sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t}};$$

$$\cos\left(\vec{a}, y\right) = \frac{a_y}{a} = -\frac{6 \sin 2t}{\sqrt{100 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t}}.$$

Дотичне прискорення знайдемо, диференціюючи величину швидкості точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

і в момент часу $t_1 = \frac{\pi}{8}$ маємо:

$$a_\tau = \frac{(-35,35) \cdot (-70,7) + 21,2 \cdot (-42,4)}{41,2} = 38,85 \text{ см/с}^2.$$

Знайдемо нормальне прискорення точки за формулою

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{82,45^2 - 38,85^2} = 72,7 \text{ см/с}^2.$$

Радіус кривизни траєкторії в цій точці M_1 дорівнює:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{41,2^2}{72,7} = 23,35 \text{ см}.$$

У заданому положенні точки в масштабі будемо вектор \vec{V} зі складовими \vec{V}_x та \vec{V}_y , направляючи вектор швидкості за дотичною до траєкторії (див. рис. 1.6). Вектор \vec{a} знаходимо за складовими \vec{a}_x і \vec{a}_y , а також і за \vec{a}_τ та \vec{a}_n , як показано на рисунку 1.6. Виконання умов побудови цих векторів підтверджує правильність проведених обчислень.

Приклад 2. Точка рухається колом радіуса 25 м за законом $s = 2t^2 + 3t$ (s – у метрах, t – у секундах). Визначити прискорення точки у той момент часу, коли її дугова координата буде дорівнювати 27 м.

Розв'язання

Рух точки задано натуральним способом. Виберемо на траєкторії початкове положення O та додатний напрямок руху (рис. 1.7) і покажемо положення M_1 точки в той момент часу t_1 , коли її дугова координата

$s_1 = 27$ м, що відповідає центральному куту $\varphi_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{27}{25} = 1,08$ рад.

Знайдемо час t_1 руху точки, підставивши в рівняння руху значення s_1 і t_1 : $27 = 2t_1^2 + 3t_1$. Із квадратного рівняння $2t^2 + 3t - 27 = 0$, знайдемо:

$$t_1 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 27}}{4} = \frac{-3 \pm 15}{4},$$

тобто $t_1 = 3$ с.

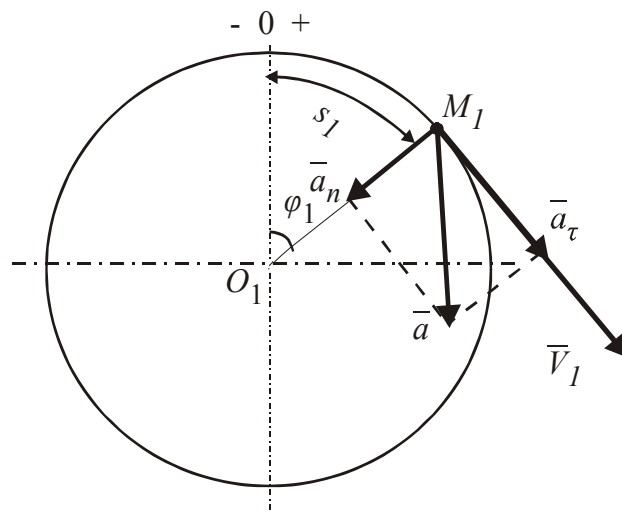


Рисунок 1.7

Величина швидкості і прискорення точки дорівнюють:

$$V = \frac{ds}{dt} = 4t + 3, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = 4 \text{ м/с}^2 = \text{const.}$$

При $t = t_1 = 3$ с швидкість $V_1 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$ м/с. Тоді нормальне прискорення точки у цей момент часу

$$a_n = \frac{V_1^2}{R} = \frac{15^2}{25} = 9 \cdot \text{м/с}^2,$$

а повне прискорення точки в положенні M_1

$$a_{M_1} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{4^2 + 9^2} = 9,85 \text{ м/с}^2.$$

1.1.2 Кінематика простих рухів твердого тіла

1.1.2.1 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається, залишаючись паралельною своєму початковому положенню.

Прикладами поступального руху є рух кузова автомобіля на прямолінійній ділянці шляху, рух спарника AB (рис. 1.8), що з'єднує кривошипи OA і O_1B однакової довжини, які обертаються. Точки спарника при цьому рухаються дугами кіл однакового радіуса, а пряма AB спарника весь час залишається паралельною лінії OO_1 шарнірно закріплених кривошипів.

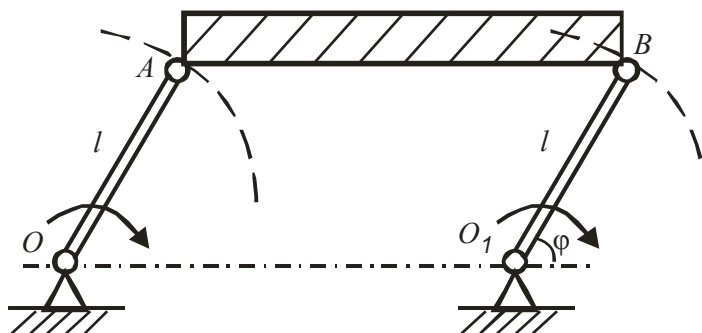


Рисунок 1.8

Властивості поступального руху тіла визначаються такою теоремою: при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії і в кожний момент часу мають рівні між собою вектори швидкостей і вектори прискорень.

Доказ теореми ілюструється рисунком 1.9, де радіуси-вектори \vec{r}_A і \vec{r}_B довільних точок A і B тіла зв'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (1.7)$$

Через те, що вектор \overline{AB} сталий за величиною та напрямком, то траєкторії точок A і B співпадуть при накладанні.

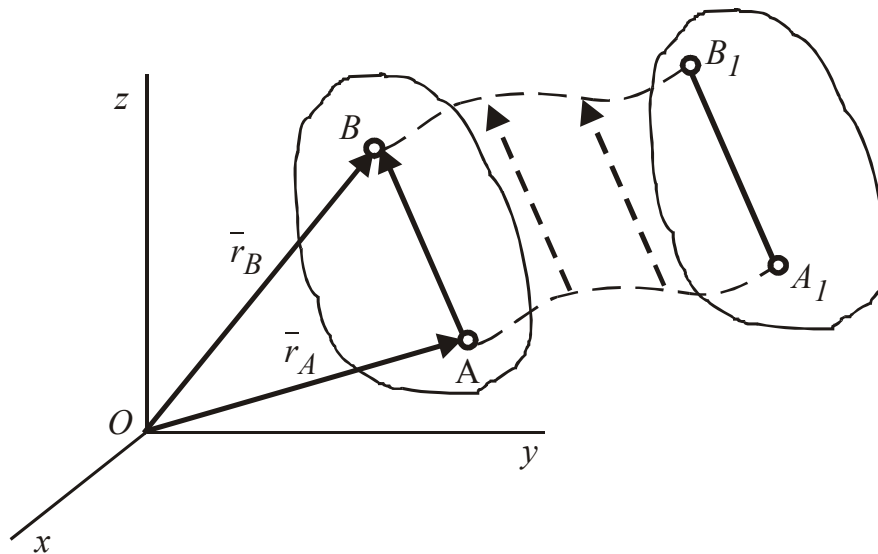


Рисунок 1.9

Диференціюючи за часом співвідношення (1.7) із врахуванням того, що $\frac{d(\overline{AB})}{dt} = 0$, одержимо: $\overline{V}_B = \overline{V}_A$. Аналогічно отримаємо, що $\overline{a}_B = \overline{a}_A$, що підтверджує доказ теореми.

Із цієї теореми випливає, що поступальний рух тіла повністю характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла (наприклад, точки A). Тому рівняння поступального руху твердого тіла набуває вигляду

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); z_A = f_3(t),$$

а кінематичні характеристики поступального руху тіла визначаються за формулами кінематики точки.

1.1.2.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Кутова швидкість і кутове прискорення

Обертальним називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла, що лежать на деякій зв'язаній з тілом прямій лінії, залишаються нерухомими під час руху тіла. Ця пряма називається віссю обертання. Точки тіла, які не лежать на осі обертання, рухаються колами, що лежать у площинах, перпендикулярних осі обертання, а центри кіл знаходяться на цій осі.

Положення тіла, що обертається, визначається кутом φ (кутом повороту тіла навколо осі обертання) (рис. 1.10), який вимірюється в радіанах та обертах. Вважатимемо кут φ додатним, якщо з додатного напрямку осі обертання бачимо його відкладеним проти ходу годинникової стрілки.

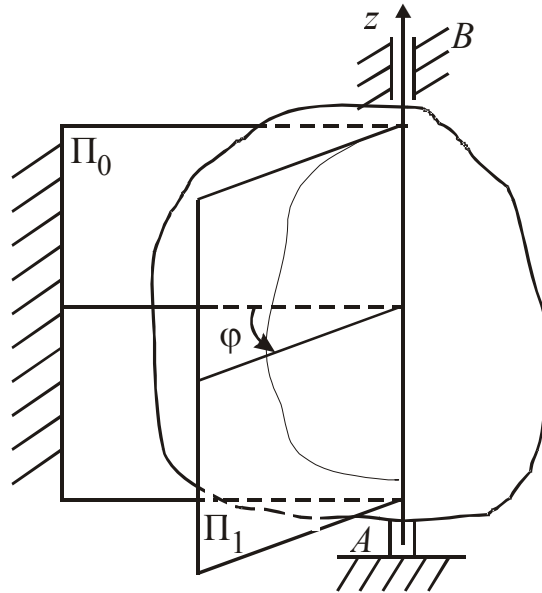


Рисунок 1.10

Залежність кута повороту від часу

$$\varphi = \varphi(t)$$

є рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Вимірюється кут повороту φ в радіанах.

Кінематичними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість ω (омега) і кутове прискорення ε (епсilon).

Кутовою швидкістю називається фізична величина, що характеризує швидкість зміни кута повороту φ з часом.

Нехай за проміжок часу Δt кут повороту тіла φ дістав приросту $\Delta\varphi$. Тоді середня кутова швидкість тіла за проміжок часу Δt

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Межа, до якої наближається середня кутова швидкість ω_{cp} , коли проміжок часу Δt прямує до нуля, називається кутовою швидкістю в певний момент часу t :

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Отже, кутова швидкість тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (1.8)$$

Якщо $\omega > 0$, то тіло в цей момент часу обертається в додатному напрямку, тобто проти ходу годинникової стрілки.

$$\text{Одиниця виміру кутової швидкості } [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Інколи кутову швидкість вимірюють в обертах за хвилину (n , об/хв). Тоді кутова швидкість ω в радіанах за секунду обчислюється за формулою

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Кутова швидкість може бути зображена вектором $\vec{\omega}$, модуль якого визначається формулою (1.8), і який напрямлений вздовж осі обертання в той бік, звідки обертання тіла видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 1.11).

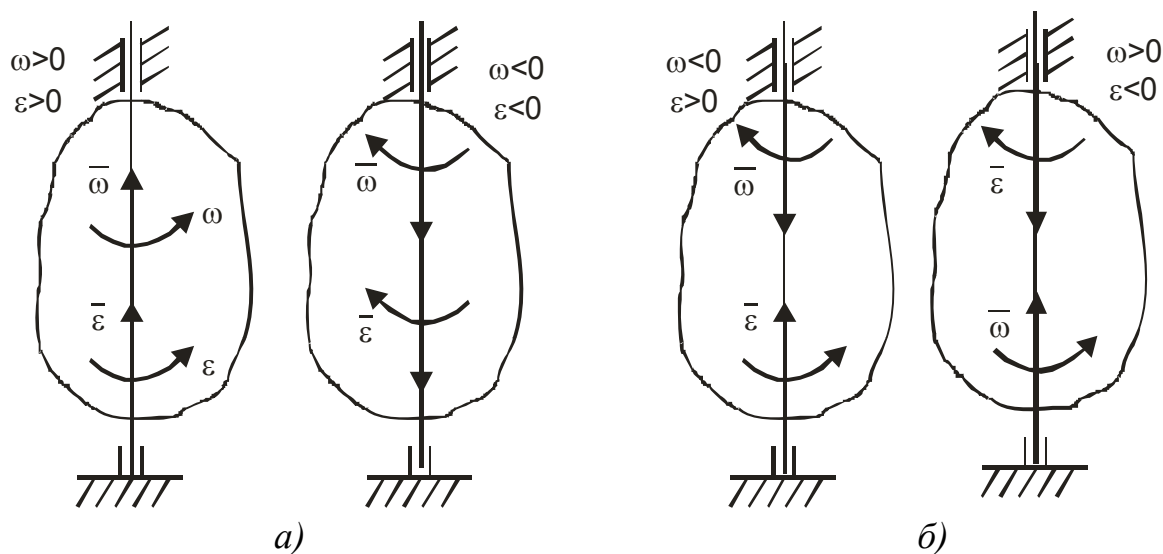


Рисунок 1.11

Цей вектор визначає положення осі обертання тіла в просторі та напрямок обертання навколо осі. Точка прикладання вектора $\vec{\omega}$ вибирається на осі обертання довільно, тобто $\vec{\omega}$ ковзний вектор. Кутове прискорення характеризує швидкість зміни з часом кутової швидкості тіла.

Кутове прискорення в певний момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла:

$$\varepsilon = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Одиниця виміру кутового прискорення – $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{c^2} = c^{-2}$. Кутове прискорення також зображають ковзним вектором $\bar{\varepsilon}$, направленим вздовж осі обертання. При прискореному обертанні, якщо модуль кутової швидкості з часом збільшується, кутова швидкість і кутове прискорення мають однакові знаки, і вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ направлені в одному і тому самому напрямку (див. рис. 1.11, а). У випадку сповільненого обертання знак кутового прискорення протилежний знаку кутової швидкості, а вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ направлені у протилежних напрямках (див. рис. 1.11, б).

В окремих випадках розрізняють *рівномірний* і *рівнозмінний* обертальні рухи тіла.

При рівномірному обертанні, коли кутова швидкість тіла не змінюється, тобто $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$, рівняння рівномірного обертання має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

де φ_0 – початковий кут повороту.

Якщо кутове прискорення тіла під час руху залишається постійним, тобто $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}$, то обертання називають *рівнозмінним*. При рівнозмінному обертанні кутова швидкість тіла змінюється за законом

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

а рівняння рівнозмінного обертання набуде вигляду

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

1.1.2.3 Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо точку M , яка знаходиться на відстані R від осі обертання. Цю відстань також називають радіусом обертання. Траєкторією точки M буде коло з радіусом обертання R , центр C якого лежить на осі обертання (рис. 1.12, а, б). Виберемо на траєкторії початок відліку в положенні M_0 , де

точка знаходилась у момент часу $t=0$. При повороті тіла на кут φ дугова координата s виразиться залежністю

$$s = R\varphi \quad (1.9)$$

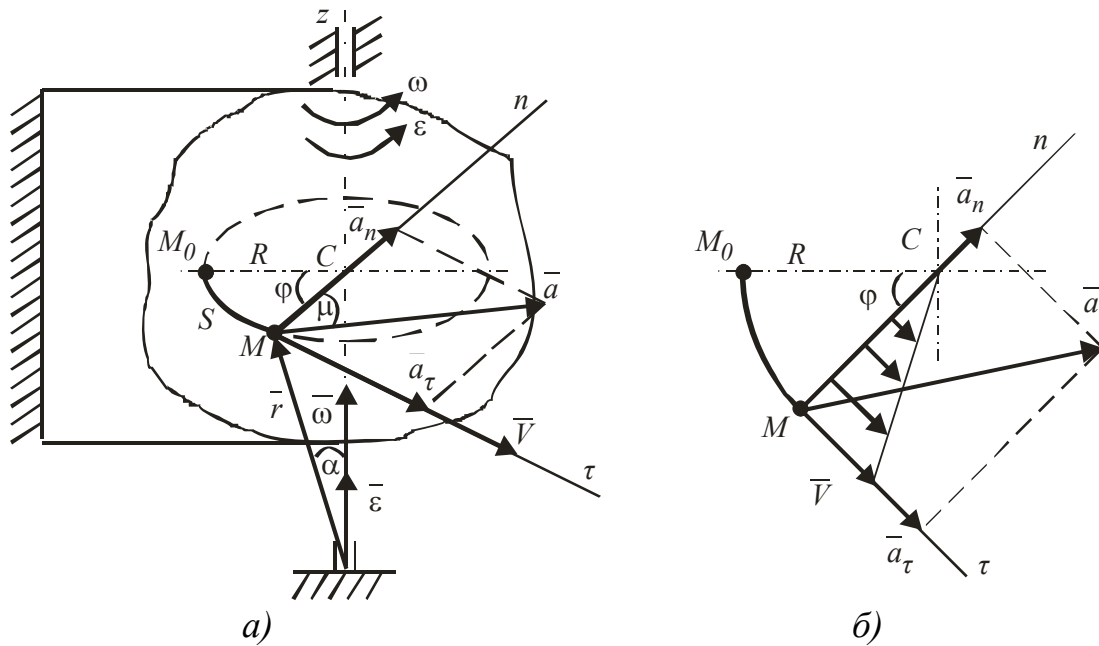


Рисунок 1.12

Тоді швидкість точки M буде $V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$, або

$$V = R \cdot \omega. \quad (1.10)$$

Отже, лінійна швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку радіуса обертання на кутову швидкість тіла. Швидкість точки направлена за дотичною τ до траєкторії кола у бік обертання і, таким чином, перпендикулярна до радіуса обертання R .

З формули (1.9) випливає, що швидкості точок при обертальному русі тіла пропорціональні їх відстаням до осі обертання (рис. 1.12, б).

Прискорення точки M має дотичну і нормальну складові, тобто

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Виразимо ці прискорення через кінематичні характеристики ω і ε обертального руху, скориставшись формулами:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{R}.$$

З врахуванням формули (1.10) одержимо:

$$a_{\tau} = R \frac{d\omega}{dt} \text{ і } a_n = \frac{R^2 \omega^2}{R}$$

або остаточно

$$a_{\tau} = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R.$$

Вектор дотичного прискорення направлений за дотичною до кола обертання і співпадає з напрямком швидкості при прискореному обертанні та протилежний вектору швидкості при сповільненому.

Вектор нормального прискорення направляється за радіусом обертання до осі обертання (див. рис. рис. 1.12, б).

Модуль повного прискорення точки M

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Напрямок вектора повного прискорення встановлюється кутом μ нахилу цього вектора до радіуса обертання (див. рис. рис. 1.12, б), який визначається із співвідношення

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (1.11)$$

Покажемо, що вектор швидкості точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$ та радіуса-вектора \bar{r} цієї точки, проведеного з довільного центра на осі обертання (див. рис. рис. 1.12, а), тобто

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (1.12)$$

Це співвідношення називається формулою Ейлера.

Якщо водночас $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, де вектор \bar{r} у цьому випадку змінюється

тільки за напрямком ($|\bar{r}| = \text{const}$), тоді $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, тобто формула Ейлера є узагальненим правилом знаходження похідної вектора постійного модуля.

Справедливість формули (1.11) підтверджується тим, що відповідно до правила векторного добутку напрямок вектора $\bar{\omega} \times \bar{r}$ співпадає з напрямком вектора \bar{V} (див. рис. рис. 1.12, а), а його модуль $|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega \cdot R = V$.

Для знаходження вектора прискорення точки тіла, що обертається, продиференціюємо вираз (1.10) за часом:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

або

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (1.13)$$

Ці дві складові прискорення у формулі (1.13) є дотичним і нормальним прискореннями:

$$\begin{aligned} \vec{a}_\tau &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \\ \vec{a}_n &= \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned}$$

При передаванні обертального руху від тіла 1 до тіла 2 (рис. 1.13) за допомогою зубчатих або фрикційних, (див. рис. 1.13, а) чи ремінних або ланцюгових (див. рис. 1.13, б) передач швидкості і дотичні прискорення точок на ободах коліс, що знаходяться в зачепленні, однакові, тобто виконуються такі співвідношення: $\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$ та $\varepsilon_1 \cdot R_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2$.

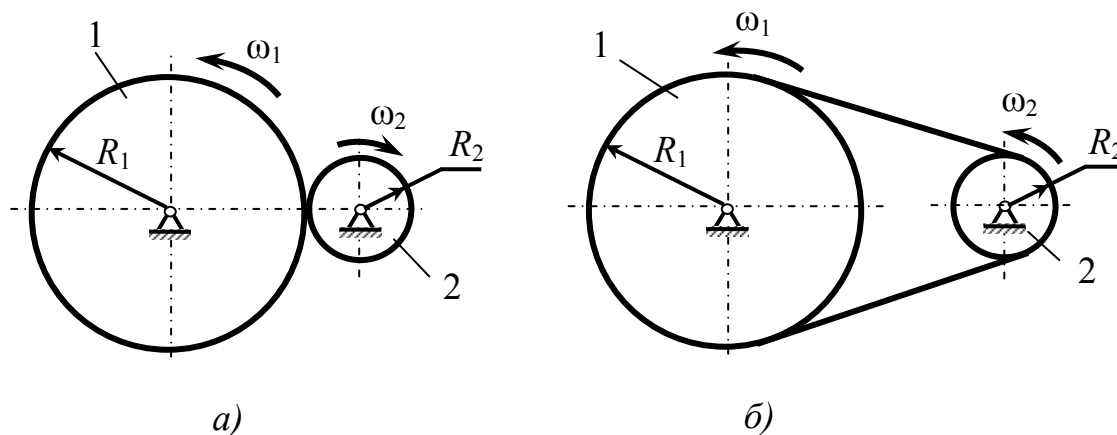


Рисунок 1.13

Звідси одержимо, що кутові швидкості і кутові прискорення коліс обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Для передавальних механізмів з зубчастими колесами можна записати:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

де z_1, z_2 – кількість зубців відповідно першого і другого коліс.

1.1.2.4 Приклади визначення кінематичних характеристик простих рухів тіла

Приклад 1. Механізм, показаний на рисунку 1.14, переміщує вантаж 4 завдяки обертанню шестерні 1 за законом $\varphi_1 = (3t^2 - 8t)$ рад. Визначити в момент часу $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точки А, яка знаходиться на ободі барабана 3, а також прискорення вантажу 4, якщо кількість зубців шестерень 1 і 2 становить $z_1 = 9$ і $z_2 = 12$, а радіуси шківів 2 і 3 становлять $R_2 = 18$ см; $r_3 = 27$ см; $R_3 = 32$ см.

Розв'язання

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення шестерні 1:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 6t - 8; \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 6 \text{ с}^{-2} = \text{const.}$$

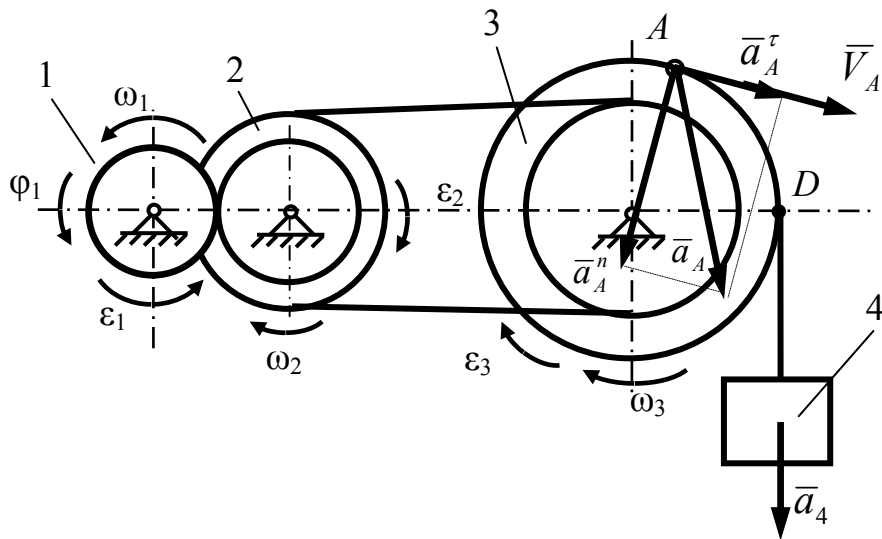


Рисунок 1.14

Якщо швидкість точок дотику зубчатих коліс 1 і 2 однакова, тобто $V_{1,2} = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$, то кутова швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{\omega_1 \cdot z_1}{z_2} = \frac{(6t - 8) \cdot 9}{12} = 4,5t - 6.$$

Кутове прискорення колеса 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}(4,5t - 6) = 4,5 \text{ c}^{-2} = \text{const.}$$

Оскільки ремінь, що з'єднує шківів 2 і 3 нерозтяжний, то швидкості точок на їх ободах однакова, тобто $\omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot r_3$, звідки визначимо кутову швидкість колеса 3:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{r_3} = \frac{(4,5t - 6) \cdot 18}{27} = 3t - 4.$$

Аналогічна залежність між кутовими прискореннями шківів 2 і 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 \cdot R_2}{r_3} = \frac{4,5 \cdot 18}{27} = 3 \text{ c}^{-2} = \text{const.}$$

У момент часу $t_1 = 2 \text{ c}$ маємо $\omega_3 = 3 \cdot 2 - 4 = 2 \text{ c}^{-1}$.

Визначимо модулі швидкості і прискорення точки A .

У момент часу $t_1 = 1 \text{ c}$ швидкість $V_A = \omega_3 \cdot R_3 = 2 \cdot 32 = 64 \text{ см/с}$.

Прискорення точки A складається з дотичного і нормального прискорень, тобто

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n,$$

де $a_A^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3$, $a_A^n = \omega_3^2 \cdot R_3$.

Тоді для моменту часу $t_1 = 1 \text{ c}$ маємо: $a_A^\tau = 3 \cdot 32 = 96 \text{ см/с}^2$ і $a_A^n = 2^2 \cdot 32 = 128 \text{ см/с}^2$.

Модуль повного прискорення точки A становить:

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{96^2 + 128^2} = 160 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення вантажу 4 співпадає з дотичним прискоренням точки D ободу барабана, що контактує з тросом, до якого підвішений вантаж, тобто

$$a_4 = a_D^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 3 \cdot 32 = 96 \text{ см/с}^2.$$

Визначені швидкість точки A , прискорення цієї точки та вантажу 4, а також напрямки кутових швидкостей і кутових прискорень покажемо на розрахунковій схемі (див. рис. 1.14).

1.1.3 Плоскопаралельний рух твердого тіла

1.1.3.1 Основні визначення. Рівняння плоско-паралельного руху

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла переміщуються в площинах, паралельних одній нерухомій площині.

Ланки більшості механізмів і машин, що застосовуються в техніці, здійснюють плоский рух. Наприклад, рух колеса на прямолінійній ділянці дороги, рух шатуна механізму кривошипного шатуна і т. п. є плоским. Плоский рух тіла повністю визначається рухом перетину (плоскої фігури), яка паралельна нерухомій площині (рис. 1.15). Тому вивчення плоского руху тіла зводиться до розгляду руху плоскої фігури в площині Oxy .

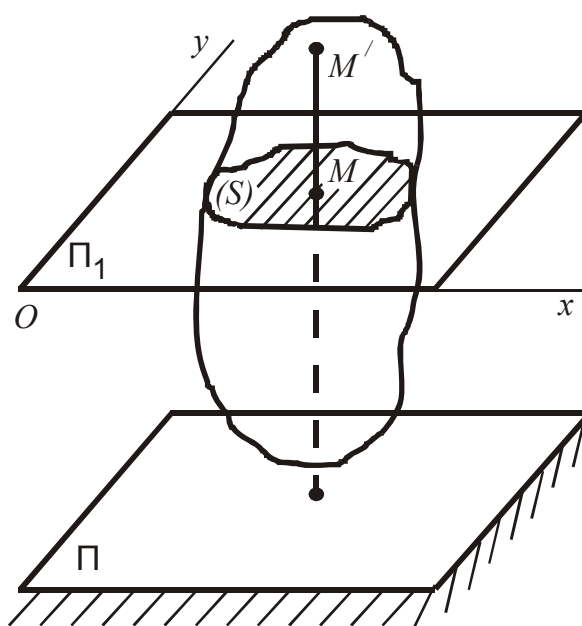


Рисунок 1.15

Із визначення плоского руху випливає, що перетин S (плоска фігура) тіла площиною Π_1 , яка паралельна нерухомій площині Π (див. рис. 1.15), рухається в площині Π_1 , а пряма лінія MM' , проведена через точку M перетину перпендикулярно площині Π , рухається поступально. Тому траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок цієї прямої однакові. Отже, плоский рух тіла повністю визначається рухом перетину S (плоскої фігури). Надалі плоский рух тіла будемо розглядати як рух плоскої фігури S у площині Oxy , суміщеної з площиною рисунка.

Положення плоскої фігури в площині Oxy в кожен момент часу визначається координатами x_A , деякої точки A , яку називають полюсом, і кутом нахилу до позитивного напрямку осі відрізка, пов'язаного з плоскою фігурою (рис. 1.16).

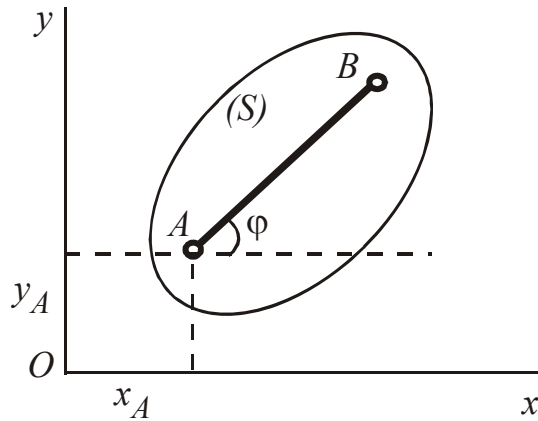


Рисунок 1.16

Рівняння руху фігури має вигляд

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t).$$

Перші два з цих рівнянь характеризують поступальний рух фігури, а третє – її обертальний навколо нерухомої осі, навколо полюса A .

Кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість і прискорення поступального руху фігури, рівні швидкості і прискорення полюса, а також кутова швидкість і кутове прискорення обертального руху фігури навколо полюса.

Кутова швидкість і кутове прискорення обертального руху плоскої фігури не залежать від вибору полюса.

1.1.3.2 Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Для визначення швидкості будь-якої точки плоскої фігури застосовують такі методи.

1) За допомогою теореми про швидкості точок плоскої фігури (рис. 1.17).

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і швидкості цієї точки в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса, тобто

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

У цьому виразі \vec{V}_A – швидкість полюса A , \vec{V}_{BA} – швидкість точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A .

При цьому швидкість \vec{V}_{BA} направлена перпендикулярно до відрізка \overline{AB} і обчислюється за формулою $V_{BA} = \omega \cdot AB$.

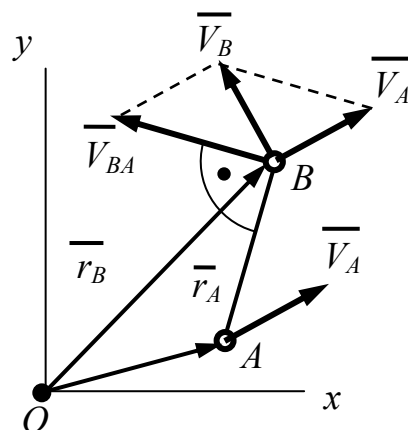


Рисунок 1.17

Модуль і напрям швидкості \vec{V}_B визначаються побудовою відповідного паралелограма швидкостей (див. рис. 1.17).

2) За допомогою теореми про проєкції швидкостей (рис. 1.18).

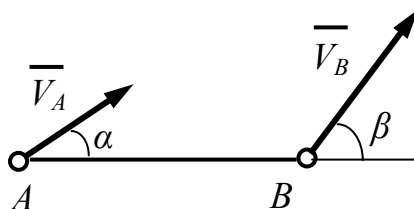


Рисунок 1.18

Проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, яка проходить через ці точки, рівні між собою, тобто

$$V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta,$$

де α і β – кути нахилу векторів \vec{V}_A і \vec{V}_B до лінії AB відповідно.

Ця теорема дозволяє легко знаходити швидкість даної точки тіла, якщо відомі напрямки швидкості цієї точки та швидкість будь-якої іншої точки цього тіла.

3) За допомогою миттєвого центра швидкостей.

Плоский рух у певний момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвого центра обертання або миттєвого центра швидкостей.

Миттєвим центром швидкостей (м.ц.ш.) називають пов'язану з площею фігурою точку, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю.

Миттєвий центр швидкостей (точка P) знаходиться (рис. 1.19) на лінії, проведеній через деяку точку A плоскої фігури перпендикулярно

вектору швидкості цієї точки так, що кут 90° відкладений у напрямку кутової швидкості ω плоскої фігури. При цьому відстань від точки плоскої фігури до миттєвого центра швидкостей дорівнює частці від ділення модуля швидкості цієї точки на кутову швидкість, тобто

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

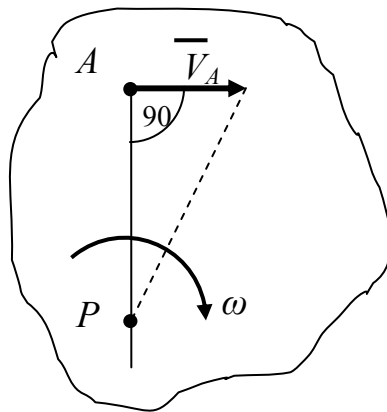


Рисунок 1.19

Виходячи з цього, можна висновити: кутова швидкість плоскої фігури в певний момент часу дорівнює відношенню швидкості однієї з її точок до довжини відрізка, який з'єднує точку з м.ц.ш., а швидкості точок тіла пропорційні відстаням від цих точок до м.ц.ш.

Таким чином, знаючи величину швидкості однієї з точок плоскої фігури і положення її миттєвого центра швидкостей, за залежністю

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \dots = \frac{V_K}{KP}$$

можна визначити (рис. 1.20) швидкість будь-якої точки і кутову швидкість плоскої фігури.

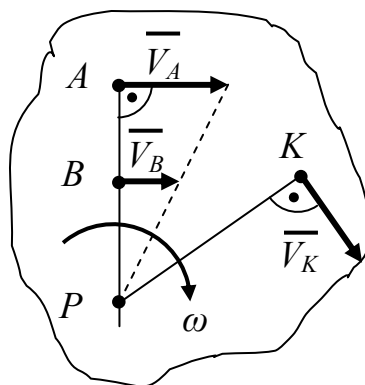


Рисунок 1.20

Існує кілька типових прийомів знаходження положення миттєвого центра швидкостей:

1) Якщо відомі швидкість однієї з точок плоскої фігури і її кутова швидкість, то м.ц.ш. знаходиться на перпендикулярі до вектора швидкості точки, який відкладений у напрямку обертання плоскої фігури на відстані

$$AP = \frac{V_A}{\omega} \text{ (див. рис. 1.19).}$$

2) Якщо відомі напрямки непаралельних між собою векторів швидкостей двох точок (рис. 1.21), то м.ц.ш. знаходиться на перетині перпендикулярів до цих векторів швидкостей.

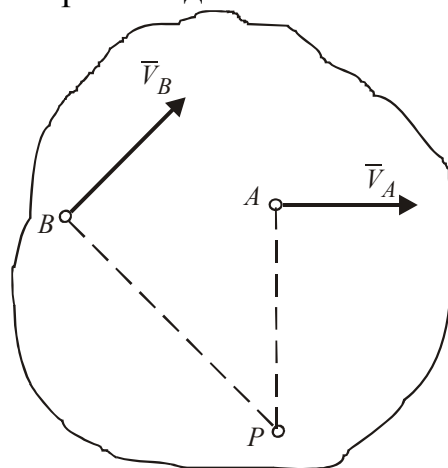


Рисунок 1.21

3) Якщо швидкості двох точок плоскої фігури паралельні між собою і перпендикулярні до відрізка, який з'єднує ці точки, а модулі цих швидкостей відомі і різні, то м.ц.ш. лежить на перетині спільного перпендикуляра до векторів швидкостей цих точок і лінії, проведеної через кінці цих векторів (рис. 1.22).

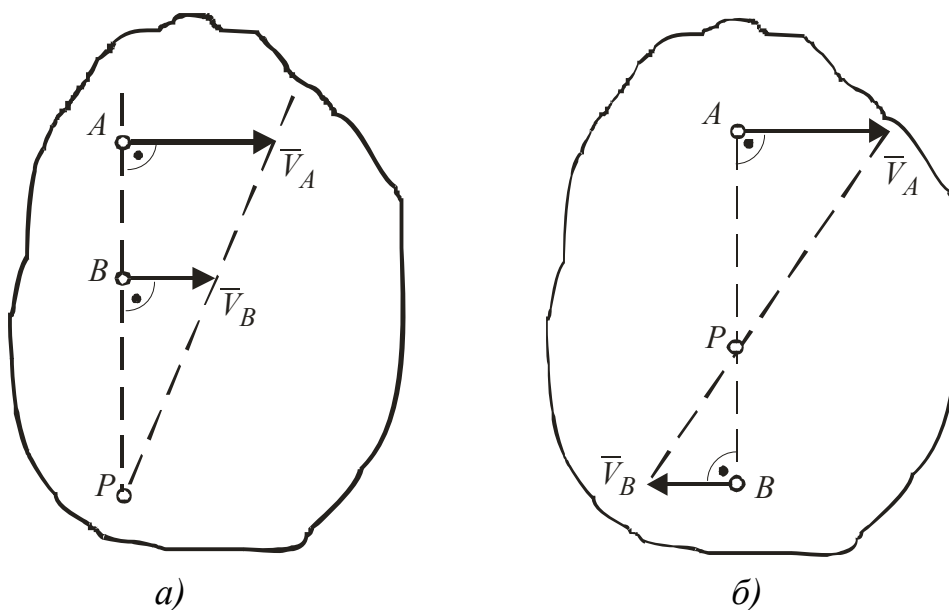


Рисунок 1.22

4) Якщо вектори швидкостей двох точок паралельні між собою, а лінія розміщення цих точок не перпендикулярна до їх швидкостей (рис. 1.23), то м.ц.ш. знаходиться в нескінченності ($AP = \infty$; $BP = \infty$), а кутова швидкість плоскої фігури $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = 0$. У цьому випадку тіло здійснює миттєво поступальний рух, при якому швидкості всіх точок у певний момент часу рівні за величиною і однакою спрямовані.

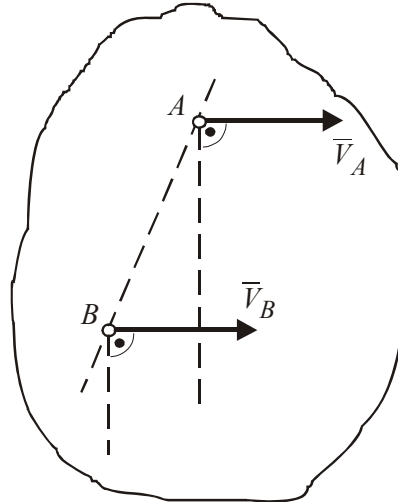


Рисунок 1.23

5) Якщо плоский рух здійснюється шляхом кочення без ковзання одного тіла по нерухомій поверхні іншого (рис. 1.24), то м.ц.ш. знаходиться в точці контакту тіла з нерухомою поверхнею, тому що при відсутності ковзання швидкість цієї точки рухомого тіла дорівнює нулю.

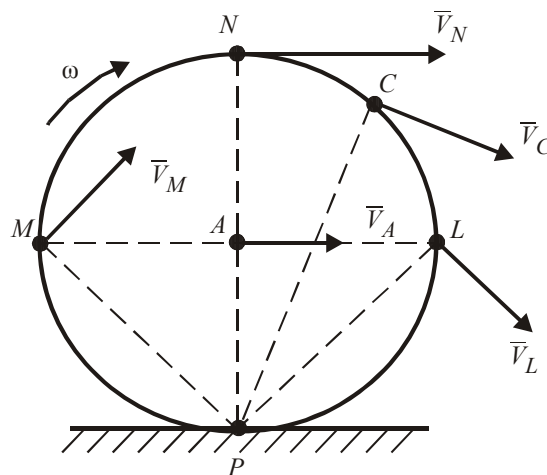


Рисунок 1.24

1.1.3.3 Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення кожної точки плоскої фігури (рис. 1.25) дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки в обертальному русі плоскої фігури навколо полюса:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \quad (1.14)$$

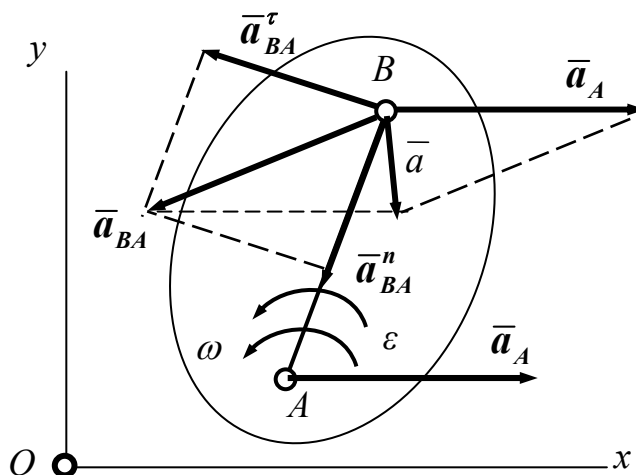


Рисунок 1.25

Тут \bar{a}_A – прискорення полюса A, і \bar{a}_{BA} – прискорення, яке має точка B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A.

При цьому прискорення довільної точки B в обертальному русі має дотичну і нормальну складові:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Модулі цих складових визначаються за формулами

$$a_{BA}^\tau = \epsilon \cdot AB, \quad a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB \quad (1.15)$$

і направлені вони у відношенні до відрізка AB таким чином: $\bar{a}_{BA}^\tau \perp \overline{AB}$ (за напрямом кутового прискорення ϵ_{AB}), \bar{a}_{BA}^n – від B до A.

У загальному випадку полюс A може рухатися криволінійно, і його прискорення складатиметься з дотичної і нормальної складових, тобто $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$. Тому розгорнута формула для визначення прискорення довільної точки плоскої фігури матиме чотири складові:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (1.16)$$

На рисунку 1.25 показано геометричне визначення вектора \bar{a}_B побудовою відповідного паралелограма. На практиці геометричне складання векторів при визначенні прискорення точки плоскої фігури зручніше здійснювати шляхом проектування векторного виразу (1.16) на вибрані осі координат.

1.1.3.4 Приклади визначення кінематичних характеристик плоского руху тіла і його точок

Завдання, для вирішення яких використовують формули кінематики плоского руху тіла, стосуються переважно визначення швидкостей і прискорень точок різних механізмів і визначення кутових швидкостей і прискорень ланок цих механізмів за заданим рухом провідної ланки механізму.

Механізм, рух якого розглядається, потрібно зображати на рисунку в тому положенні, для якого потрібно визначити відповідні характеристики.

При визначенні кутових швидкостей і швидкостей точок потрібно знати модуль і напрямок швидкості будь-якої однієї з точок і напрямок швидкості іншої точки цього тіла, що дозволяє визначити місце розташування миттєвого центра швидкостей (крім випадку 5, розглянутого в підпункті 1.1.3.2). При цьому потрібно розуміти, що кожна ланка механізму, який здійснює плоскопаралельний рух, має в певий момент часу свій миттєвий центр швидкостей і свою кутову швидкість.

Для визначення кутового прискорення плоскої фігури і прискорень її точок застосовують векторне рівняння (1.14), враховуючи, що при криволінійному русі точок їх прискорення мають дотичні і нормальні складові. Поставлена мета є досяжною, якщо відомі вектори швидкості і прискорення однієї з точок цієї фігури, а також траєкторія іншої точки фігури або положення миттєвого центра швидкостей.

Це дозволяє знайти модулі та напрямки більшості з прискорень виразу (1.16), залишивши невідомими тільки дві величини (модулі, напрямки). Потім, проектуючи векторне рівняння (1.16) на вибрані осі координат, отримують два алгебраїчних рівняння, з яких обчислюють невідомі величини.

Кутове прискорення плоскої фігури найчастіше знаходять після обчислення дотичного прискорення однієї з точок в обертальному русі фігури навколо полюса, застосовуючи залежність (1.15).

Але в разі кочення без ковзання колеса нерухомою поверхнею (див. рис. 1.24), коли відстань AP від центра колеса до м.ц.ш. залишається незмінною, кутове прискорення знаходять шляхом диференціювання за

часом вираження кутової швидкості $\omega = \frac{V_A}{AP}$: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_A}{AP} \right) = \frac{1}{AP} \frac{dV_A}{dt}$,

або $\varepsilon = \frac{a_A^\tau}{AP}$.

Приклад 1. Повзуни A і B механізму еліпсографа з'єднані між собою лінійкою, довжина якої $AB = 2$ м, і рухаються уздовж взаємно перпендикулярних напрямних (рис. 1.26). Знайти в момент, коли $\alpha = 30^\circ$, швидкість повзуна B і середньої точки C лінійки AB , прискорення повзуна B , якщо відомо, що в цей момент повзун A рухається зі швидкістю $V_A = 2$ м/с і прискоренням $a_A = 1$ м/с².

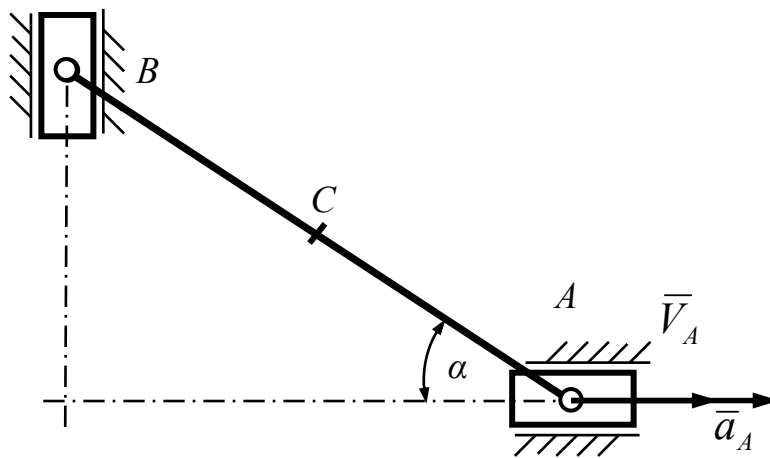


Рисунок 1.26

Розв'язання

Лінійка AB здійснює плоскопаралельний рух. Оскільки точка B рухається прямолінійно за вертикаллю, то її швидкість \vec{V}_B направлена вздовж осі Oy вниз (рис. 1.27). Знаючи напрямки швидкостей двох точок A і B лінійки AB і величину швидкості точки A , застосуємо для визначення модуля швидкості точки B теорему про проєкції швидкостей точок тіла на пряму, що проведена через ці точки:

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ.$$

Звідси визначимо:

$$V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{2 \cdot 0,866}{0,5} = 3,46 \text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки C знайдемо положення миттєвого центра швидкостей лінійки AB (точку P) на перетині перпендикулярів до векторів швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B .

Швидкості точок лінійки AB та її кутова швидкість зв'язані залежністю $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}$.

Як виходить з рисунка 1.27, трикутник ABP прямокутний, і його катет $AP = AB \sin 30^\circ = 2 \times 0,5 = 1$ м.

Тоді кутова швидкість лінійки AB дорівнюватиме $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{2}{1} = 2 \text{ с}^{-1}$.

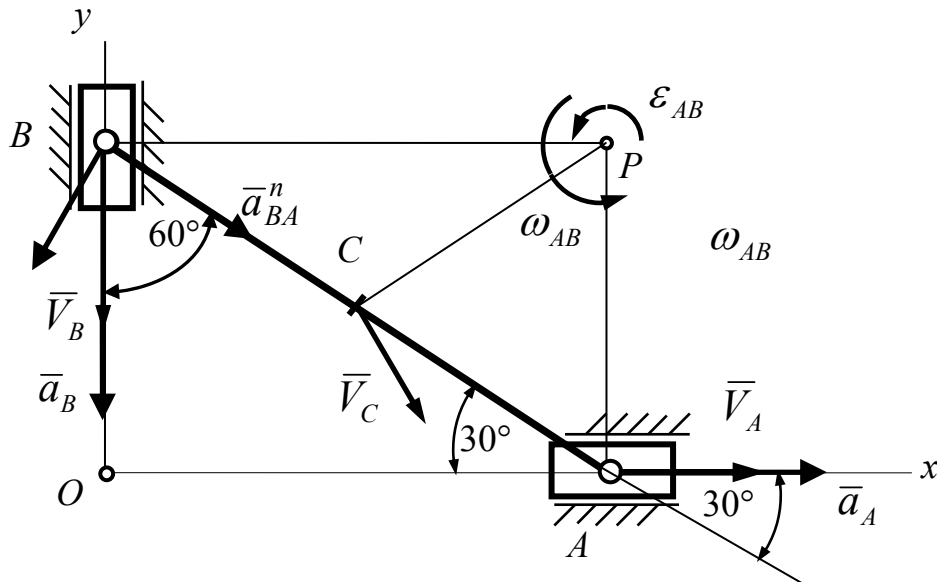


Рисунок 1.27

Оскільки точка A рухається вправо, лінійка обертається проти ходу годинникової стрілки.

Швидкість точки C буде направлена перпендикулярно лінії CP , довжина якої визначається з рівностороннього трикутника ACP : $CP = AC = 1$ м. Величина швидкості цієї точки

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}.$$

Для визначення прискорення точки B виберемо за полюс точку A і скористуємось рівнянням

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1.17)$$

Тут прискорення \vec{a}_A відоме за модулем і напрямком. Прискорення \vec{a}_B точки B направлене вертикально, оскільки траєкторія точки B – вертикальна пряма. Вектор \vec{a}_{BA}^t направляємо до лінії AB в той чи інший

бік. Його обчислення за формулою $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ неможливе, оскільки значення ε_{AB} невідоме.

Вектор \bar{a}_{BA}^n направляємо вздовж AB від точки B до точки A і знаходимо його числове значення:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 2 = 8 \text{ м/с}^2.$$

У векторному рівнянні (1.17) невідомі модулі двох векторів \bar{a}_B і \bar{a}_{BA}^{τ} . Для їх знаходження спроектуємо це рівняння на дві осі Ox і Oy , які направлені вздовж напрямних для повзунів.

У результаті проектування одержимо:

$$\begin{aligned} 0 &= a_A - a_{BA}^{\tau} \sin 30^\circ + a_{BA}^n \cos 30^\circ; \\ -a_B &= -a_{BA}^{\tau} \cos 30^\circ - a_{BA}^n \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

З цих алгебраїчних рівнянь знаходимо:

$$a_{BA}^{\tau} = \frac{a_A + a_{BA}^n \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1 + 8 \cdot 0,866}{0,5} = 15,856 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = a_{BA}^{\tau} \cos 30^\circ + a_{BA}^n \sin 30^\circ = 15,856 \cdot 0,866 + 8 \cdot 0,5 = 17,731 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення лінійки AB :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{15,856}{2} = 7,928 \text{ с}^{-2}.$$

1.1.4 Складний рух точки

1.1.4.1 Відносний, переносний та абсолютний рухи точки. Абсолютна та відносна похідні від вектора

У кінематиці точки розглядався рух точки відносно нерухомої системи координат. Та в деяких випадках доцільно вивчати рух точки відносно двох систем відліку, одна з яких певним чином рухається відносно іншої, умовно нерухомої системи координат.

Наприклад, автомобіль, який рухається поверхнею Землі, разом з землею кулею обертається навколо її осі, а також переміщується в космічному просторі, беручи участь у декількох рухах.

Рух, при якому точка бере участь у двох і більше рухах, називається складним рухом.

Встановимо зв'язок між абсолютною і відносною похідними від вектора $\bar{b} = \bar{b}(t)$, який змінюється в рухомій $Oxyz$ та нерухомій $O_1x_1y_1z_1$ системах відліку (рис. 1.29).

У рухомій системі координат цей вектор визначається залежністю

$$\bar{b} = \bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z,$$

де b_x, b_y, b_z – проєкції вектора \bar{b} на відповідні осі рухомої системи.

Диференціюючи це векторне рівняння з врахуванням змінності ортів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ внаслідок руху рухомої системи відліку, одержимо:

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \cdot \bar{k} + b_x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + b_y \frac{d\bar{j}}{dt} + b_z \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (1.18)$$

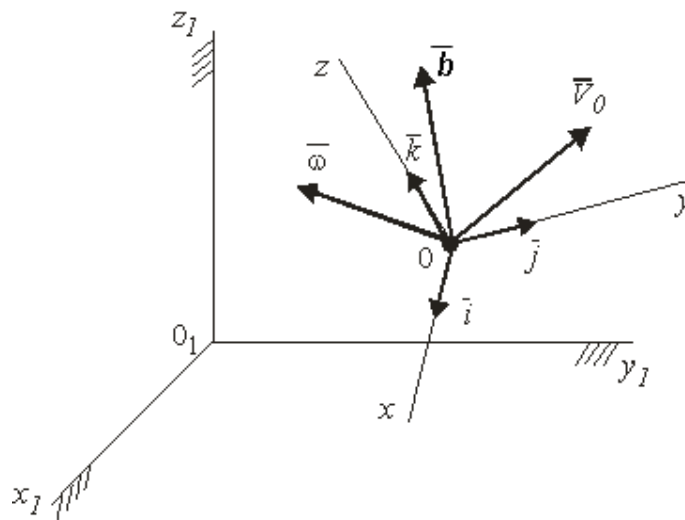


Рисунок 1.29

Перші три складових цього рівняння характеризують зміну вектора \bar{b} у рухомій системі координат (при незмінних ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) і являють собою відносну похідну:

$$\frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} = \frac{db_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{db_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{db_z}{dt} \cdot \bar{k}. \quad (1.19)$$

Замінюючи в раніше одержаній формулі (1.12) швидкості точки при обертальному русі тіла

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

радіус-вектор \bar{r} послідовно на орти $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, встановимо, що

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}.$$

Отже, сума трьох останніх складових рівняння (1.18) запишеться так:

$$b_x \frac{d\bar{i}}{dt} + b_y \frac{d\bar{j}}{dt} + b_z \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z) = \bar{\omega} \times \bar{b}. \quad (1.20)$$

Підставляючи (1.19) і (1.20) в (1.18), одержимо:

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{b}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{b}. \quad (1.21)$$

Отже, абсолютна похідна вектора дорівнює сумі відносної похідної цього вектора та векторного добутку кутової швидкості рухомої системи координат на цей вектор.

1.1.4.2 Теорема про додавання швидкостей при складному русі точки

Розглянемо складний рух точки M , яка у відносному русі переміщується відносно рухомої системи координат $Oxyz$ та здійснює абсолютне переміщення відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 1.30).

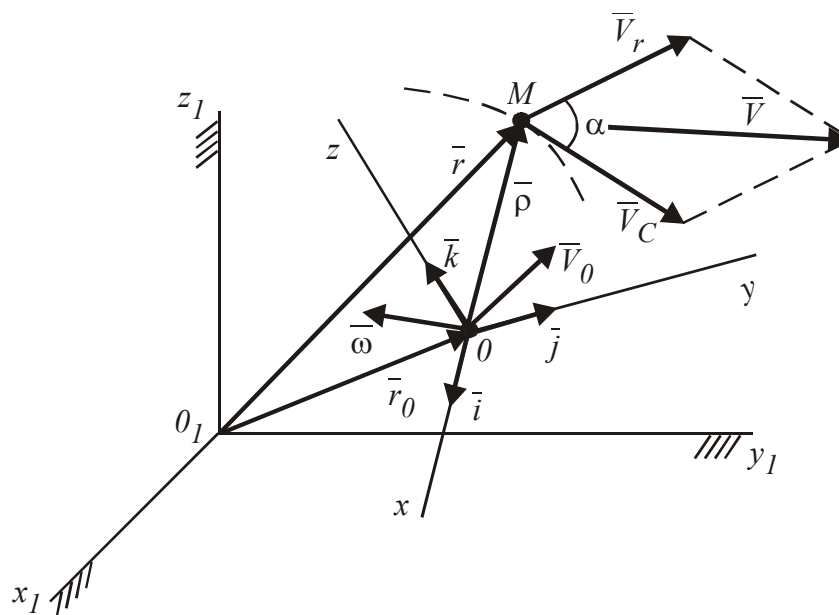


Рисунок 1.30

Положення точки M у відношенні до нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ у кожний момент часу визначається

$$\bar{r} = \bar{r}_O + \bar{\rho}, \quad (1.22)$$

де \bar{r}_O – радіус-вектор точки O , у якій розміщено початок рухомої системи координат $Oxyz$,

$\bar{\rho}$ – радіус-вектор точки M у відношенні до рухомої системи координат $Oxyz$.

Вважаючи, що координати точки M у рухомій системі координат будуть x, y, z , визначимо:

$$\bar{\rho} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z.$$

Диференціюючи залежність (1.22) за часом, знайдемо абсолютну швидкість точки:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_O}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}. \quad (1.23)$$

Абсолютна похідна від вектора $\bar{\rho}$, який змінюється в рухомій системі координат, визначається формулою (1.21)

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\rho},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість обертання рухомої системи координат,

$$\frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z} = \bar{V}_r - \text{відносна швидкість точки.}$$

Підставляючи ці значення в (1.23), одержимо:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{V}_r,$$

де $\bar{V}_0 = \frac{d\bar{r}_O}{dt}$ – швидкість початку рухомої системи координат відносно нерухомої системи координат.

Враховуючи, що переносна швидкість, це швидкість точки m рухомої системи, через яку в певний момент проходить рухома точка M , тобто

$$\bar{V}_e = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad (1.24)$$

будемо мати

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (1.25)$$

Абсолютна швидкість точки при її складному русі дорівнює геометричній сумі переносної та відносної швидкостей.

Направлені вектори \bar{V}_e і \bar{V}_r за дотичними до відповідних траєкторій. Модуль абсолютної швидкості точки визначається за формулою

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|\bar{V}_e| \cdot |\bar{V}_r| \cos \alpha},$$

де $\cos \alpha = \cos(\bar{V}_e, \bar{V}_r)$ тобто α – кут між векторами \bar{V}_e, \bar{V}_r .

1.1.4.3 Теорема Коріоліса про додавання прискорень при складному русі точки

Абсолютне прискорення точки визначимо, диференціюючи за часом формулу (1.25)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d\bar{V}_e}{dt} + \frac{d\bar{V}_r}{dt}. \quad (1.26)$$

Абсолютну похідну вектора відносної швидкості знайдемо за формулою (1.21)

$$\frac{d\bar{V}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{V}_r.$$

У цьому співвідношенні відносна похідна вектора \bar{V}_r за часом є прискоренням точки M у відношенні до рухомої системи координат, тобто відносним прискоренням:

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z}.$$

Тоді

$$\frac{d\bar{V}_r}{dt} = \bar{a}_r + \bar{\omega} \times \bar{V}_r. \quad (1.27)$$

Абсолютна похідна від вектора переносної швидкості згідно з формулою (1.24)

$$\frac{d\bar{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \frac{d\bar{V}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{\rho}}{dt},$$

або враховуючи, що $\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \bar{a}_0$ – прискорення початку рухомої системи

координат, $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$ – кутове прискорення рухомої системи координат,
 $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{\rho}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} = \bar{V}_r + \bar{\omega} \times \bar{\rho}$, одержимо:

$$\frac{d\bar{V}_e}{dt} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{\omega} \times \bar{V}_r.$$

Оскільки переносне прискорення – це прискорення точки m тіла (рухомої системи), яка співпадає з рухомою точкою, то $\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{\rho}$,

тоді

$$\frac{d\bar{V}_e}{dt} = \bar{a}_e + \bar{\omega} \times \bar{V}_r. \quad (1.28)$$

Підставивши (1.27) і (1.28) у (1.26), одержимо:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r) .$$

Прискорення, яке визначається доданком $2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$ називають коріолісовим прискоренням і позначають

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r). \quad (1.29)$$

Отже, маємо

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (1.30)$$

Ця формула виражає теорему Коріоліса; згідно з якою *абсолютне прискорення точки при її складному русі дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і коріолісового.*

Кожна із складових абсолютного прискорення є кінематичною характеристикою зміни з часом вектора абсолютної швидкості точки. Так, переносне прискорення \bar{a}_e – це характеристика зміни модуля і напрямку вектора \bar{V}_e переносної швидкості в переносному русі, відносно прискорення \bar{a}_r характеризує зміну вектора відносної швидкості \bar{V}_r у відносному русі, а коріолісове прискорення \bar{a}_k з'являється як характеристика зміни вектора переносної швидкості у відносному русі і вектора відносної швидкості у переносному русі.

1.1.4.4 Визначення модуля і напрямку прискорення Кориоліса. Правило Жуковського

Як виходить з формули (1.29), прискорення Кориоліса дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості та лінійної відносної швидкості точки.

Модуль вектора кориолісового прискорення визначимо за правилами знаходження модуля векторного добутку:

$$\bar{a}_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin \alpha, \quad (1.31)$$

де $\sin \alpha = \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r)$, тобто α – кут між векторами переносної кутової швидкості $\overline{\omega}_e$ і відносної швидкості \overline{V}_r точки.

Із формули (1.31) виходить, що кориолісове прискорення дорівнюватиме нулю в таких випадках:

- коли $\omega_e = 0$, тобто, коли переносний рух є поступальним або, якщо переносна кутова швидкість у певний момент часу перетворюється на нуль;
- коли $V_r = 0$, тобто рух точки не є складним, або якщо відносна швидкість точки у певний момент часу є нульовою;
- коли $\alpha = 0$ або $\alpha = 180^\circ$, тобто коли вектор відносної швидкості точки є паралельним осі обертання рухомої системи відліку (тіла).

Напрямок кориолісового прискорення визначається напрямком векторного добутку векторів $\overline{\omega}_e$ і \overline{V}_r , тобто кориолісове прискорення буде направлене перпендикулярно площині векторів $\overline{\omega}_e$ і \overline{V}_r у напрямку, звідки поворот на менший кут від $\overline{\omega}_e$ до \overline{V}_r видно таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 1.31).

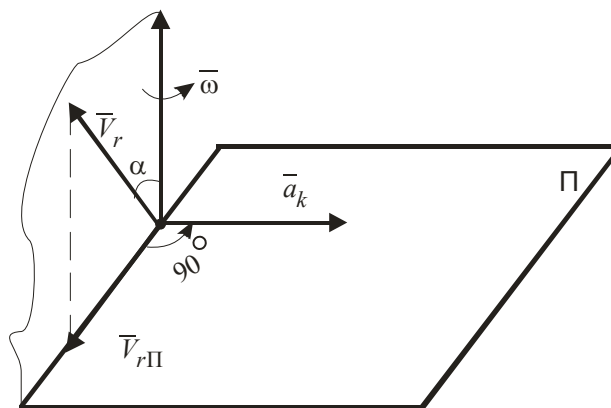


Рисунок 1.31

За правилом Жуковського для знаходження напрямку коріолісового прискорення необхідно спроектувати вектор відносної швидкості \bar{V}_r на площину Π , перпендикулярну до осі переносного обертання, а потім повернути цю проєкцію $\bar{V}_{r\Pi}$ на кут 90° у напрямку переносного обертання (див. рис. 1.31).

1.1.4.5 Приклади розв'язання задач складного руху точки

При розв'язанні задач кінематики складного руху точки важливим є правильний розподіл абсолютного руху точки на відносну та переносну складові. Для встановлення виду відносного руху точки треба подумки зупинити переносний рух (рух тіла, яким рухається точка), а для встановлення характеру переносного руху подумки зупиняють відносний рух точки.

Кінематичні характеристики переносного руху слід визначити за правилами знаходження відповідних характеристик точок твердого тіла.

При знаходженні відносної швидкості та відносного прискорення точки рухому систему координат слід вважати нерухомою і застосовувати формули кінематики точки.

При використанні формули (1.30) для визначення абсолютного прискорення точки слід пам'ятати, що у випадку поступального переносного руху ця формула спрощується до виду

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r, \quad (1.32)$$

оскільки коріолісове прискорення при цьому дорівнює нулю.

Приклад 1. Пластина D (рис. 1.32) обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi_e = 0,9t^2 - 8t^3$, рад. По пластині вздовж прямолінійного жолоба рухається точка M відповідно закону $s_r = OM = 16 - 8\cos(3\pi t)$, см.

Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M у момент часу $t = \frac{2}{9}$ с.

Розв'язання

Будемо вважати, що в розрахунковий момент часу площина креслення співпадає з площиною пластини D . Положення точки M на пластині D при $t = \frac{2}{9}$ с визначається відстанню

$$s_r = 16 - 8 \cos\left(3\pi \frac{2}{9}\right) = 16 + 4 = 20 \text{ см.}$$

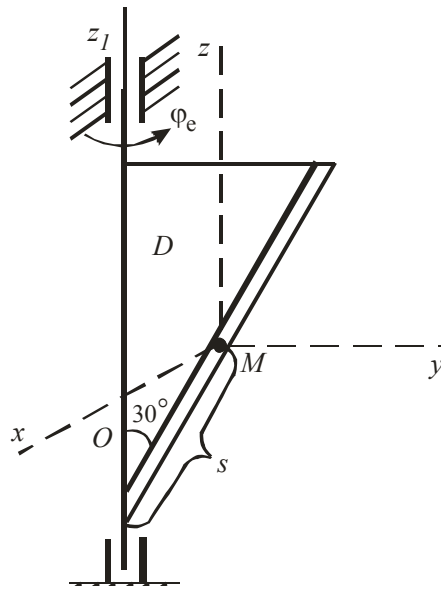


Рисунок 1.32

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму переносної та відносної швидкостей: $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

Відносна швидкість:

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 24\pi \sin 3\pi t; \text{ при } t = \frac{2}{9} \text{ с маємо: } V_r = 24\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 65,3 \text{ см/с.}$$

Додатний знак величини V_r показує, що вектор \vec{V}_r (рис. 1.33, а) направлений у бік зростання s_r .

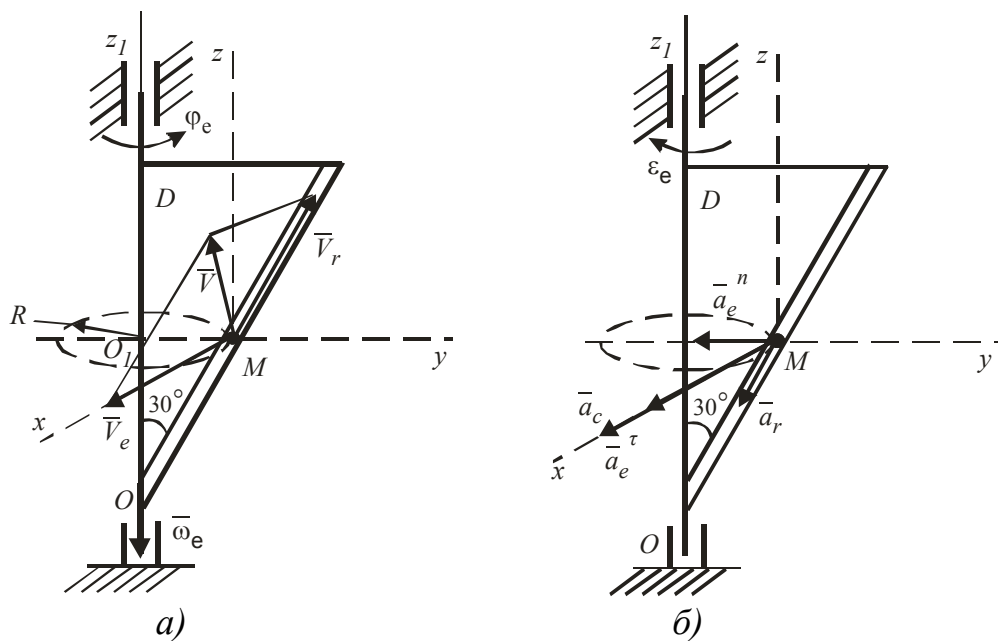


Рисунок 1.33

Переносна швидкість

$$V_e = R\omega_e,$$

де $R = s_r \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10$ см – радіус кола, яке описує та точка тіла, з якою цієї миті співпадає точка M , а $\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1,8t - 27t^2$ – кутова швидкість тіла.

$$\text{При } t = \frac{2}{9} \text{ с маємо } \omega_e = 1,8 \frac{2}{9} - 27 \frac{4}{81} = -0,93 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Остаточно } V_e = 10 \cdot 0,93 = 9,3 \text{ м/с}.$$

Від'ємний знак у величині ω_e означає, що обертання трикутника навколо осі Oz відбувається протилежно напрямку відліку кута φ_e , тому вектор $\bar{\omega}_e$ направлений вздовж осі Oz вниз (див. рис. 1.33, а). Вектор \bar{V}_e направлений за дотичною до кола радіуса R у бік обертання тіла.

Оскільки \bar{V}_e і \bar{V}_r взаємно перпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M : $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{9,3^2 + 65,2^2} = 65,9$ см/с.

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорення:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$\bar{a} = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_k.$$

Модуль відносного дотичного прискорення:

$$a_r^\tau = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 72\pi \cos 3\pi t.$$

$$\text{При } t = \frac{2}{9} \text{ с; } a_r^\tau = -72\pi^2 \cos \frac{2}{3}\pi = -355 \text{ см/с}^2.$$

Від'ємний знак a_r^τ свідчить, що вектор \bar{a}_r^τ направлений в сторону від'ємних значень s_r (див. рис. 1.33, б).

Відносне нормальне прискорення $a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = 0$, оскільки відносний рух точки прямолінійний.

Переносне дотичне прискорення $a_e^\tau = R \cdot \varepsilon_e$, де ε_e – кутове прискорення тіла D :

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 1,8 - 54t.$$

При $t = \frac{2}{9}$ с $\varepsilon_e = 1,8 - 54 \cdot \frac{2}{9} = -10,2$ с⁻².

Однакові знаки ε_e і ω_e вказують на те, що обертання тіла D прискорене.

Тоді

$$a_e^\tau = 10 \cdot 10,2 = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_e^τ направлений у той бік, що і вектор \bar{V}_e .

Переносне нормальне прискорення:

$$a_e^n = R\omega_e^2 = 10 \cdot 0,93^2 = 8,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \bar{a}_e^n направлений до осі обертання тіла D , тобто до центра O_1 кола радіуса R .

Прискорення Коріоліса

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r).$$

Модуль прискорення Коріоліса

$$a_k = 2|\omega_e||V_r|\sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r).$$

Оскільки $\sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r) = \sin 150^\circ = 0,5$,

то $a_k = 2 \times 0,95 \times 65,2 \times 0,5 = 61 \text{ см/с}^2$.

Відповідно до правила векторного добутку вектор \bar{a}_k направлений перпендикулярно до площини трикутника D у тому напрямку, що і вектори \bar{V}_e і \bar{a}_e^τ .

Модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо способом проєкцій векторного рівняння:

$$a_x = a_e^\tau + a_k = 102 + 61 = 163 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -a_e^n - a_r^n \cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0,5 = -186 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = -a_r^t \cos 30^\circ = -355 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -308 \text{ см/с}^2.$$

Остаточно

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{163^2 + 186^2 + 308^2} = 395 \text{ см/с}^2.$$

1.2 Статика

1.2.1 Основні поняття і аксіоми. Система збіжних сил

1.2.1.1 Основні поняття статyki

Статика – це розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються умови рівноваги матеріальних об'єктів (тіл) під дією прикладених сил і методи еквівалентного перетворення систем сил, зроблення їх простішими на вигляд.

Під **рівновагою** розуміють стан спокою або рівномірний, прямолінійний і поступальний рух у відношенні до нерухомої системи координат.

Усе розмаїття матеріальних об'єктів моделюється в теоретичній механіці матеріальною точкою, системою матеріальних точок і абсолютно твердим тілом.

Матеріальною точкою називають просту модель матеріального об'єкта, розміри якого настільки малі, що ними можна нехтувати при вивченні того чи іншого руху, тобто це геометрична точка, яка має масу.

Система матеріальних точок – це сукупність матеріальних точок, рух і положення кожної з яких залежить від руху і положення всіх інших точок.

Абсолютно твердим тілом (надалі – твердим тілом) називають систему матеріальних точок, відстані між якими залишаються весь час незмінними.

Будемо називати **вільним** таке тверде тіло, на переміщення якого не накладені ніякі обмеження.

Сила – це векторна величина, яка є мірою механічної взаємодії між матеріальними об'єктами. Вона характеризується модулем, напрямком і точкою докладання. Точка прикладання сили і її напрямок визначають лінію дії сили.

Сили зображують направленими відрізками прямих.

На рисунку 1.34 показана сила, прикладена в точці A , а MN – лінія дії сили. Одиницею вимірювання сили в системі СІ є 1 Н.

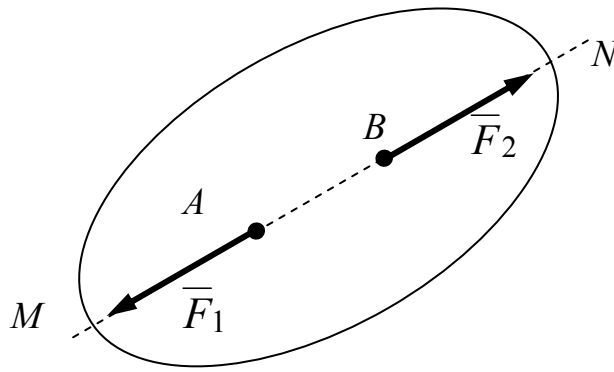


Рисунок 1.34

Системою сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ називають сукупність декількох сил, що діють на одне тіло або на систему тіл.

Залежно від місця розміщення ліній дій сил в одній площині або в просторі розрізняють **плоску** та **просторову** системи сил, які, у свою чергу, можуть розглядатись, як **система збіжних сил**, **система паралельних сил** або **система довільно розташованих сил** (**довільна система сил**).

Еквівалентними називають такі дві системи сил, які, діючи окремо на вільне тверде тіло, однаково змінюють його кінематичні характеристики (швидкість, напрямок руху і т. ін.).

Умова еквівалентності двох систем сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ і $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ виражається у формі

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n).$$

Зрівноваженою називають таку систему сил, яка не змінює кінематичного стану твердого тіла. Така система сил еквівалентна нулю:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0.$$

Рівнодійною силою \bar{R}^* цієї системи сил називають таку силу, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил, тобто

$$\bar{R}^* \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n).$$

Якщо система сил має рівнодійчу, то сила \bar{Q} , яка дорівнює рівнодійчій за модулем і направлена вздовж тієї самої лінії дії в протилежному напрямку, називається **врівноважуючою**. Додавання врівноважуючої сили \bar{Q} до системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ робить одержану нову систему сил зрівноваженою:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{Q}) \sim 0.$$

Надалі переконаємося, що не всяка система сил має рівнодіючу і врівноважуючу сили. Є системи сил, які не знаходяться в рівновазі і не еквівалентні одній силі.

1.2.1.2 Аксиоми статyki

Статика базується на кількох вихідних положеннях (аксіомах), які беруться без математичних доказів.

Аксиома 1 (про рівновагу системи двох сил).

Для рівноваги системи двох сил необхідно і достатньо, щоб ці сили були рівні за модулем і діяли вздовж однієї прямо в протилежних напрямках (див. рис. 1.34), тобто

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0.$$

Аксиома 2 (про приєднання і відкидання врівноваженою системи сил).

Дія цієї системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї приєднати або від неї відкинути врівноважену систему сил.

Слідство з аксіом 1 і 2

Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.

З цього слідства можна висновити, що сила є ковзним вектором.

Аксиома 3 (про паралелограм сил).

Система двох сил, прикладених до тіла в одній точці, має рівнодіючу (рис. 1.35), яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці, тобто

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

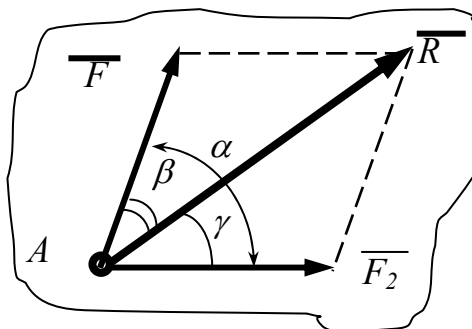


Рисунок 1.35

Модуль рівнодійної знаходять як величину діагоналі паралелограма, побудованого на силах, як на сторонах:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha},$$

де α – кут, утворений напрямками сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

Напрямок рівнодійної \vec{R} можна визначити кутами β і γ , які вона утворює з складовими силами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 :

$$\sin \beta = \frac{F_2}{R} \sin \alpha; \quad \sin \gamma = \frac{F_1}{R} \sin \alpha; \quad (\alpha = \beta + \gamma). \quad (1.33)$$

Очевидно, що будь-яку силу \vec{R} , взявши її як рівнодійну, можна розкласти за правилом паралелограма на дві складові сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , які утворюють кути β і γ з напрямком цієї сили (див. рис. 1.35). Величини складових слід визначати за формулами, які витікають із формул (1.19).

Аксиома 4 (про рівність сил дії і протидії).

Сили взаємодії двох тіл дорівнюють за величиною і напрямлені вздовж однієї прямої в протилежних напрямках (рис. 1.36).

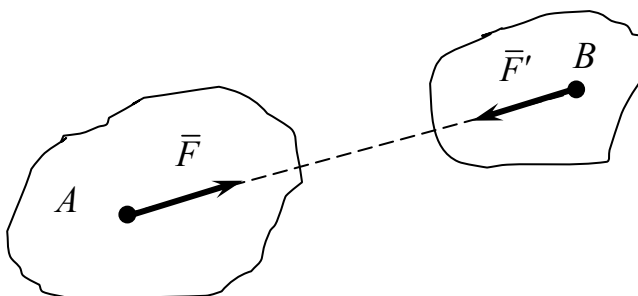


Рисунок 1.36

Аксиома 5 (принцип затвердіння).

Рівновага тіла, яке деформується, не порушиться, якщо його вважати абсолютно твердим.

Аксиома 6 (принцип звільнення від в'язей).

Невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити реакціями в'язей.

При цьому: в'язю називають усі ті матеріальні об'єкти, які обмежують рух даного твердого тіла в просторі.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, заважаючи переміщенню цього тіла, називається реакцією в'язі.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (такі, що сприяють руху тіла, як, наприклад, сила ваги), будемо називати активними силами.

1.2.1.3 В'язі та їх реакції

При розв'язанні задач на рівновагу невільних тіл необхідно враховувати дію в'язей, приклавши необхідні реакції в'язей, правильно вибравши їх напрямки. При цьому треба виходити з того, що кількість реакцій кожного типу в'язі дорівнює кількості обмежених переміщень тіла, і що напрямки реакцій в'язі завжди протилежні тому напрямку, в якому в'язь не дозволяє переміщуватися тілу.

Розглянемо основні типи в'язей і покажемо напрямки реакцій цих в'язей.

1. **Гладка поверхня** (рис. 1.37), реакція \bar{N} якої направлена перпендикулярно до спільної дотичної в точці контакту поверхонь, що стикаються (рис. 1.37, а). Якщо тіло спирається своїм вістрям на гладеньку поверхню опори (в точках A і B на рис. 1.37, б), або контактує своєю поверхнею з вістрям в'язі (в точці C на рис. 1.37, б), то реакції направлені перпендикулярно до відповідних поверхонь.

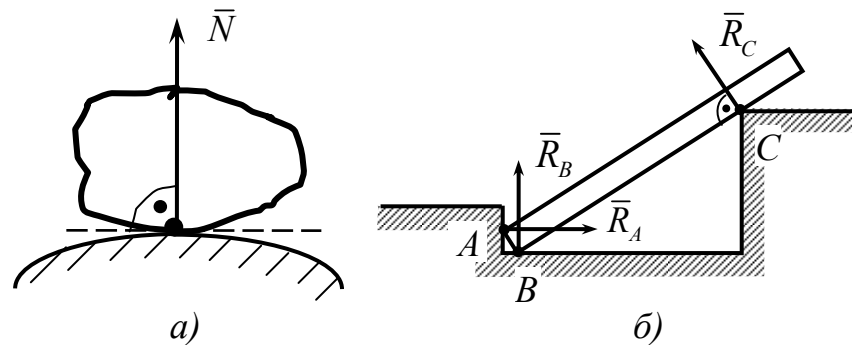


Рисунок 1.37

2. **Шорстка поверхня** – реакція \bar{R} шорсткої поверхні розкладається на дві складові: нормальну $\bar{R}_n = \bar{N}$ і дотичну $\bar{R}_\tau = \bar{F}_{mp}$ (рис. 1.38). Дотична складова реакції – це сила тертя, величина якої визначається залежністю $F_{mp} = f \cdot N$, де f – коефіцієнт тертя ковзання.

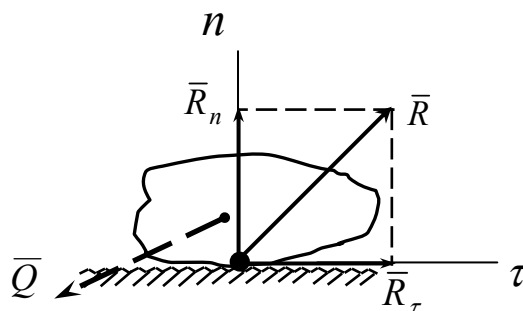


Рисунок 1.38

3. **Гнучка нитка** – реакція і гнучкою нерозтяжною ниткою спрямована уздовж нитки до точки її закріплення (рис. 1.39).

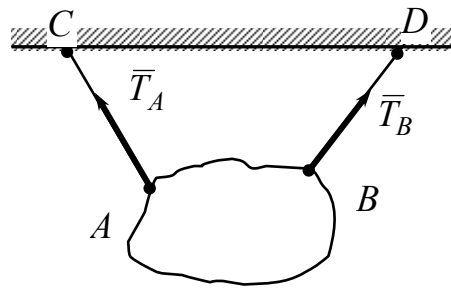


Рисунок 1.39

4. **Стрижень** (тонкий, невагомий) – реакція стрижня (рис. 1.40) спрямована уздовж осі стрижня в ту чи іншу сторону. Якщо стрижень не є прямолінійним, то його реакція також спрямована уздовж лінії, яка проходить через точки шарнірного закріплення стрижня (рис. 1.40, б).

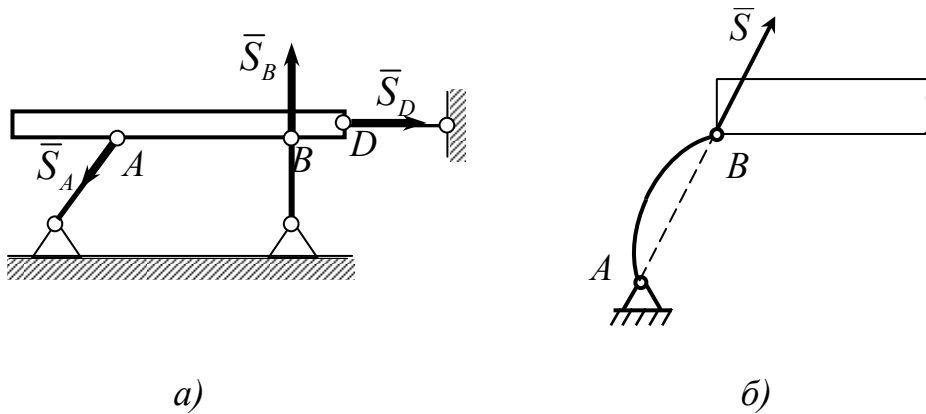


Рисунок 1.40

5. **Циліндричний шарнір** (нерухомий) – здійснюється за допомогою болта або пальця, який проходить через отвори тіла і нерухомої опори (рис. 1.41). Схематичні зображення циліндричного шарніра подані на рисунку 1.41, б, в, г.

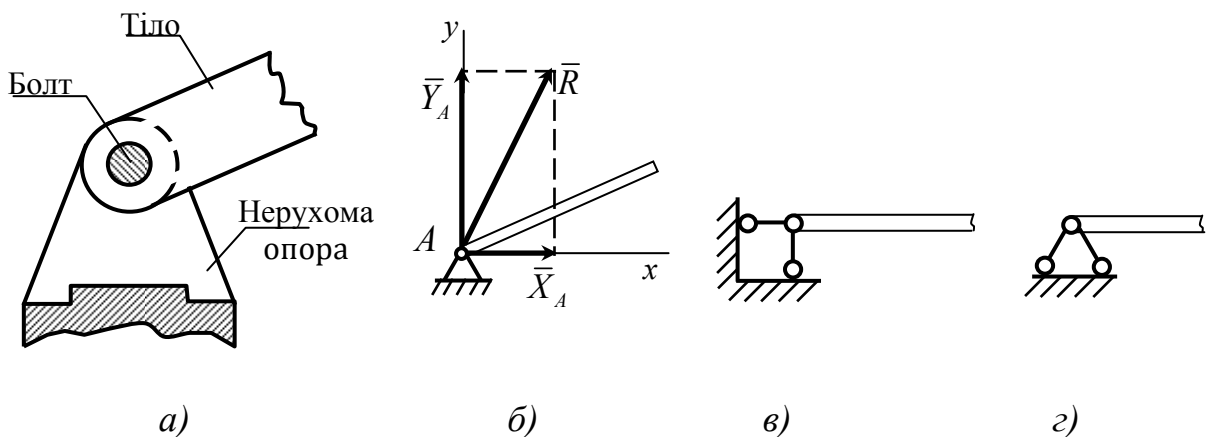


Рисунок 1.41

Реакція циліндричного шарніра лежить в площині, перпендикулярній осі шарніра, і проходить через його центр. Напрямок цієї реакції заздалегідь вказати не можна, тому реакцію циліндричного шарніра подають у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових (див. рис. 1.41, б), тобто

$$\bar{R} = \bar{X}_A + \bar{Y}_A; \quad R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2};$$

6. **Рухомий циліндричний шарнір (опора на котках)** – реакція рухомого шарніра проходить через центр шарніра і спрямована перпендикулярно опорній площині котків (рис. 1.42).

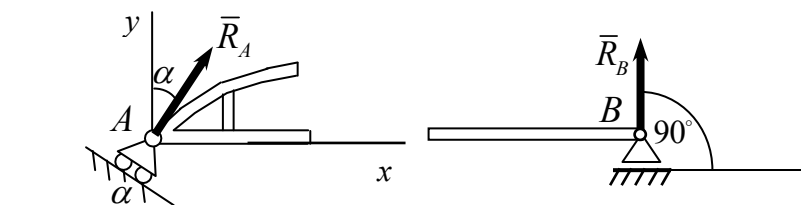


Рисунок 1.42

7. **Підшипник і петля** – реакція підшипника (точка A), як і реакція петлі (точка B), має дві взаємно перпендикулярні складові, розташовані в площині, перпендикулярній їх осі (рис. 1.43), тобто

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A; \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad \bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}.$$

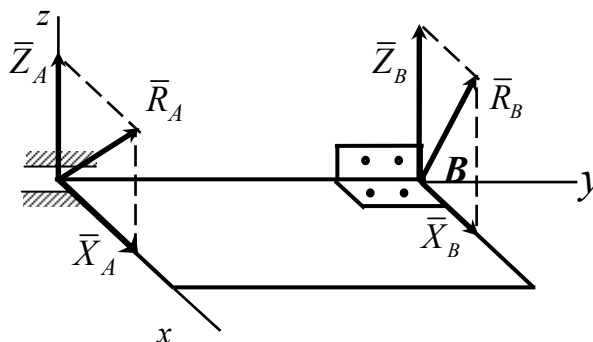


Рисунок 1.43

8. **Сферичний шарнір і під'ятник** – реакція \bar{R}_A сферичного шарніра (рис. 1.44, а), як і реакція \bar{R}_B під'ятника (рис. 1.44, б), має три взаємно перпендикулярні складові, тобто

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A; \quad R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2};$$

$$\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B + \bar{Z}_B; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2}.$$

8. **Сферичний шарнір і під'ятник** – реакція \bar{R}_A сферичного шарніра (рис. 1.44, а), як і реакція \bar{R}_B під'ятника (рис. 1.44, б), має три взаємно перпендикулярні складові, тобто

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A; R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2};$$

$$\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B + \bar{Z}_B; \dots R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2}.$$

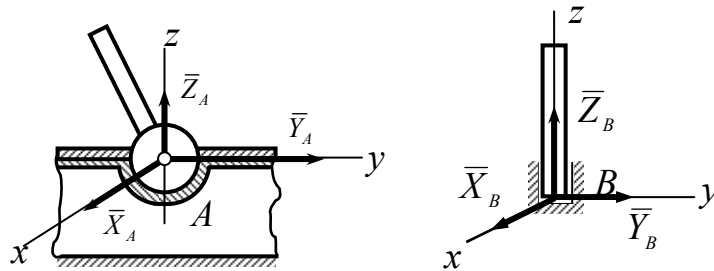


Рисунок 1.44

9. **Жорстке кріплення (защемлення)** – здійснюється вмуровуванням тіла в нерухому поверхню (рис. 1.45, а). Реакція жорсткого защемлення визначається трьома складовими: двома складовими \bar{X}_A, \bar{Y}_A реактивної сили ($\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$) і реактивної парою сил з реактивним моментом M_A (рис. 1.45, б).

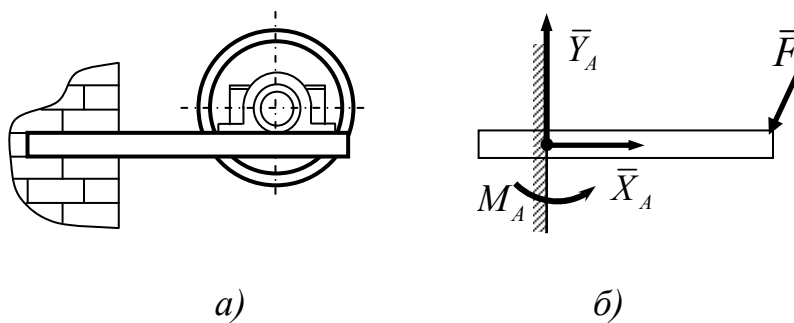


Рисунок 1.45

1.2.1.4 Проекція сили на вісь

Проекція сили на вісь – це узятая з певним знаком величина, яка чисельно дорівнює відстані між проєкціями на цю вісь початку і кінця вектора сили.

Знак проєкції буде позитивним, якщо кут між напрямком сили і позитивним напрямком осі гострий, і негативним, якщо цей кут – тупий.

Тоді для сил, зображених на рисунку 1.46, отримаємо:

$$F_x = ab = F \cdot \cos \alpha; \quad Q_x = -ed = -Q \cdot \cos \beta;$$

$$F_y = a_1 b_1 = F \cdot \sin \alpha; \quad Q_y = e_1 d_1 = Q \cdot \sin \beta;$$

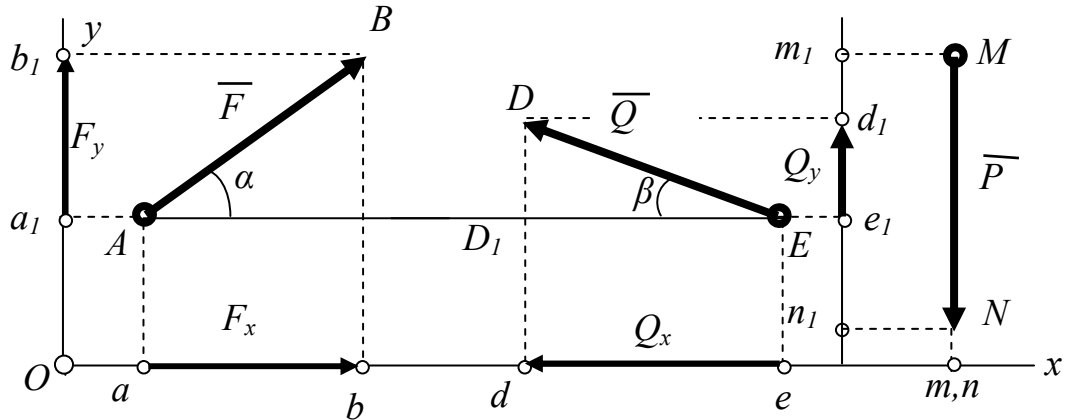


Рисунок 1.46

Проекція сили на вісь дорівнює величині самої сили, якщо сила паралельна осі, тому проекція сили \vec{P} на вісь Oy буде дорівнювати

$$P_y = -m_1 n_1 = -P.$$

Проекція сили на вісь дорівнює нулю, якщо сила перпендикулярна осі, тому проекція сили \vec{P} на вісь Ox буде дорівнювати $P_x = mn = 0$.

Проекцією сили \vec{F} на площину Oxy називається вектор \vec{F}_{xy} , розміщений між проекціями на цю площину початку і кінця вектора сили \vec{F} (рис. 1.47). Модуль вектора проекції сили $F_{xy} = F \cdot \cos \theta$, на площину де θ – кут між напрямком сили і площиною.

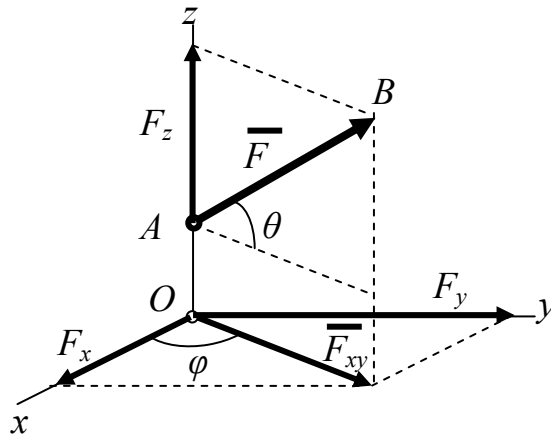


Рисунок 1.47

Отже, в разі, зображеному на рисунку 1.47, в результаті подвійного проектування знайдемо:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi; \\ F_y &= F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi; \\ F_z &= F \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

1.2.1.5 Система збіжних сил

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається системою збіжних сил.

Система збіжних сил має рівнодійну, яка дорівнює геометричній сумі сил системи і проходить через точку перетину їх ліній дії, тобто

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.34)$$

Модуль рівнодійної виражається через її проекції на осі :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\text{де } R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Оскільки система збіжних сил зводиться до рівнодійної, то для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб її рівнодійна дорівнювала нулю, тобто умова рівноваги системи збіжних сил має вигляд $\bar{R} = 0$.

Якщо система збіжних сил знаходиться в стані рівноваги, то сума проекцій усіх сил системи на кожен з осей координат дорівнює нулю. Тому, з урахуванням (1.22) рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил набудуть вигляду

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$$

У випадку плоскої системи збіжних сил, що лежать в координатній площині Oxy , використовують тільки два з трьох рівнянь рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (1.35)$$

1.2.1.6 Методика і приклади розв'язання задач

Розв'язання задач з рівноваги матеріального об'єкта проводиться за таким алгоритмом:

- 1) вибрати об'єкт (тверде тіло, окрему точку), рівновагу для якого слід розглядати (в подальшому – тіло);
- 2) прикласти активні сили, що діють на це тіло;
- 3) застосувавши аксіому в'язей звільнити тіло від в'язей і показати їх реакції;
- 4) для одержаної зрівноваженої системи сил скласти рівняння рівноваги;
- 5) визначити з цих рівнянь невідомі величини.

Приклад 1. Електрична лампочка вагою $P = 20$ Н підвішена за допомогою двох шнурів AB і AC , прикріплених до стіни і до стелі (рис. 1.48). Визначити реакції шнурів \bar{T}_{AB} і \bar{T}_{AC} , якщо кути нахилу шнурів до стелі та стіни відповідно дорівнюють $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 135^\circ$. Вагою шнурів знехтувати.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу вузла A , на який діють: сила ваги \bar{P} (активна сила) та реакції \bar{T}_{AB} і \bar{T}_{AC} шнурів (рис. 1.48, а) направлені вздовж шнурів до точок B і C закріплення.

На рисунку 1.48, б показана схема розміщення у вибраній системі координат зрівноваженої збіжної системи сил, які діють на вузол A .

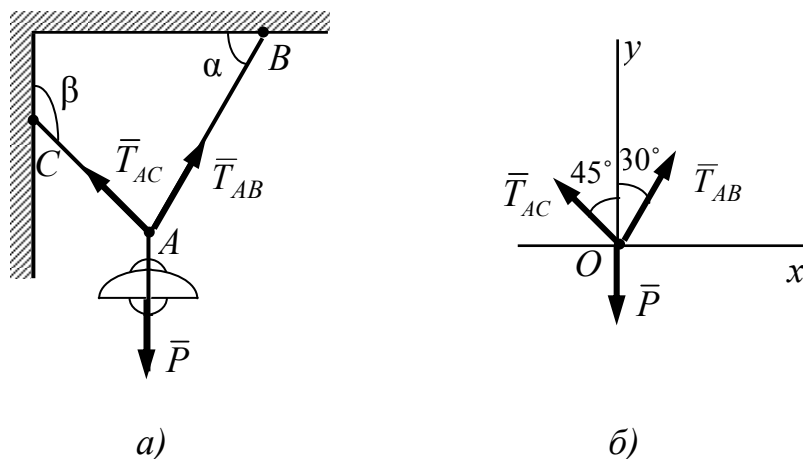


Рисунок 1.48

Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad T_{AB} \sin 30^\circ - T_{AC} \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad T_{AB} \cos 30^\circ + T_{AC} \cos 45^\circ - P = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$T_{AB} = \frac{P}{\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{20}{0,5 + 0,866} = 14,64H;$$

$$T_{AC} = T_{AB} \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 14,64 \frac{0,5}{0,707} = 10,35H.$$

1.2.2 Момент сили. Пара сил

1.2.2.1 Момент сили відносно точки

Діючі на тіло сили можуть не тільки поступально переміщувати його, а при певних умовах також обертати тіло навколо точки або навколо осі. Для врахування обертальної дії сили вводиться поняття моменту сили.

Моментом сили \vec{F} відносно точки O називають прикладений у цій точці вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \vec{r} точки прикладання сили відносно моментної точки O та вектора сили \vec{F} (рис. 1.49):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.36)$$

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h.$$

Цією залежністю визначається так званий алгебраїчний момент сили відносно точки.

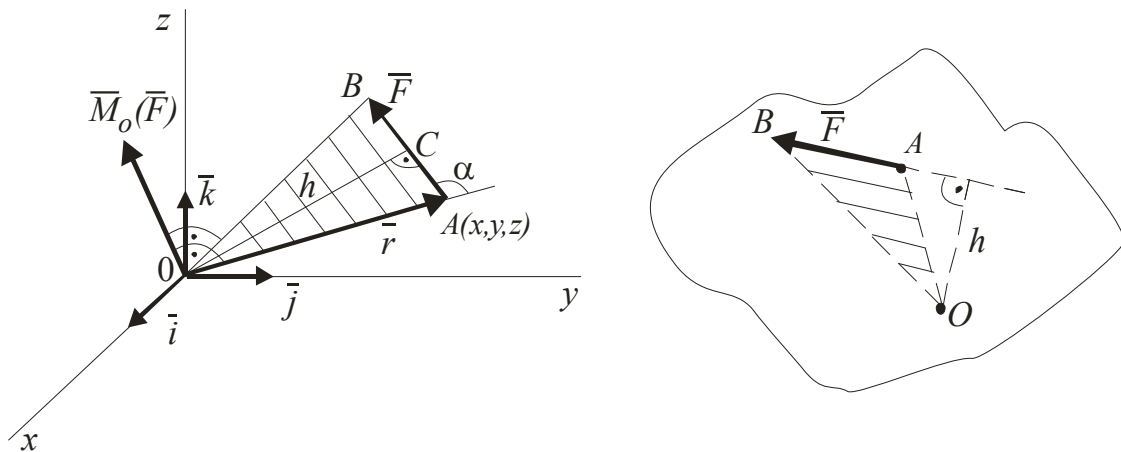


Рисунок 1.49

Вектор $\overline{M}_O(\overline{F})$ направлений перпендикулярно площині, у якій лежать вектори \overline{r} і \overline{F} , в тому напрямку, звідки обертання тіла під дією сили видно проти ходу годинникової стрілки.

Модуль векторного моменту сили відносно точки обчислюють за правилами векторної алгебри:

$$|\overline{M}_O(\overline{F})| = \overline{F} \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot OC,$$

де $r \cdot \sin \alpha = OC = h$ – плече сили \overline{F} відносно моментної точки O , яке являє собою найкоротшу відстань між цією точкою і лінією дії сили, виміряну за перпендикуляром.

Отже, момент сили відносно точки чисельно дорівнює взятому з певним знаком добутку модуля сили на плече:

Знак алгебраїчного моменту вибирають залежно від напрямку повороту тіла під дією сили: момент сили вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно точки проти ходу годинникової стрілки і від'ємним – при повороті за годинниковою стрілкою.

Так на рисунку 1.49 маємо, що $M_O(\overline{F}) > 0$.

Властивості моменту сили відносно точки:

- 1) момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника OAB , побудованого на силі і моментній точці;
- 2) момент сили не залежить від переносу сили вздовж лінії її дії;
- 3) момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через моментну точку (тоді $h = 0$), або коли сама сила дорівнює нулю.

Позначимо координати точки прикладання сили через x, y, z , а проєкції сили на осі координат через F_x, F_y, F_z . Тоді векторний момент сили можна подати так:

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x),$$

а його проєкції на координатні осі визначаються за формулами:

$$M_{ox}(\overline{F}) = yF_z - zF_y; M_{oy}(\overline{F}) = zF_x - xF_z; M_{oz}(\overline{F}) = xF_y - yF_x.$$

Модуль моменту

$$|\bar{M}_o(\bar{F})| = M_o(\bar{F}) = \sqrt{[M_{ox}(\bar{F})]^2 + [M_{oy}(\bar{F})]^2 + [M_{oz}(\bar{F})]^2}.$$

Напрямок вектора $\bar{M}_o(\bar{F})$ визначається направляючими косинусами:

$$\begin{aligned} \cos [\bar{M}_o(\bar{F}), \bar{i}] &= \frac{M_{ox}(\bar{F})}{M_o(\bar{F})}; \quad \cos [\bar{M}_o(\bar{F}), \bar{j}] = \frac{M_{oy}(\bar{F})}{M_o(\bar{F})}; \\ \cos [\bar{M}_o(\bar{F}), \bar{k}] &= \frac{M_{oz}(\bar{F})}{M_o(\bar{F})}. \end{aligned}$$

1.2.2.2 Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називають алгебраїчний момент проєкції сили на площину, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з цією площиною. Відповідно до цього визначення для знаходження моменту сили відносно осі необхідно (рис. 1.50):

- провести площину Π , перпендикулярну осі z ;
- знайти точку O перетину осі z з площиною Π ;
- спроеціювати силу \bar{F} на площину Π ;
- знайти момент проєкції \bar{F}_Π відносно точки O .

Тоді

$$M_z(\bar{F}) = M_o(\bar{F}_\Pi) = \pm \bar{F}_\Pi \cdot h, \quad (1.37)$$

де \bar{F}_Π – вектор проєкції сили \bar{F} на площину Π , перпендикулярну осі Oz ;

h – плече проєкції \bar{F}_Π відносно точки O перетину осі Oz із площиною Π .

Момент сили відносно осі вважають додатним, якщо з додатного напрямку осі видно намагання сили повернути тіло відносно осі проти ходу годинникової стрілки. Так, на рисунку 1.50 маємо, що $M_z(\bar{F}) > 0$.

Момент сили відносно осі можна виразити через площу трикутника, побудованого на проєкції сили \bar{F}_Π і точці O перетину осі з площиною (див. рис. 1.50):

$$M_z(\bar{F}) = \pm F_\Pi \cdot h = 2nl\Delta OA_1B_1. \quad (1.38)$$

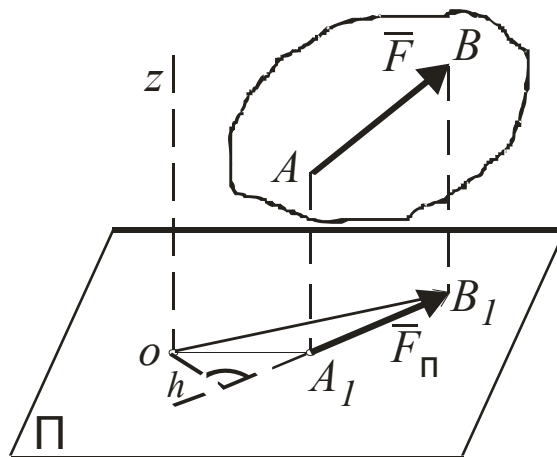


Рисунок 1.50

Із формули (1.31) можна встановити умови, коли момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- 1) момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі (тоді дорівнює нулю проєкція сили на площину, перпендикулярну осі);
- 2) момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили перетинає цю вісь (у цьому випадку дорівнює нулю плече проєкції сили на площину, перпендикулярну осі).

Об'єднуючи ці два випадки, можна висновити: момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

Аналізування властивостей моментів сили відносно точки та відносно осі дозволяє встановити таку залежність між цими двома характеристиками обертальної дії сили, яка характеризується теоремою:

Момент сили відносно осі дорівнює проєкції на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки на осі.

Справедливість цього твердження встановимо, розглянувши дію на тіло сили \vec{F} , прикладеної в точці A (рис. 1.51).

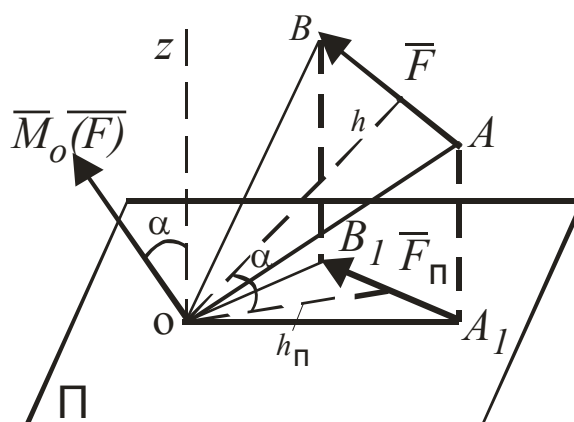


Рисунок 1.51

Векторний момент сили \vec{F} відносно центра O зображується вектором $M_0(\vec{F})$, перпендикулярним до площини трикутника OAB , а його модуль

$$|\overline{M}_0(\vec{F})| = 2nl\Delta OAB.$$

Величина моменту сили відносно осі, відповідно до формули (1.38), дорівнює $M_z(\vec{F}) = 2nl\Delta OA_1B_1$. Але трикутник OA_1B_1 являє собою проекцію на площину Π трикутника OAB . Кут α між площинами цих трикутників дорівнює куту між перпендикулярами до цих площин. Тоді за відомою з геометрії формулою маємо:

$$nl\Delta OA_1B_1 = nl\Delta OAB \cdot \cos\alpha,$$

де α – кут між вектором $M_0(\vec{F})$ та віссю Oz . Звідси за формулами (1.31) і (1.32),

$$M_z(\vec{F}) = |\overline{M}_0(\vec{F})| \cdot \cos\alpha = M_{oz}(\vec{F}).$$

Використовуючи цю залежність та формулу (1.27), одержимо аналітичні формули для обчислення моментів сили відносно координатних осей:

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x, \quad (1.39)$$

де x, y, z – координати точки прикладання сили,
 F_x, F_y, F_z – проекції сили на координатні осі.

1.2.2.3 Теорема Варіньона про момент рівнодійної

Якщо система сил має рівнодіючу, то момент рівнодійної відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї самої точки.

Нехай задано систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, рівнодіюча якої $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ прикладена в точці A (рис. 1.52). Додамо до системи врівноважуючу силу $\vec{R}' = -\vec{R}$, прикладену в тій самій точці A , і одержимо зрівноважену систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}') \sim 0$.

Головний момент цієї зрівноваженої системи сил

$$M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) + \bar{M}_0(\bar{R}') = 0.$$

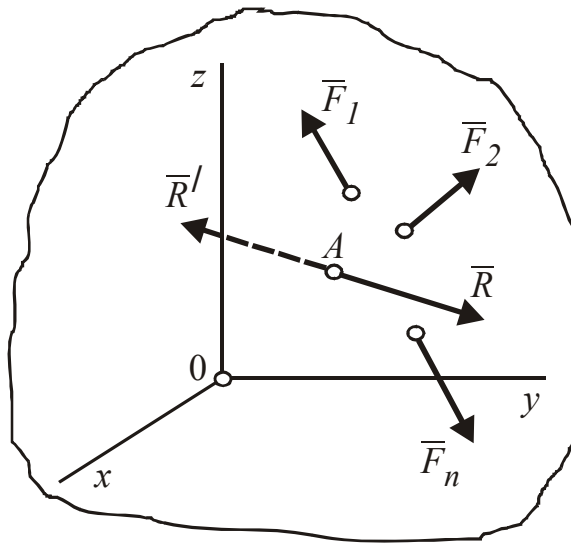


Рисунок 1.52

Зважаючи на те, що $\bar{M}_0(\bar{R}') = -\bar{M}_0(\bar{R})$, із виразу (1.33), одержимо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k) - \bar{M}_0(\bar{R}) = 0,$$

звідки випливає

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k).$$

Теорема доведена.

Теорема Варіньона справедлива і для моментів сил відносно осей координат. Дійсно, проєкціюючи векторний вираз (1.34) на координатні осі, одержимо:

$$M_x(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k); \quad M_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k); \quad M_z(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k),$$

тобто момент рівнодіючої відносно деякої осі дорівнює сумі моментів сил системи відносно цієї осі.

Застосовуючи теорему Варіньона для обчислення моменту сили відносно точки або осі, розкладають силу на складові, для яких плече відносно точки або осі відоме із умов задачі, що полегшує обчислення моменту.

1.2.2.4 Пара сил та її момент

Парою сил називають систему двох сил, які дорівнюють за модулем і направлені вздовж паралельних прямих у протилежних напрямках (рис. 1.53). Площина, у якій розміщені сили пари, – це площина дії пари сил, а найкоротша відстань d між лініями дії сил називається плечем пари.

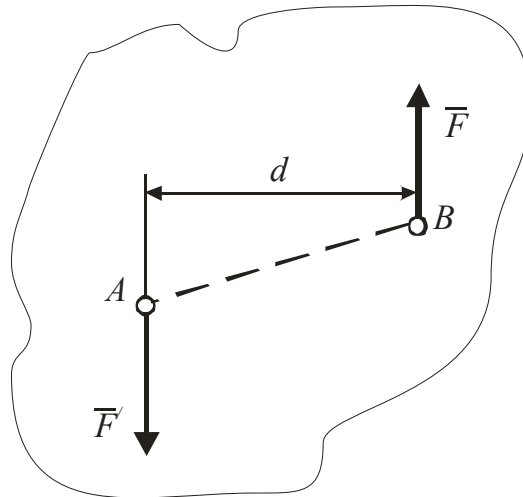


Рисунок 1.53

Сили пари не складають зрівноважену систему сил, бо не мають спільної лінії дії, та не зводяться до рівнодіючої, оскільки їх геометрична сума дорівнює нулю. Дія пари сил зводиться до обертового ефекту, який характеризується моментом пари.

Момент пари – це взята з відповідним знаком величина, яка дорівнює добутку модуля однієї із сил пари на плече пари:

$$M = M(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot d$$

Момент пари сил буде додатним, якщо пара сил намагається обертати тіло проти ходу годинникової стрілки.

Векторним моментом пари сил називається вектор \vec{M} , модуль якого дорівнює добутку модуля однієї із сил на плече пари, і який напрямлений перпендикулярно площині дії пари в той бік, звідки напрямок повороту тіла під дією пари видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 1.54).

Із цього визначення можна встановити, що момент пари сил дорівнює моменту однієї із сил пари відносно точки прикладання другої сили, тобто

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{M}_A(F) \text{ або } \vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}' = \vec{M}_B(F')$$

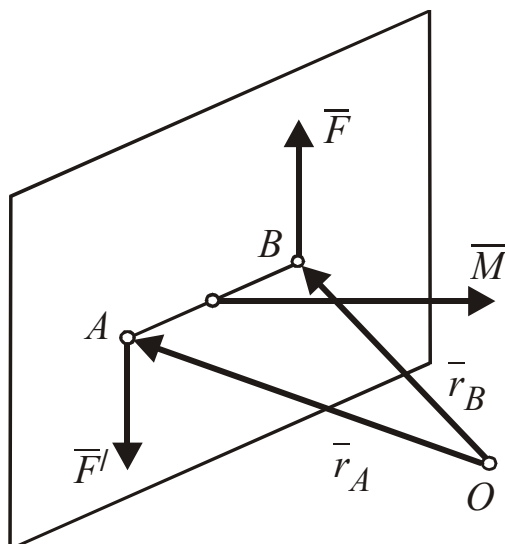


Рисунок 1.54

Покажемо справедливість висновку (теореми):

Сума моментів сил пари відносно будь-якої точки не залежить від положення цієї точки і дорівнює моменту пари сил.

Обчислимо суму сил пари відносно довільно вибраної точки O (див. рис. 1.54), враховуючи, що $\vec{F} = -\vec{F}'$:

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\vec{F}) + \bar{M}_O(\vec{F}') &= (\vec{r}_B \times \vec{F}) + (\vec{r}_A \times \vec{F}') = (\vec{r}_B \times \vec{F}) - (\vec{r}_A \times \vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F} = \bar{M} \end{aligned}$$

Таким чином, дія пари сил на тверде тіло повністю визначається моментом пари сил. Оскільки положення точки O вибране довільно, то вектор \bar{M} моменту пари можна прикладати у будь-якій точці, тобто цей вектор є вільним вектором.

1.2.2.5 Теореми про властивості пари сил. Умови рівноваги

Теореми про пари сил встановлюють умови еквівалентного перетворення пар сил без зміни їх дії на тверде тіло, дозволяють зробити системи пар простішими на вигляд. Розглянемо ці теореми.

1) Теорема про еквівалентність пар сил, розташованих в одній площині

Пару сил, що діє на тверде тіло, можна замінити іншою парою сил, яка розташована в тій самій площині і має однаковий з першою парою алгебраїчний момент.

2) Теорема про перенесення пари сил в паралельну площину
Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її перенести в будь-яку площину, паралельну площині дії пари.

3) Теорема про додавання пар сил
Система пар сил, діючих на тверде тіло, еквівалентна одній парі сил, векторний момент якої дорівнює геометричній сумі векторних моментів усіх пар системи.

Із цих теорем випливають такі властивості пар сил:

а) дія пари сил на тверде тіло повністю визначається моментом пари сил;

б) пару сил можна як завгодно повертати і переносити в будь-яке місце площині дії пари;

в) у пари сил можна змінювати плече пари та величину сил пари, зберігаючи незмінним її алгебраїчний момент;

г) дві пари сил еквівалентні, якщо вони мають однакові векторні моменти;

д) пари сил, що лежать в одній площині, складаються алгебраїчно, а розміщені в просторі складаються векторно, тобто при дії на тіло системи пар сил з моментами $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$, то ця система пар еквівалентна одній парі сил з моментом

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k .$$

Тоді, відповідно до формули (1.35), одержимо умову рівноваги системи пар:

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_k = 0 ,$$

тобто для рівноваги системи пар необхідно і достатньо, щоб момент результуючої пари сил дорівнював нулю.

Проекціюючи векторне рівняння (1.36) на координатні осі, одержимо три алгебраїчних рівняння умов рівноваги системи пари сил:

$$\sum_{k=1}^n M_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{kz} = 0 .$$

Для рівноваги системи пар сил, що лежать в одній площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів цих пар дорівнювала нулю.

1.2.3 Основна теорема статички і умови рівноваги довільної системи сил

Для довільної системи сил, лінії дії якої можуть бути розташовані в просторі або в одній площині, необхідно також, як і для раніше розглянутої системи збіжних сил, одержати умови рівноваги. Еквівалентне перетворення довільної системи сил здійснюють, застосовуючи теорему про паралельне перенесення сили.

1.2.3.1 Теорема про паралельне перенесення сили

Силу можна переносити паралельно самій собі в будь-яку точку твердого тіла, додаючи при цьому пару сил, векторний момент якої дорівнює векторному моменту сили, що переноситься відносно нової точки її прикладання.

Розглянемо силу \vec{F} , прикладену в точці A (рис. 1.55, а). У довільно вибраній точці B прикладемо зрівноважену систему сил $(\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0$, де $\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}''$. Тоді $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ (рис. 1.55, б).

Розглядаючи систему цих трьох сил, як одну силу \vec{F}' та пару сил (\vec{F}, \vec{F}'') (рис. 1.55, в), момент якої $M(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}$, одержимо $\vec{F} \sim (\vec{F}', \vec{M})$, і теорема доведена.

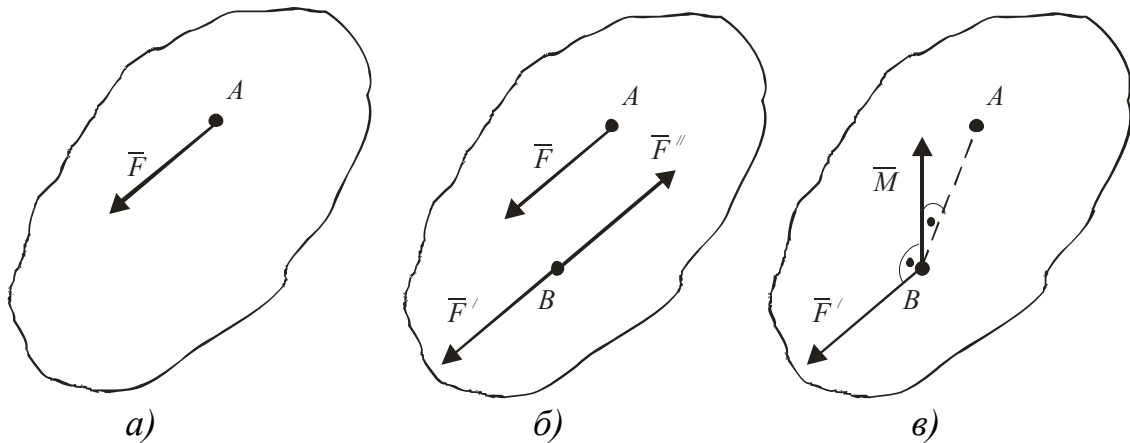


Рисунок 1.55

1.2.3.2 Основна теорема статички (теорема Пуансо) про приведення довільної системи сил до заданого центра

Для довільної системи сил введемо такі визначення.

Головним вектором системи сил є вектор, який дорівнює геометричній сумі всіх сил системи. Тобто для системи n сил маємо

$$R = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.40)$$

Головним моментом системи сил відносно деякого центра називається величина, яка дорівнює сумі моментів сил системи відносно даного центра, тобто

$$M_0 = \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) \quad (1.41)$$

Доведемо основну теорему статички (теорему Пуансо):

Довільна просторова система сил еквівалентна одній силі, яка дорівнює головному вектору системи і прикладена в деякій точці (центр приведення) та одній парі сил з моментом, який дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення.

Доведення цієї теореми (рис. 1.56) здійснимо шляхом перенесення кожної із сил \bar{F}_k , прикладених в точках A_k (див. рис. 1.56, а), у деяку точку O , вибрану за центр приведення, додаваючи при цьому пари сил з моментами $\bar{M}_k = \bar{M}_O(\bar{F}_k)$ (див. рис. 1.56, б). Потім, у результаті складання, замінимо систему збіжних сил рівнодіючою $\bar{R} = \sum \bar{F}'_k = \sum \bar{F}_k$, що дорівнює головному вектору системи, а систему пар сил – однією парою з моментом $\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_k = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k)$, який дорівнює головному моменту системи відносно центра приведення O (див. рис. 1.56, в).

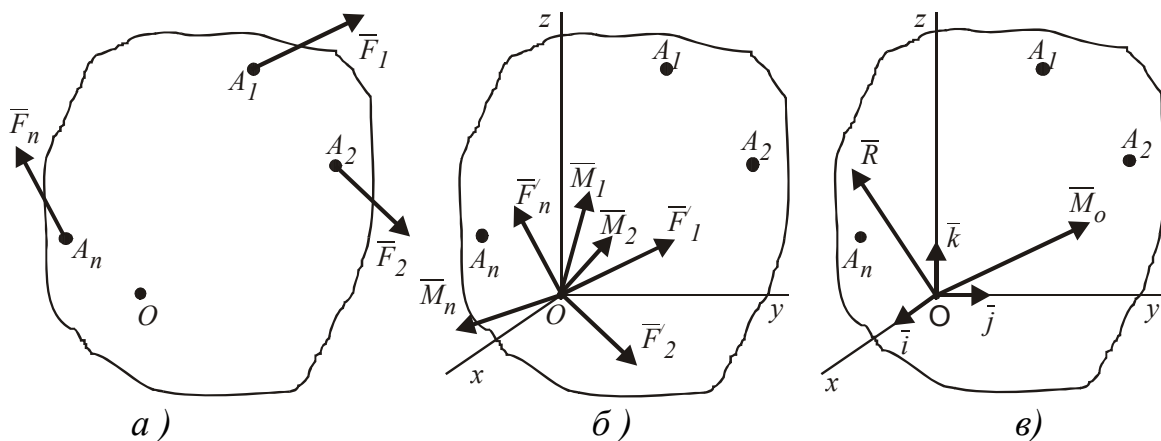


Рисунок 1.56

Таким чином підтвердимо, що $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{R}, \bar{M}_0)$. Отже, теорема доведена.

Слід взяти до уваги, що у випадку розташування сил системи в одній площині головний момент $M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k)$ буде алгебраїчним, тому для плоскої

1.2.3.3 Рівновага систем сил

Виходячи з основної теореми статички (теореми Пуансо) можна встановити умови рівноваги будь-якої системи сил:

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи сил та її головний момент відносно будь-якого центра приведення дорівнювали нулю, тобто

$$\bar{R} = 0 ; \bar{M}_0 = 0 .$$

Значення \bar{R} та \bar{M}_0 розраховують аналітично через їх проєкції на координатні осі:

$$\bar{R} = \bar{i}R_x + \bar{j}R_y + \bar{k}R_z ; \quad \bar{M}_0 = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z ,$$

де проєкції головного вектора і головного моменту системи на осі координат визначаються за відомими формулами (підпункт 1.1.3.5):

$$R_x = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_{kx}) , R_y = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_{ky}) , R_z = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_{kz}) ; \quad M_x = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) , M_y = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) , M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) .$$

Тоді аналітичні умови рівноваги, які випливають з виразів (1.40, 1.41)

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 ; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 ; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 ;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0 ; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0 ; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0 .$$

Таким чином, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил системи на кожну з трьох осей координат та сума моментів всіх сил системи відносно цих осей дорівнювали нулю.

Із загальних умов рівноваги довільної просторової системи сил одержують умови рівноваги більш простих систем сил.

Для просторової системи паралельних сил, де $\bar{F}_k \parallel Oz$, проєкції кожної із сил на осі Ox та Oy і їх моменти відносно осі Oz дорівнюватимуть нулю тотожно.

Тому аналітичні умови рівноваги такої системи сил матимуть три рівняння:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0.$$

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на вісь, паралельну силам, та сума їх моментів відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

Для довільної плоскої системи сил, де всі сили системи лежать в одній площині, головний момент $M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k)$ буде алгебраїчним, а

головний вектор $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ також лежить у цій площині, і його значення

розраховується через дві проєкції $R_x = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_{kx})$ та $R_y = \sum_{k=1}^n (\bar{F}_{ky})$. Тому для

рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи сил та її алгебраїчний головний момент відносно будь-якого центра приведення дорівнювали нулю, тобто

$$\bar{R}_0 = 0; \quad M_O = 0.$$

Аналітичні умови рівноваги, які випливають з виразів (1.37), можуть бути записані в трьох варіантах:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0.$$

Ці рівняння є основною (*першою*) формою аналітичних умов рівноваги довільної плоскої системи сил, які формулюються так: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх сил на кожну з двох координатних осей та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки на площині дії сил дорівнювали нулю.

Друга форма аналітичних умов рівноваги передбачає: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів

усіх сил відносно двох точок A і B та сума проєкцій цих сил на вісь Ox , не перпендикулярну до прямої AB , дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \bar{AB} \not\perp Ox. \quad (1.41)$$

Необхідність цих умов випливає з того, що при невиконанні будь-якої із рівностей (1.39) або головний вектор $\bar{R} \neq 0$, або головний момент $M \neq 0$, і рівноваги не буде.

Достатність умов (1.39) доводиться від зворотного, допускаючи, що при виконанні перших двох рівнянь система сил не знаходиться в стані рівноваги, а має рівнодіючу $\bar{R} \neq 0$, лінія дії якої проходить через точки A і B . Але при такому допущенні не виконується третє рівняння $\sum F_{kx} = 0$, оскільки вісь Ox проведена не перпендикулярно до AB . Отже, останнє рівняння виконується тільки тоді, коли рівнодіюча $\bar{R} = 0$, тобто має місце рівновага.

Сформулюємо **третю** форму умов рівноваги розглядуваної системи сил: *для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів сил системи відносно будь-яких трьох точок A , B і C , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:*

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0 \quad (A; B; C \rightarrow \Delta).$$

У випадку плоскої системи паралельних сил, коли $\bar{F}_k \parallel Oy$, проєкції кожної з сил системи на вісь Ox будуть дорівнювати нулю. У результаті для плоскої системи паралельних сил залишаться дві форми умов рівноваги.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на паралельну їм вісь та сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0.$$

Ця перша форма аналітичних умов рівноваги для плоскої системи паралельних сил впливає з рівнянь (1.38).

Другу форму умов рівноваги плоскої системи паралельних сил одержимо з рівнянь (1.39).

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума моментів усіх сил системи відносно двох точок, які не лежать на прямій, паралельній силам, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad (A \neq B \neq \bar{F}_k).$$

Умови рівноваги системи збіжних сил розглянуті раніше в розділі (підпункт 1.2.1.5) і подані формулами (1.23), (1.24).

1.2.3.4 Розподілене навантаження

В інженерних розрахунках поряд з зосередженими силами, які прикладені до твердого тіла в деякій точці, зустрічаються сили, дія яких розподілена певною ділянкою об'єму тіла, його поверхні або лінії.

Оскільки всі аксіоми і теореми статки формулюються для зосередження сил, то необхідно розглянути способи переходу від розподіленого навантаження до зосереджених сил.

Розглянемо деякі прості випадки розподіленого навантаження паралельними силами, що лежать в одній площині вздовж відрізка прямої.

Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю q , тобто величиною сили, що припадає на одиницю довжини навантаженого відрізка. Одиницею виміру інтенсивності є ньютон, поділений на метр (Н/м). Інтенсивність може бути постійною (рівномірно розподілене навантаження) або змінюватись за лінійним та довільним законами.

Рівномірно розподілене навантаження (рис. 1.57, а), коли інтенсивність q є постійною величиною, при статичних розрахунках замінюється однією зосередженою силою \bar{Q} , модуль якої

$$Q = l \cdot q,$$

де l – довжина навантаженого відрізка.

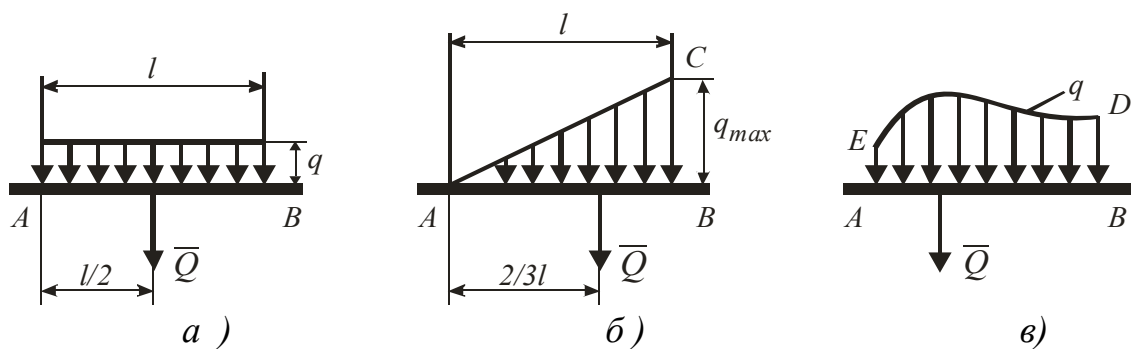


Рисунок 1.57

Ця рівнодіюча сила \bar{Q} , паралельна силам розподіленого навантаження, спрямована у напрямку розподілених сил і прикладена всередині навантаженого відрізка AB .

Таке навантаження має місце при розміщенні на тілі однорідної балки довжиною l з питомою вагою q .

Розподілене навантаження з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом (рис. 1.57, б), з'являється, наприклад, під дією тиску води на греблю, коли інтенсивність найбільша біля дна водоймища і є нульовою біля поверхні води. При цьому величина q інтенсивності зростає від нульового до найбільшого значення q_{max} . Рівнодіюча Q такого навантаження визначається як вага трикутної однорідної пластинки ABC , яка пропорційна її площі, тобто за модулем

$$Q = \frac{1}{2} l q_{max}.$$

Лінія дії сили \bar{Q} проходить через центр трикутника ABC на відстані $\frac{2}{3}l$ від його вершини A .

Прикладом дії сил, розподілених вздовж відрізка прямої за довільним законом (рис. 1.57, в), є навантаження плоского перекриття кучугурою снігу. Рівнодіюча \bar{Q} таких сил за аналогією з силою ваги буде чисельно дорівнювати площі фігури $ABDE$, виміряної у відповідному масштабі, а лінія дії цієї рівнодіючої проходить через центр площі цієї фігури.

1.2.3.5 Методика і приклади розв'язання задач рівноваги тіла під дією плоскої системи сил

Приклад 1. Визначити опорні реакції, заданої на рисунку 1.58 двоопірної балки, яка знаходиться в стані рівноваги під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності $q = 5$ кН/м, вертикальної сили $P=15$ кН та сили $F=10$ кН, нахиленої під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонталі, і пари сил з моментом $M = 8$ кН·м.

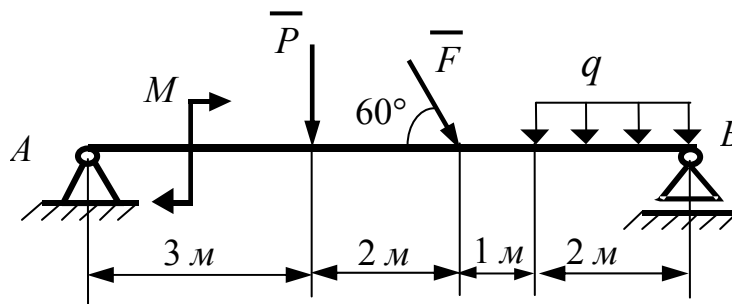


Рисунок 1.58

Розв'язання

Розглянемо рівновагу балки AB . Рівномірно розподілене навантаження замінимо зосередженою силою \bar{Q} , яку прикладемо посередині навантаженої ділянки, спрямувавши її паралельно силам розподіленого навантаження в тому самому напрямку. Обчислимо, що $Q = q \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$ кН. Дію нерухомого шарніра в точці A замінимо двома складовими реакції \bar{X}_A, \bar{Y}_A , а рухомого в точці B – реакцією \bar{R}_B (рис. 1.59).

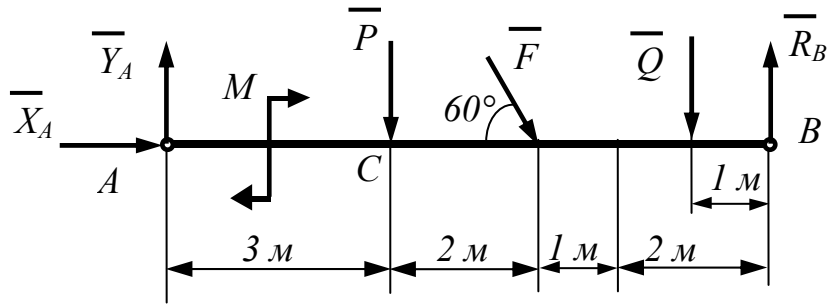


Рисунок 1.59

Складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, діючих на балку:

$$\sum F_{kx} = X_A + F \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = R_B \cdot 8 - Q \cdot 7 - P \cdot 3 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 5 - M = 0;$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = -Y_A \cdot 8 - M + P \cdot 5 + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 + Q \cdot 1 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо:

$$X_A = -F \cdot \cos 60^\circ = -10 \cdot 0,866 = -8,66 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{Q \cdot 7 + P \cdot 3 + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 5 + M}{8} = \frac{10 \cdot 7 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 0,866 \cdot 5 + 8}{8} = \frac{1663}{8} = 207,875 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{-M + P \cdot 5 + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 + Q \cdot 1}{8} = \frac{-8 + 15 \cdot 5 + 10 \cdot 0,866 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{8} = \frac{10298}{8} = 1287,25 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку. Для цього використаємо рівняння суми проєкцій усіх сил на вісь y :

$$\sum F_{ky} = Y_A - P - F \cdot \sin 60^\circ - Q + R_B = 1287,25 - 15 - 10 \cdot 0,866 - 10 + 207,875 = -0,11 \approx 0.$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

Приклад 2. Визначити реакції жорстко закріпленої Т-подібної балки, зображеної на рисунку 1.60, а, яка знаходиться в стані рівноваги під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності $q = 5 \text{ кН/м}$, зосередженої сили $F = 10 \text{ кН}$, нахиленої під кутом $\alpha = 60^\circ$ до вертикалі, і пари сил з моментом $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

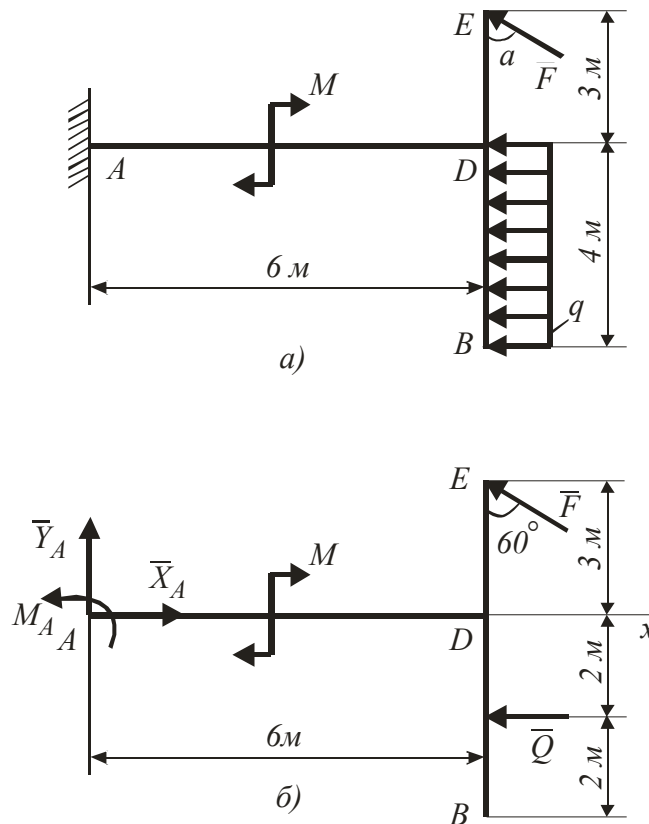


Рисунок 1.60

Розв'язання

Розглянемо рівновагу консольної Т-подібної балки $ADBE$. Рівномірно розподілене навантаження замінимо зосередженою силою \bar{Q} , яку прикладемо посередині ділянки BD , спрямувавши її паралельно силам розподіленого навантаження в тому самому напрямку. Обчислимо, що $Q = q \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ кН}$. Дію жорсткого кріплення на балку замінимо двома силами \bar{X}_A, \bar{Y}_A та парою сил з моментом M_A (рис. 1.60, б). Складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил, діючих на балку:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= X_A - Q - F \cdot \sin 60^\circ = 0; \\ \sum F_{ky} &= Y_A + F \cos 60^\circ = 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= M_A - M - Q \cdot 2 + F \sin 60^\circ \cdot 3 + F \cos 60^\circ \cdot 6 = 0 \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо:

$$X_A = Q + F \sin 60^\circ = 20 + 10 \cdot 0,866 = 28,66 \text{ кН};$$

$$Y_A = -F \cos 60^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН};$$

$$M_A = M + 2Q - F(3 \sin 60^\circ + 6 \cos 60^\circ) = 8 + 2 \cdot 20 - 10 \cdot (0,866 \cdot 3 + 0,5 \cdot 6) = -7,98 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Зробимо перевірку. Для цього використаємо рівняння суми моментів усіх сил відносно точки D :

$$\sum M_D(\bar{F}_k) = M_A - Y_A \cdot 6 = M + F \div \sin 60^\circ \cdot 3 - Q \cdot 2 =$$

$$= -7,98 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 0,866 \cdot 3 - 20 \cdot 2 = -55,98 + 55,98 = 0.$$

Таким чином, реакції балки визначені вірно.

1.2.4 Рівновага тіл за наявності тертя

1.2.4.1 Тертя ковзання. Закони тертя

Розглянемо тіло вагою \bar{P} , яке знаходиться в стані спокою на шорсткій поверхні (рис. 1.61). Його вага врівноважується реакцією в'язі \bar{N} (рис. 1.61, а), яку ще називають *силою нормального тиску*.

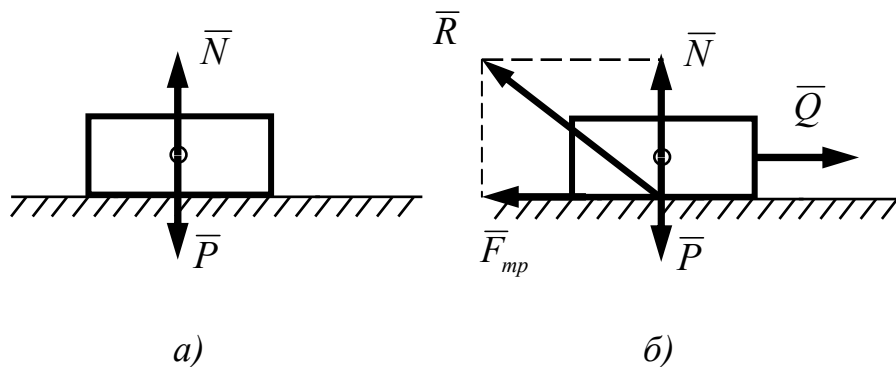


Рисунок 1.61

Прикладаємо до тіла незначну за модулем силу \bar{Q} , яка намагається рушити тіло в напрямку дотичної до поверхні в'язі, і почнемо її поступово збільшувати (рис. 1.61, б). Рух тіла почнеться, коли сила \bar{Q} досягне певної величини, а подальший рух буде проводитись вже при меншому значенні сили \bar{Q} . В обох випадках (до моменту початку руху і при русі тіла з постійною швидкістю) сила \bar{Q} врівноважується силою тертя \bar{F}_{mp} . У першому випадку це сила тертя спокою (статичне тертя), а в другому – сила тертя руху (кінематичне тертя). Відзначимо, що сила тертя спокою більша

за силу тертя руху. Величина максимальної сили тертя в досить широких межах не залежить від розмірів стичних поверхонь.

Тертя між тілами, поверхні яких не змащені, називають сухим тертям, а тертя при значному змащенні поверхонь – рідинним тертям. У теоретичній механіці розглядають тільки сухе тертя.

Сила тертя ковзання є складовою реакції в'язі. Отже, реакція \bar{R} шорсткої поверхні складається із нормальної реакції \bar{N} та перпендикулярної до неї сили тертя \bar{F}_{mp} (див. рис. 1.61), яка спрямована протилежно напрямку зрушення тіла, а її величина набуває будь-якого значення від нуля до максимальної сили тертя, при досягненні якої починається рух тіла:

$$0 \leq F_{mp} \leq F_{\max} .$$

Максимальна сила тертя ковзання пропорційна силі нормального тиску (нормальній реакції \bar{N}), тобто

$$F_{\max} = f \cdot N , \quad (1.42)$$

де f – статичний коефіцієнт тертя ковзання.

Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалів і фізичного стану стичних поверхонь, тобто від чистоти обробки поверхонь, вологості, температури та інших умов. Він визначається дослідним шляхом, його значення для різних матеріалів наводиться у довідниках. Для ряду матеріалів величина статичного коефіцієнта сухого тертя має такі значення: для сталі по сталі – 0,15; для сталі по чавуну – 0,3; для дерева по дереву – 0,4 ... 0,6; для цегли по бетону – 0,76.

Величина максимальної сили тертя в досить широких межах не залежить від розмірів стичних поверхонь.

Закони тертя з достатньою точністю справедливі і для тертя руху. При русі сила тертя протилежна напрямку руху і визначається співвідношенням

$$F_{mp} = f' \cdot N ,$$

де f' – коефіцієнт тертя руху, або динамічний коефіцієнт тертя ковзання, при чому $f' < f$.

Динамічний коефіцієнт тертя ковзання f' залежить не тільки від матеріалу і стану поверхні, але деякою мірою і від швидкості ковзання. Для більшості матеріалів він зменшується при збільшенні відносної швидкості, а для деяких матеріалів (шкіра по металу) – збільшується.

У наближених технічних розрахунках вважають, що динамічний коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості і приблизно дорівнює статичному коефіцієнту тертя ковзання.

1.2.4.2 Реакція шорсткої поверхні. Кут і конус тертя

Як уже зазначалось раніше, реакція \bar{R} шорсткої поверхні складається із двох складових: нормальної реакції \bar{N} та перпендикулярної до неї сили тертя $\bar{F}_{тр}$ (рис. 1.62).

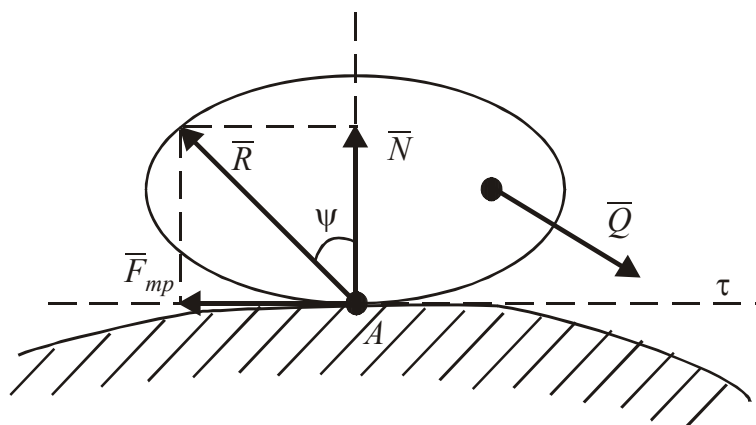


Рисунок 1.62

Повна реакція шорсткої поверхні $\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_{тр}$ буде відхиленою від нормалі на деякий кут ψ . При зміні сили тертя від нуля до \bar{F}_{max} повна реакція шорсткої поверхні змінюється від \bar{N} до \bar{R}_{max} , а кут її нахилу до нормалі зростає від 0 до деякого значення φ . У граничному стані рівноваги (рис. 1.63) повна реакція шорсткої поверхні \bar{R}_{max} відхилена від нормалі на найбільший кут φ , який називають кутом тертя.

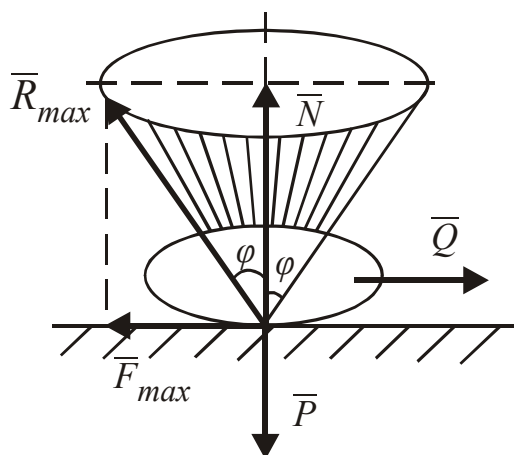


Рисунок 1.63

Отже, найбільший кут φ між повною реакцією шорсткої поверхні, побудованою на граничній силі тертя при даній нормальній реакції, і напрямком нормальної реакції називають кутом тертя.

Як впливає з рисунка 1.63, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N}$. Але, відповідно до закону

Кулона, маємо $F_{\max} = f \cdot N$, тому

$$\operatorname{tg} \varphi = f .$$

Отже, тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.

Конусом тертя (див. рис. 1.63) називається конічна поверхня з кутом 2φ при вершині, яку описує при повороті навколо напрямку нормалі повна реакція шорсткої поверхні, побудована на максимальній силі тертя.

Поняття кута тертя, конуса тертя дозволяє дати геометричну інтерпретацію стану рівноваги тіла на шорсткій поверхні.

Нехай рівнодіюча \bar{Q} активних сил, прикладених до тіла, розміщеного на шорсткій поверхні (рис. 1.64), нахилена під кутом α до спільної нормалі стичних поверхонь. Розкладемо цю рівнодіючу на складові $\bar{Q} = \bar{Q}_n + \bar{Q}_\tau$ так, що $Q_n = Q \cos \alpha$, а $Q_\tau = Q \sin \alpha$.

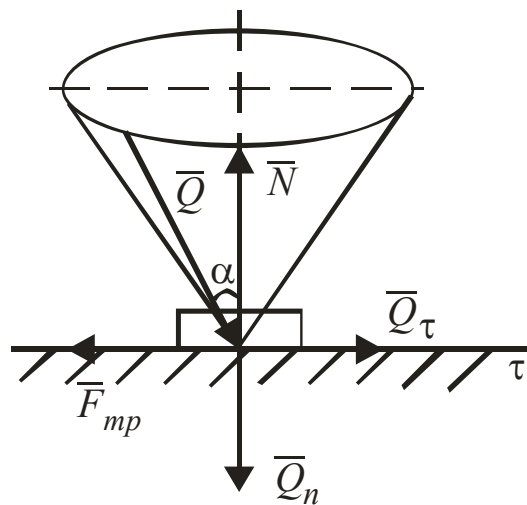


Рисунок 1.64

Нормальна складова \bar{Q}_n притискує тіло до поверхні в'язі і врівноважується нормальною реакцією \bar{N} , а дотична складова \bar{Q}_τ намагається зрушити тіло по поверхні.

Тіло на шорсткій поверхні буде знаходитись у стані рівноваги до тих пір, поки дотична складова $Q_\tau = Q \sin \alpha$ не буде перевищувати максимально можливу силу тертя $F_{\max} = f \cdot N = f \cdot Q \cos \alpha$, тобто за умов $Q \sin \alpha \leq f \cdot Q \cos \alpha$.

Розділяючи обидві частини нерівності на $Q \cos \alpha$ з врахуванням виразу (1.40), одержимо таку необхідну умову рівноваги тіла на шорсткій поверхні:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi, \text{ або } \alpha \leq \varphi.$$

До цієї умови не входить значення сили Q , тому слід висновити (див. рис. 1.64): *тіло на шорсткій поверхні не можна вивести зі стану рівноваги ніякою силою, якщо її лінія дії проходить всередині кута (конуса) тертя.*

Цим пояснюються відомі явища самогальмування або заклинювання рухомих деталей машин у деяких положеннях. Виходячи з цієї умови, назначають крок різі гвинта (гайки) нарізних з'єднань та передач.

1.2.4.3 Тертя кочення

У задачах механіки іноді необхідно враховувати тертя кочення – опір, який виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого.

Розглянемо циліндричний коток радіуса r вагою \bar{P} , який спирається на горизонтальну площину і знаходиться під дією горизонтальної сили \bar{Q} (рис. 1.65).

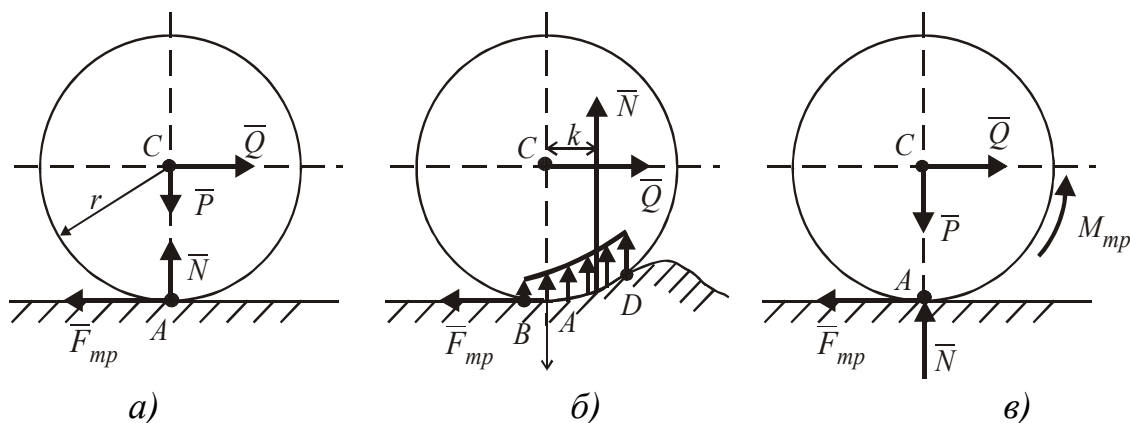


Рисунок 1.65

Якщо $Q < F_{\max}$, то в точці A контакту тіла з поверхнею виникає сила тертя $F_{mp} = Q$, яка перешкоджає ковзанню котка поверхнею.

При схемі навантаження котка, виконаній відповідно до положення теоретичної механіки про абсолютно тверде тіло (рис. 1.65, а), нормальна реакція \bar{N} , прикладена в точці A контакту, зрівноважена силою \bar{P} ваги котка, а сили F_{mp} і Q створюють пару сил, яка спричиняє кочення. При

такій розрахунковій схемі коток почне рухатися при будь-якому малому значенні сили \bar{Q} , що не відповідає дійсності.

Істинне уявлення про тертя кочення надає розрахункова схема з врахуванням деформації опорної поверхні і котка (рис. 1.65, б), коли дотик котка до нерухомої площини відбувається не в точці A , а вздовж дуги BD , яка визначає поверхню контакту. При цьому нормальна реакція \bar{N} , як результуюча розподілених на ділянці AB сил нормальних реакцій, буде зміщеною від центра в напрямку дії сили \bar{Q} на деяку відстань, яка збільшується зі збільшенням величини рушійної сили \bar{Q} . При цьому пара сил (\bar{Q}, \bar{F}_{mp}) врівноважується парою (\bar{P}, \bar{N}) , момент якої називають моментом тертя кочення M_{mp} .

У граничному стані рівноваги, коли нормальна реакція зміщується на найбільшу відстань k (див. рис. 1.65, б), момент тертя сягає максимальної величини M_{max} , і коток починає котитись поверхнею.

Це найбільше зміщення k нормальної реакції від центра котка в напрямку дії рушійної сили, при якому коток починає кочення, **називається коефіцієнтом тертя кочення**. Він має розмірність одиниці довжини і його виражають у міліметрах. Для випадку кочення вагонного колеса сталюю рейкою $k = 0,5$ мм.

Для уявлення явища тертя кочення у межах статичної абсолютно твердого тіла розрахункова схема виконується без розгляду деформації та зміщення нормальної реакції (рис. 1.65, в), вважаючи опором коченню момент тертя M_{mp} . Це дозволяє наблизити закони тертя кочення викласти подібно законам тертя ковзання:

1) При намірі перекотити циліндричне тіло шорсткою поверхнею виникає опір коченню у вигляді моменту тертя M_{mp} , величина якого набуває значення у межах від нуля до максимального, коли починається кочення:

$$0 \leq M_{mp} \leq M_{max}.$$

2) Найбільший момент M_{max} у широких межах не залежить від радіуса котка.

3) Максимальний момент тертя кочення пропорційний силі нормального тиску

$$M_{max} = k \cdot N. \quad (1.43)$$

де k – коефіцієнт тертя кочення.

4) Коефіцієнт тертя кочення залежить від матеріалу котка, площини і фізичного стану їх поверхонь.

Для аналізування явищ тертя корисно порівняти коефіцієнт f тертя ковзання зі співвідношенням $\frac{k}{r}$, через яке виражається максимальна сила тертя кочення:

$$F_{\max} = Q_{\max} = \frac{k}{r} \cdot N.$$

Для більшості матеріалів відношення $\frac{k}{r}$ значно менше статичного коефіцієнта тертя f . Цим пояснюється широке застосування в техніці явища кочення в транспортних засобах та інших конструкціях (колеса, котки, шарикопідшипники).

1.2.4.4 Розв'язання задач рівноваги тіла на шорсткій поверхні

Розв'язання задач рівноваги тіла за наявності тертя проводять у відповідності до загальної методики розв'язання задач статички (див. підпункт 1.2.1.6). При цьому реакцію шорсткої поверхні представляють двома складовими: нормальною реакцією \bar{N} та силою \bar{F}_{mp} . У випадку тертя кочення до цих реакцій додають пару сил з моментом тертя M_{mp} , дія якої перешкоджає коченню.

Розглядаючи граничний стан рівноваги тіла, коли сила тертя або момент тертя сягають свого найбільшого значення, до складених рівнянь рівноваги тіла додають залежність сил тертя (1.42) або моменту тертя (1.43) від нормальної реакції.

При геометричному розв'язанні реакцію шорсткої поверхні не розкладають на дві складові, а зображають однією силою \bar{R} , направляючи її під кутом тертя φ до нормалі (у граничному положенні рівноваги).

Приклад 1. Горизонтальний стрижень AB має на кінці A отвір, яким він надітий на вертикальний круглий стояк (рис. 1.66); довжина втулки $b = 2$ см; у точці E на відстані a від осі стояка до стрижня підвішений вантаж P .

Визначити, нехтуючи вагою стрижня AB , відстань a так, щоб під дією вантажу P стрижень знаходився в стані рівноваги, якщо коефіцієнт тертя між стрижнем і стояком $f = 0,1$.

Розв'язання

Розглянемо граничне положення рівноваги стрижня AB , коли вантаж P знаходиться на відстані a від осі стояка.

У цьому положенні на стрижень діють активна сила ваги вантажу \bar{P} та реакції $\bar{N}_C, \bar{N}_D, \bar{F}_C, \bar{F}_D$ шорсткої поверхні в точках C і D контакту втулки зі стояком, де \bar{F}_C, \bar{F}_D – граничні сили тертя.

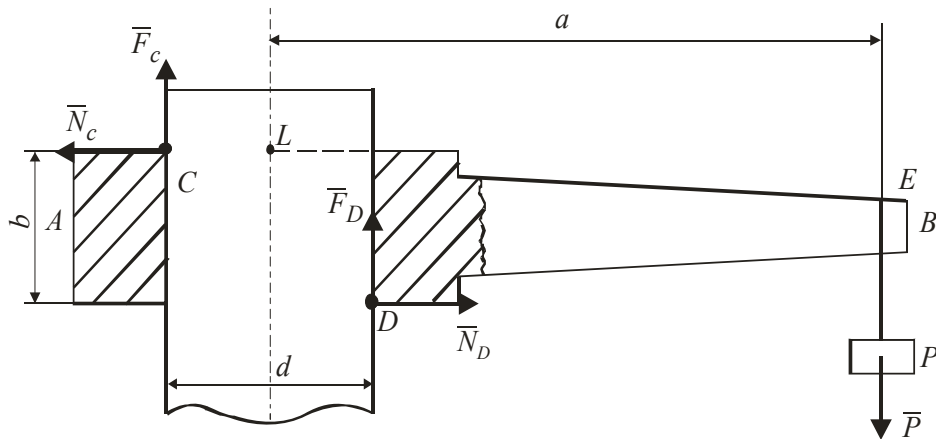


Рисунок 1.66

Складаючи рівняння рівноваги, візьмемо за моментну точку L , розміщену на осі стояка діаметром d на рівні верхнього торця втулки:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & -N_C + N_D &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; & F_C + F_D - P &= 0; \\ \sum M_L(\bar{F}_k) &= 0; & N_D \cdot b + (F_D - F_C) \frac{d}{2} - P \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

Додамо до цих рівнянь залежність граничних сил тертя від нормальних реакцій:

$$F_C = f \cdot N_C; \quad F_D = f \cdot N_D.$$

Із першого рівняння з врахуванням виразів для сил тертя знаходимо:

$$N_C = N_D = N \quad \text{і} \quad F_C = F_D = f \cdot N.$$

Із другого рівняння маємо: $2 \cdot f \cdot N - P = 0$, або $N = \frac{P}{2 \cdot f}$.

Тоді підставляючи ці значення в третє рівняння, одержимо:

$$N \cdot b - P \cdot a = 0, \quad \text{або} \quad P \left(\frac{b}{2 \cdot f} - a \right) = 0,$$

звідки

$$a = \frac{b}{2 \cdot f} = \frac{2}{2 \cdot 0,1} = 10 \text{ см.}$$

Приклад 2. Драбина AB вагою $P = 200 \text{ Н}$ спирається на вертикальну стіну і горизонтальну підлогу (рис. 1.67). Коефіцієнт тертя драбини по шорсткій поверхні стіни в точці A буде $f_1 = 0,4$, а по підлозі в точці B – $f_2 = 0,5$. Під яким кутом α до підлоги треба поставити драбину, щоб нею змогла піднятись доверху людина вагою 90 Н ?

Розв'язання

Нормальні реакції стіни і підлоги в точках A і B позначимо відповідно \bar{N}_A та \bar{N}_B , а сили тертя в цих точках \bar{F}_1 і \bar{F}_2 . Тоді драбина AB буде в рівновазі під дією шести сил: \bar{N}_A , \bar{N}_B , \bar{F}_1 , \bar{F}_2 та сили \bar{P} ваги драбини, прикладеної посередні AB і сили \bar{Q} ваги людини, прикладеної в точці A .

Складемо рівняння рівноваги цих сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad N_A - F_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_B + F_1 - P - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad N_B \cdot AB \cos \alpha - P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha - F_2 \cdot AB \sin \alpha = 0.$$

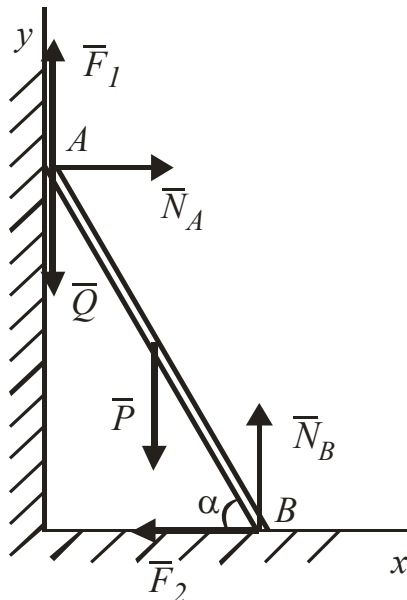


Рисунок 1.67

Оскільки кут α – найменший кут нахилу драбини, при якому вона знаходиться на межі спокою і ковзання, тоді

$$F_1 = f_1 \cdot N_A; F_2 = f_2 \cdot N_B.$$

Підставивши F_1 і F_2 в рівняння рівноваги, одержимо:

$$\begin{aligned} N_A - f_2 \cdot N_B &= 0, \\ N_B + f_1 \cdot N_A - P - Q &= 0, \\ (N_B \cos \alpha - 0,5 P \cos \alpha - f_2 N_B \cdot \sin \alpha) AB &= 0. \end{aligned}$$

З перших двох рівнянь одержимо $N_A = f_2 \cdot N_B$, звідки

$$N_B (1 + f_1 f_2) = (P + Q), \text{ або } N_B = \frac{P + Q}{1 + f_1 f_2}.$$

Підставимо знайдене значення N_B у третє рівняння і поділимо його на $\cos \alpha$. Тоді матимемо:

$$\frac{P + Q}{1 + f_1 f_2} - 0,5 P = \frac{f_2}{1 + f_1 f_2} (P + Q) \operatorname{tg} \alpha, \text{ звідки}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{f_2} \left[1 - \frac{0,5 P (1 + f_1 f_2)}{P + Q} \right] = \frac{1}{0,5} \left[1 - \frac{0,5 \cdot 200 (1 + 0,4 \cdot 0,5)}{200 + 690} \right] = 1,73,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1,73 = 60^\circ.$$

Приклад 3. Скільки сипкого матеріалу (руди) можна насипати на круглу площинку діаметром $d = 20$ м, якщо питома вага матеріалу становить $\gamma = 50$ кН/м³, а коефіцієнт тертя між частинками – $f = 0,7$?

Розв'язання

Сипкий матеріал на горизонтальній площині набуває форми конуса. Розглянемо рівновагу деякої частини M (рис. 1.68, а) матеріалу, що лежить на поверхні конуса, знаходячись під дією сили ваги \bar{G} , нормальної реакції \bar{N} та сили тертя \bar{F}_{mp} . Трикутник зрівноваження сил, які діють на частинку матеріалу (рис. 1.68, б), повинен бути замкнутим, тому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{mp}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

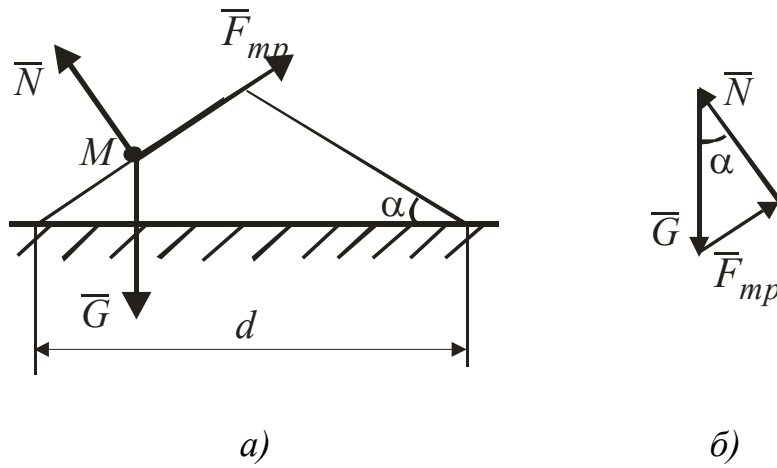


Рисунок 1.68

Тоді об'єм конуса, створеного сипким матеріалом,

$$V = \frac{1}{12} \pi d^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 \cdot \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{24} \pi d^3 f,$$

а вага сипкого матеріалу

$$P = \gamma \cdot V = \frac{1}{24} \pi \gamma d^3 f = \frac{1}{24} \pi \cdot 50 \cdot 20^3 \cdot 0,7 = 36633,3 \text{ кН}.$$

Приклад 4. Визначити, при яких значеннях кута α нахилу площини до горизонталі циліндр радіуса R , розміщений на похилій площині, залишиться в стані рівноваги, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f , а тертя кочення k (рис. 1.69).

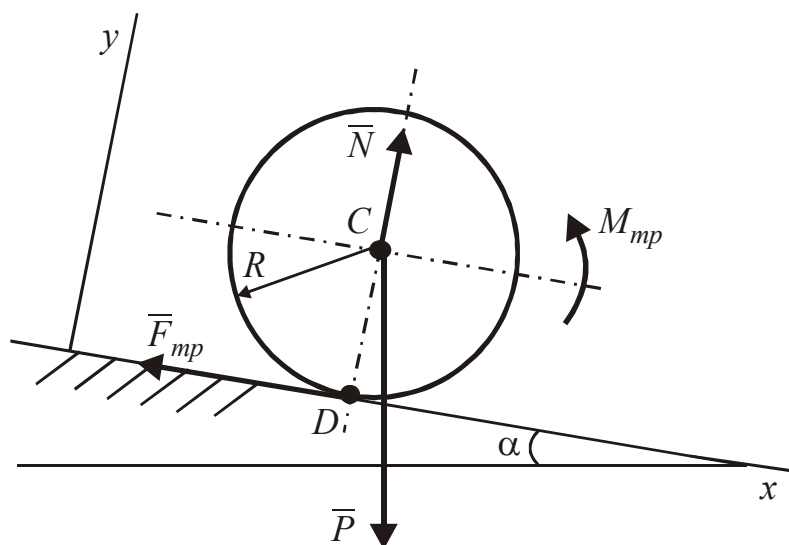


Рисунок 1.69

Розв'язання

Розглянемо граничне положення рівноваги котка, коли на нього діють сила ваги \bar{P} , нормальна реакція \bar{N} , сила тертя \bar{F}_{mp} і момент тертя M_{mp} . Складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; P \sin \alpha - F_{mp} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; N - P \cos \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) &= 0; M_{mp} - P \sin \alpha \cdot R = 0.\end{aligned}$$

Крім цього, для виключення ковзання циліндра та його кочення повинні виконуватись нерівності:

$$F_{mp} \leq fN; M_{mp} \leq kN.$$

З рівнянь рівноваги визначаємо:

$$F_{mp} = P \sin \alpha; N = P \cos \alpha; M_{mp} = P \sin \alpha R.$$

Підставивши ці величини в нерівності, одержимо:

$$P \sin \alpha \leq f P \cos \alpha; P \sin \alpha \cdot R \leq k P \cos \alpha, \text{ або } \operatorname{tg} \alpha \leq f, \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{R}.$$

Для збереження рівноваги циліндра ці дві нерівності повинні виконуватись одночасно.

1.3 Динаміка

1.3.1 Динаміка матеріальної точки. Динаміка відносного руху

1.3.1.1 Введення в динаміку. Закони динаміки

У динаміці при вивченні руху тіл беруться до уваги діючі на них сили і інертність самих тіл.

У цьому розділі застосовуються всі поняття і визначення, які були сформульовані в статиці і кінематиці. Однак, на відміну від статики, в задачах динаміки поряд з постійними силами зустрічаються і сили змінні, модулі та напрямки яких при русі тіла змінюються. Змінні сили можуть певним чином залежати від часу, положення тіла, його швидкості.

Кількісною мірою інертності тіла є його маса. Інертна маса m в класичній механіці вважається величиною постійною, яка залежить тільки від самої матеріальної точки і не залежить від характеристик її руху, тобто швидкості і прискорення. Маса також не залежить від природи сили, прикладеного до точки.

В основі динаміки лежать закони класичної механіки (закони Ньютона). Ці закони були сформульовані як закони руху у відношенні до деякої абсолютно нерухомої системи відліку (інерціальної системи).

Перший закон (закон інерції)

Матеріальна точка, ізольована від дії інших матеріальних тіл, зберігає відносно нерухомої системи відліку стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.

Перший закон свідчить про необхідність застосування до точки деякої сили для зміни її швидкості, постулює існування інерційних систем відліку, які не мають прискорення.

Другий закон (основний закон динаміки)

Прискорення матеріальної точки відносно системи відліку пропорційно діючій на точку силі і направлено у напрямку цієї сили.

Якщо \vec{F} – це прикладена до точки сила і \vec{a} – її прискорення щодо системи відліку $Oxyz$ (рис. 1.70), то основний закон можна виразити у формі

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1.44)$$

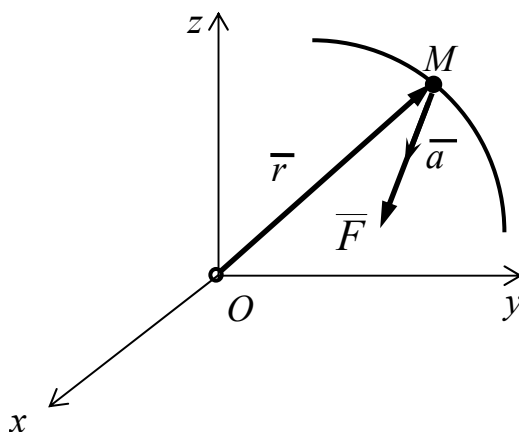


Рисунок 1.70

Позитивний коефіцієнт пропорційності m , що характеризує інертні властивості матеріальної точки, називається **інертною масою точки**. З цього закону шляхом математичних перетворень одержують всі подані в динаміці залежності, теореми, рівняння.

Третій закон (закон рівності дії і протидії)

Дві матеріальні точки взаємодіють між собою з силами, які дорівнюють за величиною і спрямовані в протилежні боки вздовж прямої, що з'єднує ці точки.

З цих законів випливають два важливих принципи:

- **принцип незалежності дії сил**, згідно з яким при одночасній дії декількох сил точка отримує таке саме прискорення, яке вона отримала б під дією однієї сили, яка дорівнює геометричній сумі цих сил, тобто основний закон динаміки може бути записаний у вигляді

$$m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F}_k ; \quad (1.45)$$

- **принцип відносності класичної механіки**, який стверджує, що всі механічні явища протікають однаково в різних системах координат, які рухаються поступально, рівномірно, прямолінійно, і всі закони механіки однакові в таких інерційних системах відліку.

1.3.1.2 Диференціальні рівняння руху точки

Використовуючи основний закон динаміки (1.44), (1.45), можна вивести диференціальні рівняння руху матеріальної точки в різних системах відліку, застосовуючи для визначення прискорення точки формули кінематики.

Як відомо із кінематики, прискорення точки $\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{V}}{dt}$.

Тоді диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі запишеться так:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}, \quad (1.46)$$

або

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Якщо вибрати декартові осі x, y, z системи відліку і спроектувати на них рівняння (1.46), отримаємо диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x ; m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y ; m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z ;$$

або

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x; \quad m \frac{dV_y}{dt} = F_y; \quad m \frac{dV_z}{dt} = F_z.$$

У проєкціях на натуральні осі (дотичну τ , головну нормаль n , бінормаль b) диференціальні рівняння руху точки мають вигляд

$$ma_\tau = F_\tau; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b,$$

або

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau; \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b.$$

Якщо рух точки обмежений накладеними на неї в'язями, то на підставі принципу звільнення від в'язей точку можна перетворити на вільну, подумки відкинувши в'язі її замінивши їх дію реакціями. Тоді на точку крім активних сил з рівнодіючою \bar{F} буде діяти рівнодіюча реакцій в'язей \bar{N} , і основне рівняння динаміки точки запишеться у вигляді

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}.$$

Відповідно до цього зміняться і диференціальні рівняння руху точки у векторній формі запису, у проєкціях на осі декартових координат та натуральні осі.

1.3.1.3 Дві задачі динаміки і методи їх розв'язання

У диференціальних рівняннях руху точки невідомі можуть перебувати як в лівій, так і в правій частині. Залежно від цього розрізняють задачі динаміки двох типів.

Перша задача динаміки. *Знаючи масу точки і закон її руху, знайти рівнодійну прикладених до точки сил*

Задача вирішується шляхом диференціювання закону руху в рівняннях (3.3) або (3.4').

Так, нехай рух вільної точки маси m заданий у координатній формі:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Використовуючи диференціальні рівняння (1.41), отримуємо:

$$F_x = m\ddot{x}; \quad F_y = m\ddot{y}; \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Звідси модуль і напрямок рівнодійної знайдуться за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F_l}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F_l}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F_l}.$$

Приклад. Визначити силу, що діє на точку маси m , закон руху якої заданий рівняннями: $x = at^2$, $y = bt$.

Розв'язання

Виключивши з цих рівнянь час, знайдемо траєкторію точки $x = \frac{a}{b^2} y^2$, тобто траєкторією є гілка параболи, розташована в першій чверті координатної площини. На підставі рівнянь (1.41) знайдемо $F_x = m\ddot{x} = 2ma$; $F_y = m\ddot{y} = 0$; $F_z = 0$, тобто $F = F_x = 2ma$. Отже, точка описуватиме параболу під дією постійної сили, паралельної осі параболи.

Друга задача динаміки. Знаючи масу точки та прикладені до неї сили, її початкове положення точки і початкову швидкість, необхідно знайти закон руху, кінематичні характеристики.

Задачу вирішують шляхом інтегрування диференціальних рівнянь, складених у проєкціях на осі вибраної системи координат з додаванням початкових умов. Для правильного складання диференціальних рівнянь зображують розрахункову схему передбачуваної траєкторії, на якій розміщують матеріальну точку з доданими силами.

1.3.1.4 Диференціальні рівняння гармонійних коливань

Розглянемо задачу про рух вантажу маси m , підвішеного на вертикально розташованій пружині жорсткості c . Масою пружини нехтуємо.

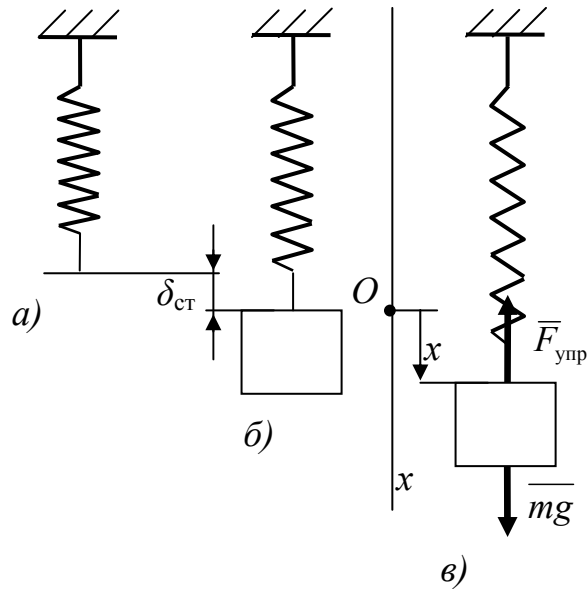
У положенні рівноваги (рис. 1.71, б) виконується рівність $\overline{mg} + \overline{F}_{\text{упр}} = 0$, де $F_{\text{упр}} = c \cdot \delta_{\text{ст}}$ – сила пружності пружини в цьому положенні.

Проєктуючи на вісь x , отримуємо:

$$mg - c \cdot \delta_{\text{ст}} = 0.$$

Звідси статичне подовження пружини

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}. \quad (1.47)$$



*a – недеформована пружина без вантажу;
 б – вантаж на пружині в положенні рівноваги;
 в – вантаж на пружині в довільний момент його руху*
 Рисунок 1.71

Диференціальне рівняння руху вантажу уздовж осі x , початок якої вибраний в положенні статичної рівноваги:

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}}.$$

При русі вантажу, коли сила пружності $F_{\text{упр}} = c \cdot (\delta_{\text{ст}} + x)$, де x – поточна координата вантажу в довільний момент його руху, отримаємо:

$$m\ddot{x} = mg - c \cdot (\delta_{\text{ст}} + x).$$

Звідси з врахуванням (1.47) маємо:

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Перенесемо cx вліво і розділимо на m :

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$.

Рішення цього диференціального рівняння має вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.48)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Якщо в початковий момент часу вантаж виведений з положення рівноваги наданням йому початкової швидкості V_0 , то при $t=0$ $V_0 = \dot{x}_0$, $x_0=0$. Визначивши за (1.48) залежність швидкості точки від часу

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \quad (1.49)$$

і підставивши в рівняння (1.48) і (1.49) початкові умови, знайдемо значення сталих інтегрування:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \quad (1.50)$$

Якщо замість сталих інтегрування C_1 і C_2 ввести нові сталі A і α , виразивши $C_1 = A \sin \alpha$, $C_2 = A \cos \alpha$, то рішення рівняння (1.50) можна подати в іншій, т.з. *амплітудній* формі:

$$x = A \sin(kt + \alpha). \quad (1.51)$$

Коливання, що здійснюються точкою згідно з законом (1.51), називаються гармонійними коливаннями. Графік таких коливань наведений на рисунку 1.72.

Величина A , що дорівнює найбільшому відхиленню точки від положення рівноваги (від точки O), яка досягається за умови $\sin(kt + \alpha) = 1$, називається *амплітудою гармонійних коливань*. Величина $(kt + \alpha)$, що стоїть під знаком синуса в рівнянні (1.51), називається *фазою коливань*, а друга довільна постійна α – початковою фазою. Величина $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ називається *круговою частотою* і визначає кількість коливань за час, який дорівнює 2π секундам.

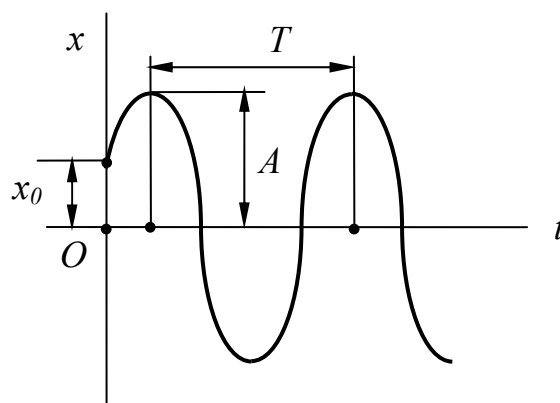


Рисунок 1.72

Довільні постійні A і α , як і C_1 та C_2 , знаходяться за початковими умовами. Для їх визначення виразимо A і α через C_1 і C_2 :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}, \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{A}$$

Період гармонійних коливань T – це проміжок часу, впродовж якого точка здійснює одно повне коливання. По закінченню періоду фаза коливань змінюється на 2π , отже

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Аналізування наведених формул дозволяє встановити, що амплітуда A і початкова фаза α залежать від початкових умов, а період коливань T не залежить від них. Незалежність періоду коливань від початкових умов називається *ізохронністю*, а рух з таким періодом – *ізохронним*.

1.3.1.5 Приклади розв'язання другої задачі динаміки точки

Розв'язання другої (основної) задачі динаміки матеріальної точки треба виконувати в такій послідовності:

- 1) вибрати систему координат, початок якої встановити або в початковому положенні точки, або в положенні її статичної рівноваги;
- 2) записати початкові умови руху точки;
- 3) зобразити на рисунку розрахункову схему, змістивши точку відносно початку координат у бік додатного напрямку осей координат;
- 4) показати на рисунку прикладені до точки активні сили і реакції в'язей;
- 5) скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки;
- 6) інтегрувати систему диференціальних рівнянь руху матеріальної точки;
- 7) виразити постійні інтегрування через початкові умови та з одержаного рівняння руху визначити пошукові величини.

Приклад 1. Визначити дальність польоту снаряда, випущеного із ствола гармати зі швидкістю \bar{V}_0 під кутом α до горизонту (рис. 1.73). Опором повітря знехтувати.

Розв'язання

Сумістимо початок координат з гарматою, направивши вісь Oy вертикально вгору, а вісь Ox горизонтально в площині, де розміщені вісь

Оу та вектор початкової швидкості снаряда \vec{V}_0 (див. рис. 1.73). Одержимо такі початкові умови: при $t=0$ $x_0=0, y_0=0, V_{x_0} = V_0 \cos \alpha, V_{y_0} = V_0 \sin \alpha$.

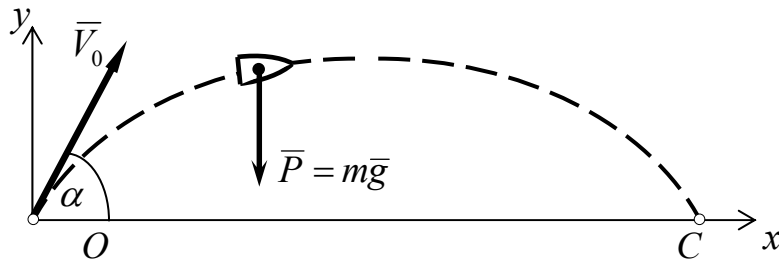


Рисунок 1.73

Складемо диференціальне рівняння руху снаряда масою m під дією постійної сил ваги $\vec{P} = m\vec{g}$:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0;$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -mg.$$

Звідси одержимо: $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = 0$, або $V_x = C_1$; $\ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = -g$, або $V_y = -gt + C_2$. Із початкових умов ($t=0, V_{x_0} = V_0 \cos \alpha, V_{y_0} = V_0 \sin \alpha$) знаходимо постійні інтегрування $C_1 = V_0 \cos \alpha$, та $C_2 = V_0 \sin \alpha$. Підставимо ці значення в знайдені раніше рішення, прийдемо до рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = V_x = V_0 \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, одержуємо:

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha + C_3; \quad y = V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_4.$$

Підставляючи сюди початкові умови ($t=0, x_0=0, y_0=0$), знаходимо, що $C_3=0$ та $C_4=0$, тому рівняння руху снаряда набувають вигляду

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha; \quad y = V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Для визначення дальності польоту снаряда (відстань OC), покладемо в рівняння руху значення координати $y=0$. Тоді час польоту снаряда визначиться залежністю $T = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha$, а дальність польоту становитиме

$$L = OC = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

Приклад 2. Тіло масою m , що приймається за матеріальну точку, починає рух по гладкій горизонтальній прямій зі стану спокою під дією сили \bar{F} , що спрямована по тій самій прямій і змінюється згідно із законом $F = mg \cdot \sin kt$, де k – постійна величина. Знайти закон руху тіла.

Розв'язання

Направимо вісь Ox уздовж прямої, по якій рухається тіло, вибравши початок відліку в початковому положенні тіла (рис. 1.74). При цьому початкові умови руху набудуть найбільш простого вигляду, а саме: $t = 0$, $x_0=0$, і $\dot{x}_0 = 0$.

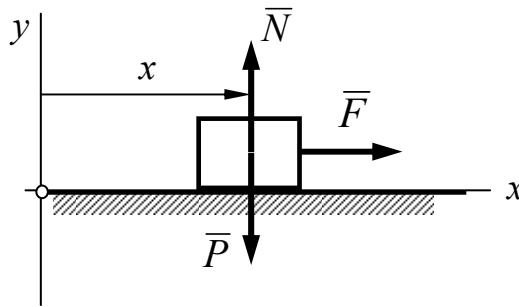


Рисунок 1.74

Зобразимо тіло в зміщеному відносно початку відліку положенні разом з силами (активними $\bar{P} = m\bar{g}$, \bar{F} і нормальною реакцією \bar{N}), що діють на нього. Диференціальне рівняння руху в проекції на вісь Ox запишеться так: $m\ddot{x} = F = mg \cdot \sin kt$.

Враховуючи, що $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV}{dt}$, одержимо $\frac{dV}{dt} = g \cdot \sin kt$, або після розподілу змінних матимемо: $dV = g \sin kt \cdot dt$.

Інтегруючи, отримаємо: $V = -\frac{g}{k} \cos kt + C_1$. З урахуванням початкових умов знайдемо C_1 : при $t=0$ $\dot{x}_0 = V_0 = 0$, звідки $C_1 = \frac{g}{k}$. Тоді

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} - \frac{g}{k} \cos kt.$$

Розподіляємо змінні і інтегруємо, що дає $x = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2} \sin kt + C_2$. За початковими умовами ($t = 0, x_0 = 0$) знаходимо $C_2 = 0$, і остаточно

$$x = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2} \sin kt .$$

З одержаного результату випливає, що при заданих початкових умовах на рівномірний рух тіла зі швидкістю $\frac{g}{k}$ накладається коливання з амплітудою $A = \frac{g}{k^2}$ та частотою k зміни сили F .

Приклад 3. Парашутист, здійснюючи вертикальний спуск з висоти H , в момент розкриття парашута мав швидкість V_0 . Визначити швидкість парашутиста в момент його приземлення, якщо сила опору повітря руху парашутиста під час спуску $R = kmV^2$, де m – маса парашутиста, V – його швидкість, k – постійний коефіцієнт. Рух парашутиста розглядати як рух матеріальної точки.

Розв'язання

Направимо вісь Ox вертикально вниз, вибравши початок відліку на осі в місці розкриття парашута (рис. 1.75). Запишемо початкові умови руху: при $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = V_0$. Покажемо матеріальну точку під час руху на відстані x від початкового положення. Зобразимо прикладені до парашутиста сили: його вагу $\bar{P} = m\bar{g}$ та силу опору \bar{R} , направлену протилежно напрямку руху, тобто вертикально вгору.

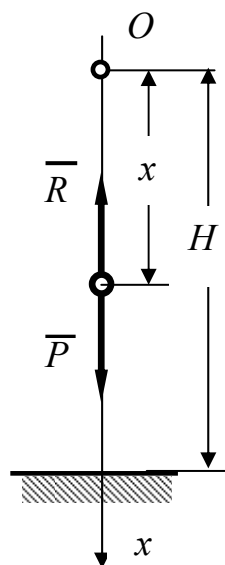


Рисунок 1.75

Складемо диференціальне рівняння руху в проєкції на вісь Ox :

$$m\ddot{x} = P - R = mg - kmV^2.$$

Скорочуючи на m і враховуючи, що $\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{V \cdot dV}{dx}$,

матимемо:
$$\frac{V \cdot dV}{dx} = -k \cdot \left(V^2 - \frac{g}{k} \right).$$

Після розподілу змінних та інтегрування одержимо:

$$\int \frac{2 \cdot dV}{(V^2 - g/k)} = -2k \cdot \int dx, \text{ або } \ln(V^2 - g/k) = -2kx + C_1.$$

З урахуванням початкових умов $t=0$, $\dot{x}_0 = V_0 = 0$ визначимо, що $C_1 = \ln(V_0^2 - g/k)$. Тоді $\ln(V^2 - g/k) = -2kx + \ln(V_0^2 - g/k)$, звідки $\ln(V^2 - g/k) - \ln(V_0^2 - g/k) = -2kx$.

Звідси $\ln \frac{(V^2 - g/k)}{(V_0^2 - g/k)} = -2kx$, та $\frac{(V^2 - g/k)}{(V_0^2 - g/k)} = e^{-2kx}$.

У результаті знаходимо $V = \sqrt{\frac{g}{k} + \left(V_0^2 - \frac{g}{k} \right) \cdot e^{-2kx}}$. Підставивши сюди значення $x = H$ визначимо, що в момент приземлення швидкість парашутиста становитиме $V_1 = \sqrt{\frac{g}{k} + \left(V_0^2 - \frac{g}{k} \right) \cdot e^{-2kH}}$.

Визначимо величину, до якої наближається швидкість парашутиста, який здійснює тривалий спуск з великої висоти, тобто обчислимо межу швидкості $V = \dot{x}$ при $x \rightarrow \infty$. Для цього, враховуючи, що $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2kx} = 0$,

одержимо: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2kx} = 0$, $V_{\max} = \lim_{x \rightarrow \infty} \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{k}}$, тобто при тривалому спуску рух наближається до рівномірного зі швидкістю, не залежною від початкових умов руху.

1.3.2 Введення в динаміку механічної системи. Геометрія мас

1.3.2.1 Основні поняття і визначення

Механічна система – це така сукупність матеріальних точок, положення і рух кожної з яких залежить від положення і руху всіх інших.

Зокрема, будь-яке матеріальне тіло можна розглядати як механічну систему, утворену безперервною сукупністю матеріальних точок.

Сили, що діють на механічну систему, поділяють на **зовнішні** \bar{F}_k^e і **внутрішні** \bar{F}_k^i (індекси e і i від латинських exterior – зовнішній і interior – внутрішній).

Зовнішніми називаються сили, що діють на матеріальні точки (тіла) механічної системи з боку точок (тіл), котрі належать до розглянутої механічної системи; *внутрішніми* називаються сили, які діють на точки механічної системи з боку інших матеріальних точок розглядуваної механічної системи.

Так, якщо розглядається механічна система, утворена Землею і Місяцем, то сили тяжіння цих двох тіл Сонцем будуть зовнішніми для цієї системи, а сили взаємного тяжіння Землі і Місяця – внутрішніми.

Внутрішні сили мають такі властивості:

1. Геометрична сума (головний вектор) всіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю ($\sum \bar{F}_k^i = 0$).

2. Сума моментів (головний момент) всіх внутрішніх сил системи щодо будь-якого центра або осі дорівнює нулю ($\sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0$).

З цих властивостей, однак, не слід вважати, що внутрішні сили взаємно врівноважуються і не впливають на рух системи. Оскільки ці сили прикладені до різних матеріальних точок або тіл, то вони можуть викликати взаємні переміщення цих точок або тіл. Врівноваженою вся сукупність внутрішніх сил буде у системи, що являє собою абсолютно тверде тіло, або у незмінної системи, яка складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками.

Дія зовнішніх сил на систему враховується головним вектором зовнішніх сил $\bar{R}^e = \sum \bar{F}_k^e$, його проєкціями $R_x^e = \sum F_{kx}^e$; $R_y^e = \sum F_{ky}^e$; $R_z^e = \sum F_{kz}^e$ на осі координат, і головним моментом зовнішніх сил системи відносно центра $\bar{M}_O^e = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e)$ або відносно осі $\bar{M}_O^e = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e)$.

Мірою інертності механічної системи є її маса M , яка дорівнює сумі мас m_k точок системи: $M = \sum m_k$.

Для механічної системи вводиться поняття центра мас системи.

Центр мас системи – це геометрична точка C , радіус-вектор \bar{r}_C якої визначається залежністю $\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_k \cdot m_k}{M}$. Тоді координати центра мас: $x_C = \frac{\sum x_k \cdot m_k}{M}$, $y_C = \frac{\sum y_k \cdot m_k}{M}$, $z_C = \frac{\sum z_k \cdot m_k}{M}$, де x_k, y_k, z_k – координати точок системи.

Для тіл малих розмірів, що знаходяться поблизу поверхні Землі, можна вважати, що центр мас співпадає з центром ваги механічної системи.

1.3.2.2 Моменти інерції

Рух механічної системи матеріальних точок залежить не лише від маси системи, але і від розподілу цієї маси. Так, з двох маховиків (крутнів) однакової маси (ваги) швидше розкрутиться при однакових розгінних силах маховик меншого діаметра.

Розподіл мас у механічній системі характеризується моментами інерції. Розрізняють такі моменти інерції:

- осьові J_x, J_y, J_z ;
- полярний J_O ;
- відцентрові J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} .

Осьовим моментом інерції називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас m_k точок системи на квадрати їх відстаней h_k до відповідної осі (рис. 1.76):

$$J_x = \sum m_k h_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

$$J_y = \sum m_k h_{ky}^2 = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2),$$

$$J_z = \sum m_k h_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

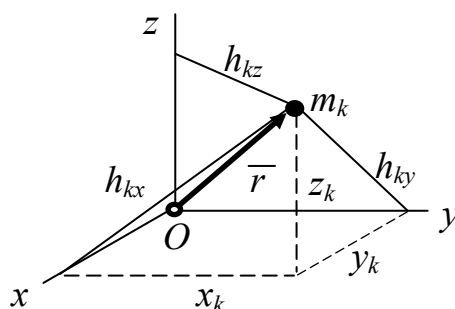


Рисунок 1.76

Полярний момент інерції дорівнює сумі творів маси кожної точки на квадрат її відстані до початку координат:

$$J_O = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$$

З цих виразів виходить, що

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O.$$

Відцентровий момент інерції дорівнює алгебраїчній сумі добутків маси кожної точки системи на добуток її відповідних координат:

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k; \quad J_{zx} = \sum m_k z_k x_k.$$

Якщо відцентрові моменти інерції відносно будь-якої системи координат дорівнюють нулю, то осі цієї системи називаються *головними осями інерції* на початку координат.

Якщо ж початок цієї системи координат збігається з центром мас, то такі осі називаються *головними центральними осями інерції*.

Головними осями інерції є:

- 1) вісь матеріальної симетрії системи матеріальних точок,
- 2) вісь, яка перпендикулярна площині матеріальної симетрії системи матеріальних точок і має початок у площині симетрії.

Момент інерції твердого тіла відносно заданої осі, наприклад осі Oz , можна подати як добуток маси M тіла та квадрату лінійної величини ρ_z , яку називають *радіусом інерції* тіла відносно цієї осі:

$$J_z = M \cdot \rho_z^2.$$

Радіус інерції ρ_z визначає відстань від осі Oz до тієї матеріальної точки, у якій треба зосередити всю масу M тіла, щоб момент інерції одержаної точки відносно даної осі дорівнював моменту інерції тіла.

Знайдемо залежність між моментами інерції тіла відносно паралельних осей z і z' , одна з яких, вісь z' , проходить через центр мас C тіла (рис. 1.77).

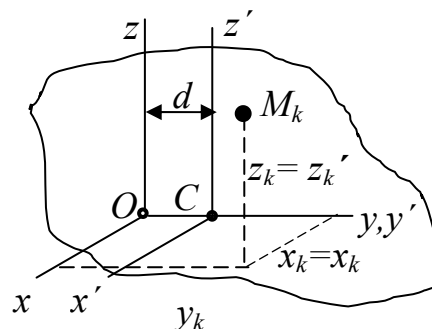


Рисунок 1.77

Проведемо інші осі так, як це показано на рисунку 1.77, і позначимо через d відстань між осями Oz та Cz' .

Момент інерції тіла відносно осі Cz' дорівнює $J_{Cz'} = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2)$, а відносно осі Oz відповідно $J_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$.

Підставивши в вираз для J_{Oz} значення $x_k = x_k'$ та $y_k = y_k' + d$, одержимо:

$$\begin{aligned} J_{Oz} &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = J_{Cz'} + Md^2 = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2 + 2y_k'd + d^2) = \\ &= \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + 2d \sum m_k y_k' + d^2 \sum m_k. \end{aligned}$$

Але тут $\sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) = J_{Cz'}$; $\sum m_k = M$; $\sum m_k y_k' = My_{C'} = 0$, тому що $y_{C'} = 0$.

Отже

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2.$$

Це рівняння відображає теорему Гюйгенса – Штейнера: момент інерції системи матеріальних точок відносно будь-якої осі дорівнює її моменту інерції відносно паралельної осі, проведеної через центр мас системи, складеному з добутком маси системи на квадрат відстані між цими осями.

Із теореми випливає, що момент інерції відносно паралельної осі, проведеної через центр мас системи, є найменшим із всіх моментів інерції відносно інших осей, паралельних даній.

1.3.2.3 Моменти інерції найпростіших однорідних тіл

1. Тонкий стрижень

Визначимо момент інерції тонкого однорідного стрижня відносно осі z , що проходить через нього (рис. 1.78).

На відстані x від осі z виділимо елемент стрижня довжиною Δx , маса якого $\Delta m = (M/l) \cdot \Delta x$, де M – маса стрижня. Тоді шуканий момент інерції стрижня становитиме $J_{Oz} = \sum \Delta m x^2 = \sum M/l \cdot \Delta x \cdot x^2$. Переходячи від суми до інтеграла за умови $\Delta x \rightarrow 0$, отримаємо:

$$J_{Oz} = \frac{M}{l} \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{Ml^2}{3}.$$

Момент інерції $J_{Cz'}$ відносно осі Cz' , що проходить через центр мас C , обчислимо, застосувавши теорему Гюйгенса – Штейнера:

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2,$$

звідки

$$J_{Cz'} = J_{Oz} - Md^2 = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}.$$

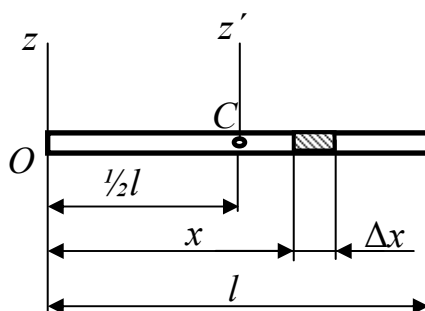


Рисунок 1.78

2. Тонкий обруч, кільце

Нехтуючи товщиною і шириною обруча масою M і радіуса R , визначимо його момент інерції щодо осі (рис. 1.79). Для цього розіб'ємо обруч на нескінченно малі елементи масою Δm , які знаходяться на відстані R від осі Cz . Тоді

$$J_{Cz} = \sum \Delta m \cdot R^2 = R^2 \sum \Delta m = MR^2.$$

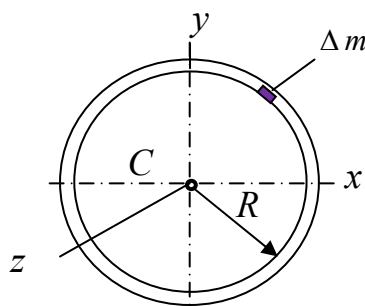


Рисунок 1.79

Оскільки товщиною обруча ми знехтували, то неважко бачити, що полярний момент інерції обруча щодо його центра $J_o = J_{Cz}$. Тому, скориставшись зв'язком між полярним і осьовими моментами інерції (3.20), отримаємо: $2J_o = J_x + J_y + J_z = 2J_x + J_z$.

Звідси

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{MR^2}{2}.$$

3. Тонкий круговий диск, прямий круговий циліндр радіусом R та масою M .

Виділимо в тонкому диску радіусом R (рис. 1.80, а) елементарне кільце радіусом r і шириною dr (рис. 1.80, б).

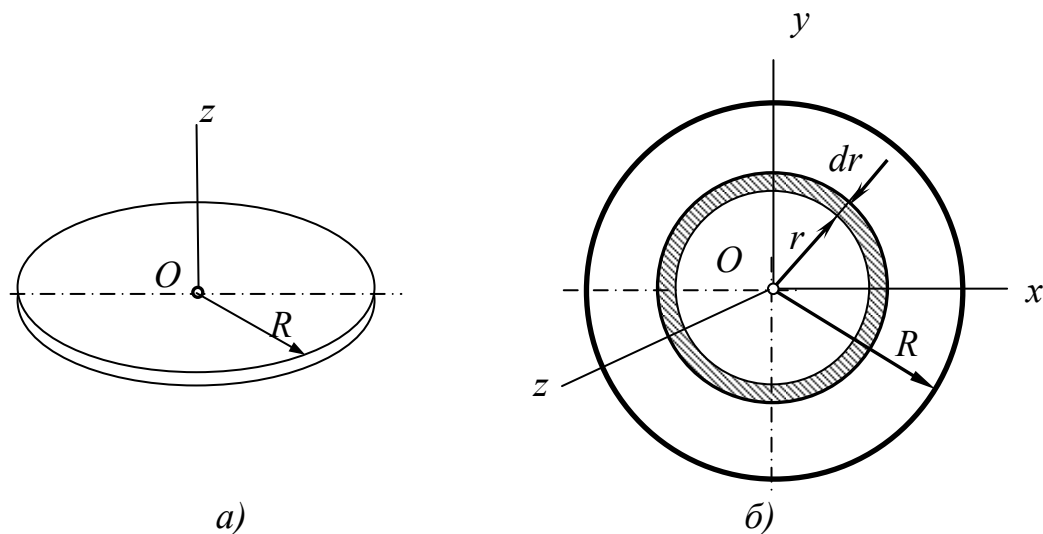


Рисунок 1.80

Його маса $dm = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi R \cdot dr$, а його момент інерції відносно осі Oz дорівнює:

$$dJ_z = dm \cdot r^2 = \frac{M}{R^2} \cdot 2r^3 \cdot dr.$$

Момент інерції диска відносно тієї самої осі знайдеться як сума моментів інерції всіх елементарних кілець, на які можна поділити диск:

$$J_z = \sum dJ_z = \sum \frac{M}{R^2} \cdot 2r^3 \cdot dr.$$

Переходячи до межі при $dr \rightarrow 0$, замінимо суму інтегралом і одержимо:

$$J_z = \int_0^R \frac{2M}{R^2} \cdot r^3 dr = \frac{2Mr^4}{R^2 \cdot 4} \Big|_0^R = \frac{MR^2}{2}.$$

Моменти інерції відносно осей Ox та Oy визначаються тим самим методом, що і для обруча, і дорівнюють:

$$J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{MR^2}{4}.$$

4. Круглий циліндр

Момент інерції прямого круглого однорідного циліндра відносно осі Oz дорівнює сумі моментів інерції dJ_z відносно тієї самої осі всіх елементарних дисків товщиною dz , на які поділяється циліндр (рис. 1.81).

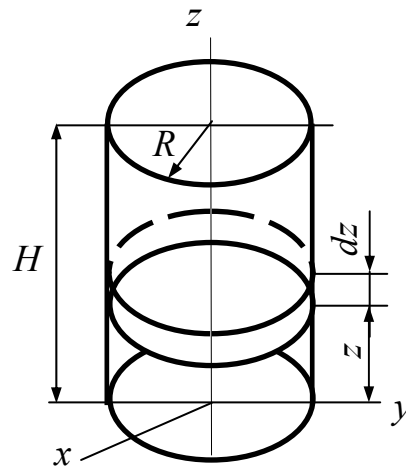


Рисунок 1.81

Маса кожного з цих дисків дорівнює $dm = \frac{M}{H} \cdot dz$, а його момент інерції $dJ_z = \frac{dm \cdot R^2}{2} = \frac{MR^2}{2H} \cdot dz$. Тоді момент інерції всього циліндра

$$J_z = \sum dJ_z = \sum \frac{MR^2}{2H} dz = \frac{MR^2}{2H} \sum dz = \frac{MR^2}{2},$$

де $\sum dz = H$ – висота циліндра.

1.3.2.4 Диференціальні рівняння руху механічної системи

Рух механічної системи, що складається з n матеріальних точок, описується системою рівнянь основного закону динаміки, складених для кожної k -тої точки з масою m_k :

$$m_k \cdot \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad (k=1,2,\dots,n)$$

де \bar{F}_k^e , \bar{F}_k^i – рівнодійні відповідно зовнішніх і внутрішніх сил, діючих на k -ту точку. Проектуючи ці рівності на декартові осі координат, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} m_k \cdot \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\ m_k \cdot \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i, \\ m_k \cdot \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{aligned} \right\} (k=1,2,\dots,n)$$

Ці $3n$ рівнянь є диференціальними рівняннями руху механічної системи матеріальних точок.

Проінтегрувавши цю систему рівнянь другого порядку і визначивши за початковими умовами довільні постійні, ми знайдемо рух кожної точки і, отже, рух системи в цілому.

1.3.3 Теорема про зміну кількості руху і про рух центра мас

При розв'язанні диференціальних рівнянь часто виникають труднощі, пов'язані з визначенням внутрішніх сил, знаходженням загального інтеграла механічної системи зі значною кількістю матеріальних точок

Разом з тим існує багато завдань динаміки, вирішення яких не вимагає повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи. До таких завдань відносяться, наприклад, задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи, і завдання, які потребують визначення кінематичних рівнянь руху не всіх матеріальних точок системи, а тільки центра мас або визначення заходів механічного руху системи (головного моменту кількості руху, кінетичної енергії). Такі завдання часто виникають в техніці. До ефективних методів вирішення цих завдань відносяться *загальні теореми динаміки*, що встановлюють співвідношення між заходами механічного руху системи матеріальних точок (або однієї матеріальної точки) і силами, що характеризують динамічний ефект дії навколишніх тіл на кожен матеріальну точку системи. Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух. При вирішенні динамічних завдань, що вимагають визначення окремих властивостей руху системи, основні теореми динаміки є найбільш ефективними методами дослідження.

У динаміці системи матеріальних точок розглядають чотири основні теореми:

- про рух центра мас;
- про зміну кількості руху;
- про зміну кінетичного моменту;
- про зміну кінетичної енергії.

У динаміці матеріальної точки – три основні теореми (про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху і про зміну кінетичної

енергії). Загальні теореми динаміки можна уявити як в диференціальній, так і в інтегральній формі.

1.3.3.1 Кількості руху точки і механічної системи. Елементарний і повний імпульс сили

Кількість руху, як міра руху, характеризує перехід механічного руху одного матеріального об'єкта на механічний рух іншого матеріального об'єкта.

Кількістю руху матеріальної точки називається векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки та вектора її швидкості:

$$\bar{q} = m \cdot \bar{V} . \quad (1.139)$$

Напрямок вектора \bar{q} співпадає з напрямком вектора швидкості точки \bar{V} . Одиницею виміру кількості руху є $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Кількістю руху механічної системи називається головний вектор кількості руху всіх точок системи, який дорівнює геометричній сумі кількостей руху цих точок:

$$40 \bar{Q} = \sum m_k \cdot \bar{V}_k . \quad (1.140)$$

Враховуючи, що $M \cdot \bar{r}_C = \sum m_k \cdot \bar{r}_k$ (з визначення центра мас механічної системи), величину і напрямок головного вектора кількості руху системи визначають через масу всієї системи і швидкість її центра мас:

$$\bar{Q} = M \cdot \bar{V}_C . \quad (1.126)$$

Проекції вектора кількості руху на осі прямокутної системи координат записуються в такому вигляді:

Для характеристики дії сили за деякий проміжок часу вводиться поняття імпульсу сили.

Елементарним імпульсом сили \bar{F} за елементарний проміжок часу dt називається вектор $d\bar{S}$:

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt . \quad (1.141)$$

Імпульсом сили \bar{F} за кінцевий проміжок часу від t_0 до t (повним імпульсом сили) називається вектор \bar{S} :

$$\bar{S} = \int_{t_0}^t d\bar{S} = \int_{t_0}^t \bar{F} \cdot dt \quad (1.142)$$

1.3.3.2 Теорема про зміну кількості руху

Отримаємо теорему про зміну кількості руху механічної системи, що складається з n матеріальних точок, диференціальні рівняння руху яких

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Оскільки маса кожної точки постійна, внесемо її під знак похідної, після чого підсумуємо всі ці n рівнянь: $\sum \frac{d}{dt}(m_k \bar{V}_k) = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$.

Оскільки операції підсумовування і диференціювання такі, що переміщуються, а головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю ($\sum \bar{F}_{ki} = 0$), ми маємо $\frac{d}{dt}(\sum m_k \bar{V}_k) = \sum \bar{F}_k^e$. За визначенням кількість руху системи дорівнює $\bar{Q} = \sum m_k \cdot \bar{V}_k$, і ми отримуємо теорему про зміну кількості руху системи в диференціальній формі:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e, \quad (1.143)$$

тобто похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему.

Звідси випливає, що внутрішні сили не впливають на зміну кількості руху системи. Цю ж формулу можна переписати інакше:

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^e dt = \sum d\bar{S}_k^e, \quad (1.144)$$

що представляє другу диференціальну форму теорему: диференціал кількості руху системи матеріальних точок дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів, діючих на систему зовнішніх сил.

Після інтегрування останнього рівності в межах від t_0 до t_1 отримаємо теорему про зміну кількості руху системи в інтегральній формі:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e, \quad (1.145)$$

тобто зміна кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів зовнішніх сил системи за той самий проміжок часу.

Спроектувавши формули (1.130) і (1.131) на осі прямокутної системи координат, отримаємо запис теореми в координатному вигляді в диференціальній формі:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e, \quad (1.146)$$

і в інтегральній формі

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \quad (1.147)$$

З теореми про зміну кількості руху системи можна отримати, як наслідок, закон збереження кількості руху: якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю ($\sum \bar{F}_k^e = 0$), то вектор кількості руху системи буде постійний за модулем і напрямком ($\bar{Q} = const$).

Якщо одна з проєкцій головного вектора зовнішніх сил дорівнює нулю, то незмінною залишається відповідна проєкція кількості руху; наприклад, якщо $\sum F_{kx}^e = 0$, то $Q_x = const = Q_{x0}$.

З цього закону випливає, що внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи.

1.3.3.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. На залізничній платформі, що вільно стоїть на рейках, встановлена лебідка A (рис. 1.82), призначена для переміщення по платформі вантажу B . Маса платформи з лебідкою m_1 . При включенні лебідки вантаж B , маса якого m_2 , переміщується так, що відстань AB змінюється згідно із законом $s = 0,5at^2$. У початковий момент система нерухома. Нехтуючи тертям, знайти закон зміни швидкості платформи після включення лебідки.

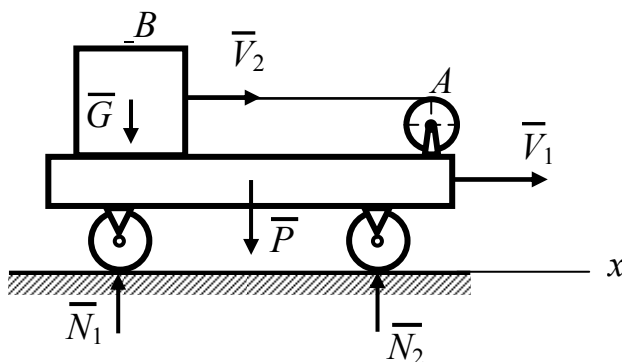


Рисунок 1.82

Розв'язання

На механічну систему, яка складається з вантажу і платформи з лебідкою, діють зовнішні сили $\bar{P} = m_1 \bar{g}$, $\bar{G} = m_2 \bar{g}$, і реакції \bar{N}_1 та \bar{N}_2 . Усі ці сили направлені вертикально. Проведемо перпендикулярно до них вісь x і запишемо теорему про зміну кількості руху системи в проєкціях на цю вісь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0.$$

Таким чином, ми маємо випадок збереження проєкції кількості руху системи:

$$Q_x = const = Q_{0x}.$$

Оскільки в початковий момент система нерухома, то $Q_{0x} = 0$, і рішення задачі зводиться до того, щоб знайти кількість руху в момент часу $t > 0$ і прирівняти отримане вираження нулю. Позначимо швидкість платформи через \bar{V}_1 і направимо її у бік позитивного напрямку осі x . Швидкість вантажу B відносно платформи позначимо \bar{V}_2 ; при цьому $V_2 = \frac{ds}{dt} = at$. Абсолютна швидкість вантажу дорівнює $V_B = V_1 + V_2 = V_1 + at$. Тоді

$$Q_x = m_1 V_1 + m_2 V_B = m_1 V_1 + m_2 (V_1 + at) = 0,$$

звідки

$$V_1 = -\frac{m_2 at}{m_1 + m_2}.$$

Знак мінус показує, що платформа переміщатиметься убік, протилежну до відносного руху вантажу.

Приклад 2. Мисливець масою $m_1 = 70$ кг, який сидить у нерухомому човні масою $m_2 = 30$ кг, стріляє уперед у горизонтальному напрямку. Нехтуючи тертям води, визначити швидкість човна після пострілу, якщо маса вистріляного заряду $m_3 = 0,04$ кг, а його початкова швидкість $u = 500$ м/с.

Розв'язання

Будемо розглядати заряд і човен з мисливцем як одну систему. В умовах задачі зовнішніми силами, які діють на систему, будуть вертикальні сили ваги $m_1 \bar{g}$, $m_2 \bar{g}$, $m_3 \bar{g}$ і архімедова сила \bar{N} (рис. 1.83).

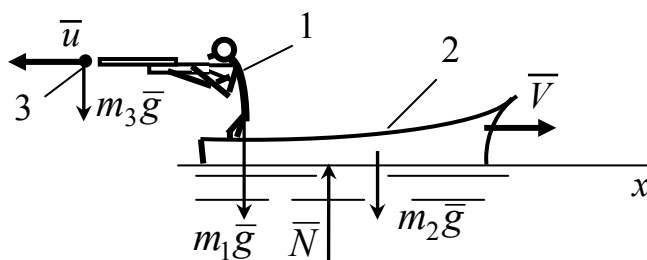


Рисунок 1.83

Проекції цих сил на проведену горизонтальну вісь x дорівнюють нулю, тому проекція кількості руху всієї системи на цю вісь зберігає постійне значення, яке дорівнює початковому:

$$Q_x = Q_{x_0} = \text{const} .$$

Перед пострілом, коли заряд ще не набув швидкості, човен також був нерухомим, тобто $Q_{x_0} = 0$. Після пострілу, коли заряд набув швидкості \bar{u} , а човен почав рухатись зі швидкістю \bar{V} протилежно напрямку пострілу. Загальна кількість руху системи не змінилась, тобто

$$Q_x = (m_1 + m_2)V - m_3u = 0 .$$

Звідси знайдемо швидкість руху човна

$$V = \frac{m_3u}{m_1 + m_2} .$$

1.3.3.4 Теорема про рух центра мас

У формулу теореми про зміну кількості руху системи $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$ підставимо вираз кількості руху $\bar{Q} = M\bar{V}_c$, де \bar{V}_c – швидкість центра мас. У результаті, (враховуючи, що маса M системи є сталою) одержимо $M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)}$, або остаточно:

$$M \cdot \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e . \quad (1.148)$$

Ця формула виражає теорему про рух центра мас системи:

Центр мас системи матеріальних точок рухається так, як рухалась би матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, на яку діють усі зовнішні сили системи.

Векторному рівнянню (1.148) відповідають три диференціальних рівняння руху центра мас у координатній формі:

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M \cdot \ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad M \cdot \ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \quad (1.149)$$

Рівняння (1.149) є також диференціальними рівняннями поступального руху твердого тіла.

Наслідками з даної теореми виступають такі закони:

- якщо головний вектор зовнішніх сил систем дорівнює нулю ($\sum \bar{F}_k^e = 0$), то швидкість центра мас залишається сталою ($\bar{V}_C = const$) і рух центра мас зберігається (закон збереження руху центра мас);

- якщо головний вектор зовнішніх сил систем дорівнює нулю ($\bar{R}^e = \sum \bar{F}_k^e = 0$) і, окрім того, початкова швидкість центра мас дорівнює нулю ($\bar{V}_{C_0} = 0$), то центр мас системи не переміщується ($\bar{r}_C = const$) і положення центра мас зберігається (закон збереження положення центра мас).

Отже, одними лише внутрішніми силами не можна змінити характер руху і положення центра мас системи матеріальних точок. Внутрішні сили можуть здійснювати непрямий вплив на рух центра мас лише через зовнішні сили. Наприклад, внутрішні сили двигуна автомобіля впливають на рух його центра мас лише через силу тертя коліс з дорогою.

Якщо задано рух центра мас системи матеріальних точок, то теорема про рух центра мас дозволяє визначити головний вектор $\bar{R}^t = \sum \bar{F}_k^t$ зовнішніх сил, які діють на точки системи.

1.3.3.5 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Човен 1 стоїть у нерухомій воді перпендикулярно до берега так, що відстань від берега до носа човна $l_0 = 1,8$ м. Щоб підігнати човен до берега людина 2, яка стоїть на носі човна, переходить з носа човна на корму, перемістившись по човну на відстань $l = 4$ м. На якій відстані l_1 від берега буде знаходитись після цього ніс човна, якщо маса човна $m_1 = 90$ кг, маса людини $m_2 = 60$ кг, а опором води можна знехтувати?

Розв'язання

Розглянемо механічну систему з двох тіл: човна і людини (рис. 1.84).

Для розв'язання задачі застосуємо теорему про рух центра мас системи в проекції на горизонтальну вісь Ox , взявши її початок нарівні берега і направивши вздовж човна: $M \cdot \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e$.

Зовнішніми силами системи є: сили ваги $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$ і $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$, та Архімедова виштовхувальна сила \bar{N} . Оскільки всі ці сили вертикальні, то сума їх проекцій на вісь Ox дорівнює нулю, тобто $M \ddot{x}_C = 0$ і швидкість центра мас системи залишається незмінною: $V_C = \dot{x}_C = const$. Але за умовою в початковий момент система нерухома, тому $\dot{x}_{C0} = 0$, і $\dot{x}_C = dx_C/dt = 0$, тобто має місце закон збереження положення центра мас: $x_C = x_{C0} = const$.

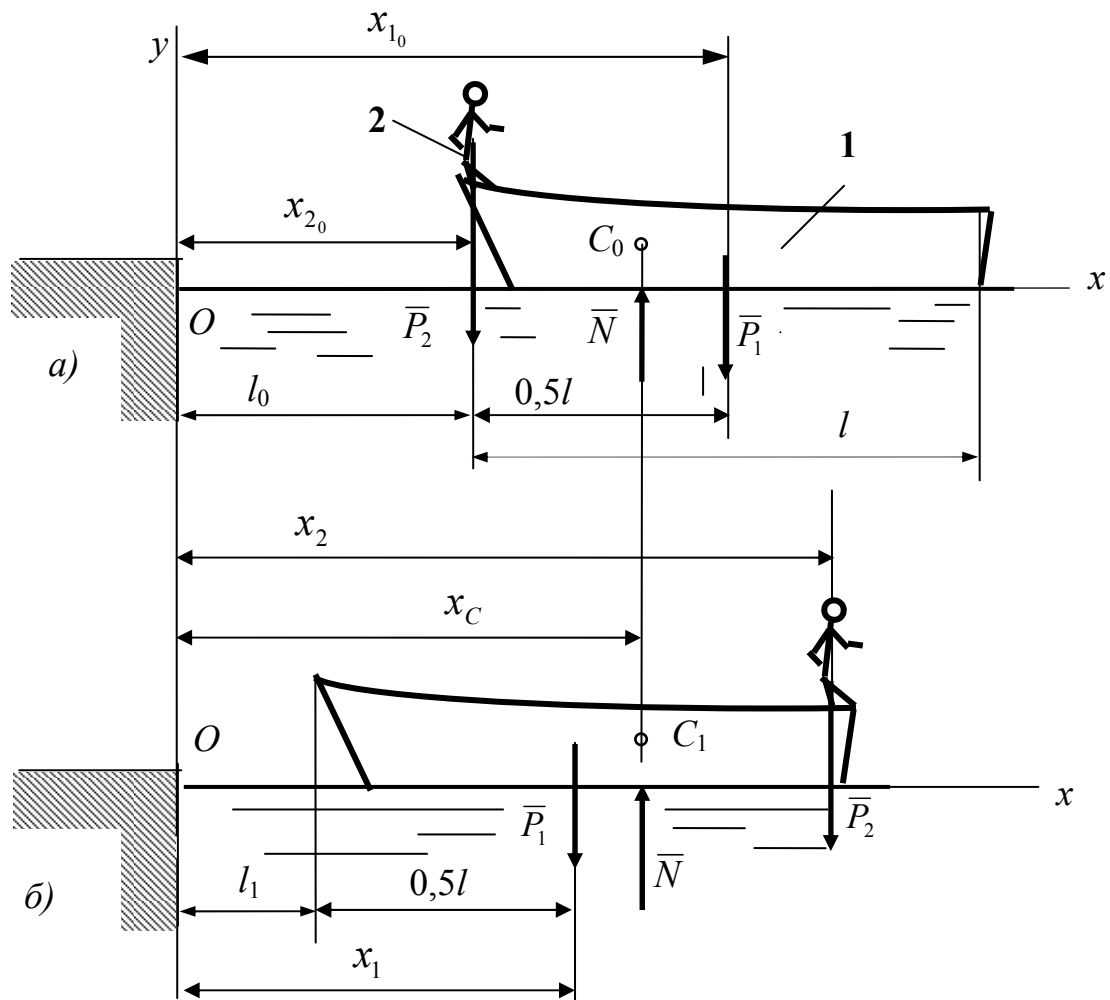


Рисунок 1.84

Зобразимо човен з людиною в початковому (див. рис. 1.84, а) та в кінцевому (див. рис. 1.84, б) положеннях.

Нехай центр маси човна знаходиться посередині човна на відстані $0,5l$ від носа. Тоді, як видно на рисунку 1.84, його абсциси становлять $x_{10} = l_0 + 0,5l$ та $x_1 = l_1 + 0,5l$. Абсциси ж людини мають значення $x_{10} = l_0 + 0,5l$ та $x_1 = l_1 + 0,5l$.

Тоді координати x_{C_0} і x_{C_1} центра мас системи для цих двох випадків набудуть значень:

$$x_{C_0} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(l_0 + 0,5l) + m_2 l_0}{m_1 + m_2} \text{ та}$$

$$x_{C_1} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(l_1 + 0,5l) + m_2(l_1 + l)}{m_1 + m_2}.$$

Прирівняємо один до одного ці два вирази і знайдемо:

$$(m_1 + m_2) \cdot l_0 = (m_1 + m_2) l_1 + m_2 \cdot l,$$

звідки
$$l_1 = l_0 - \frac{m_2 \cdot l}{(m_1 + m_2)} = 1,8 - \frac{60 \cdot 4}{90 + 60} = 0,2.$$

Отже, в кінцевому положенні системи ніс човна буде знаходитись на відстані 0,2 м від берега.

Приклад 2. Електричний двигун масою m_1 встановлений без кріплень на гладкому горизонтальному фундаменті (рис. 1.85). На валу мотора під прямим кутом закріплений одним кінцем невагомий стрижень завдовжки l , на інший кінець стрижня насаджений точковий вантаж A масою m_2 . У момент включення мотора стрижень займає вертикальне положення. Після включення мотора кутова швидкість його вала постійна і дорівнює ω . Знайти: 1) горизонтальний рух мотора; 2) силу тиску мотора на фундамент.

Розв'язання

Механічна система складається з двох тіл: двигуна і точкового вантажу. Зобразимо двигун у положенні $\varphi = \omega t > 0$ (див. рис. 1.85). Проведемо вісь x горизонтально, а вісь y за вертикаллю, вибравши початок відліку в положенні, яке займає центр двигуна при $\varphi = 0$, тобто коли $t = 0$, і абсциса $x_{C_0} = 0$.

Для визначення горизонтального руху двигуна запишемо теорему про рух центра мас системи в проекції на горизонтальну вісь Ox :

$$M \cdot \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e,$$

де $M=(m_1+m_2)$ – маса системи.

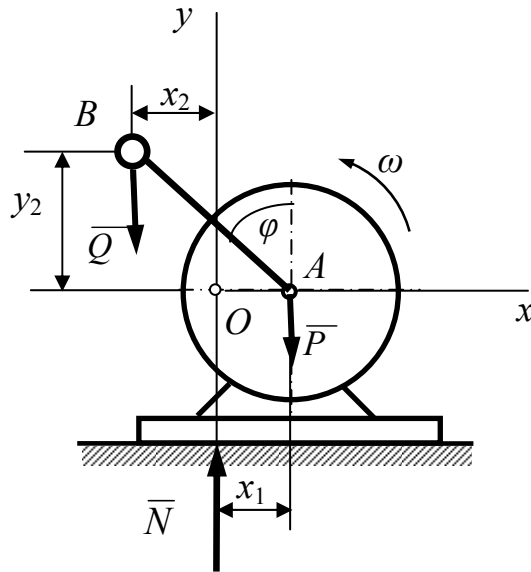


Рисунок 1.85

До системи прикладені зовнішні сили: сили ваги $\bar{P} = m_1 \bar{g}$, $\bar{Q} = m_2 \bar{g}$ і реакція фундаменту \bar{N} . Усі ці сили вертикальні, тому $\sum \bar{F}_k^e = 0$. Оскільки в початковий момент система була нерухома, то тут, як і в попередній задачі, має місце закон збереження абсциси центра мас системи, тобто $x_C = x_{C0} = 0$.

Отже, в довільний момент часу

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

де x_1 – горизонтальне переміщення центра ваги двигуна;

$x_2 = x_1 - l \sin \omega t$ – координата точкового вантажу B .

Тоді маємо: $m_1 x_1 + m_2 (x_1 - l \sin \omega t) = 0$, звідки одержимо:

$$x_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \omega t.$$

Отже, центр двигуна здійснюватиме горизонтальні гармонійні коливання відносно свого початкового положення з амплітудою $m_2 l / (m_1 + m_2)$.

Сила тиску двигуна на фундамент за величиною дорівнює реакції N фундаменту на двигун. Для визначення цієї реакції складемо диференціальне рівняння руху центра мас системи в проекції на вісь y :

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_C = N - m_1g - m_2g .$$

Визначимо координату y_C центра мас системи, враховуючи, що ордината центра мас двигуна (при його опорі на фундамент) $y_1=0$, а ордината точкового вантажу $y_2 = l \cos \omega t$. Тоді

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \cos \omega t ,$$

звідки одержимо після подвійного диференціювання:

$$\ddot{y}_C = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega^2 \cos \omega t .$$

$$\text{Значить, } -m_2 l \omega^2 \cos \omega t = N - m_1 g - m_2 g ;$$

$$N = g(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2) \cdot \ddot{y}_C = g(m_1 + m_2) - m_2 \omega^2 l \cos \omega t .$$

Мінімальне значення реакції досягається при $\cos \omega t = 1$, тобто при $\varphi = 0$, а максимальне – при $\varphi = \pi$:

$$N_{\min} = g(m_1 + m_2) - m_2 \omega^2 l , \quad N_{\max} = g(m_1 + m_2) + m_2 \omega^2 l .$$

Якщо $N_{\min} < 0$, то мотор починає підстрибувати на фундаменті.

У цьому випадку його кутова швидкість $\omega > \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{g}{l}}$.

1.3.4 Теорема про зміну кінетичного моменту

Кількість руху, що є мірою поступальної частини руху, лише частково характеризує механічний рух системи.

Введемо ще одну векторну міру руху, яка називається *кінетичним моментом*.

1.3.4.1 Кінетичний момент точки і механічної системи

Кінетичним моментом матеріальної точки відносно деякого центра O (рис. 1.86) називається момент кількості руху точки відносно цього центра, тобто векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора матеріальної точки M , проведеного з центра O , на кількість руху точки:

$$\bar{k}_O = \bar{M}_O(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}.$$

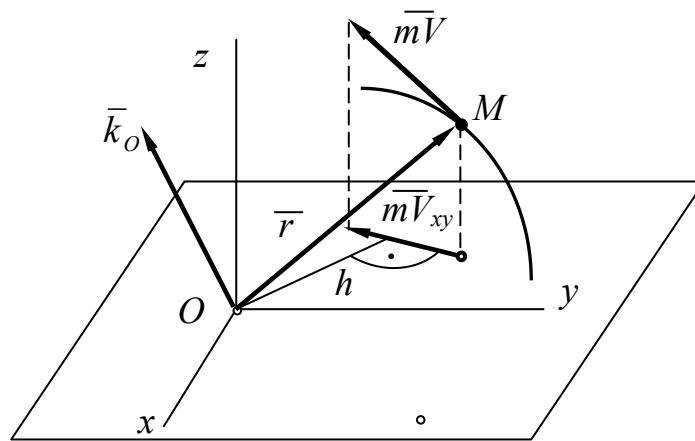


Рисунок 1.86

Кінетичні моменти точки щодо осей координат x , y , z визначаються залежностями:

$$k_x = M_x(m\bar{V}) = m(yV_z - zV_y),$$

$$k_y = M_y(m\bar{V}) = m(zV_x - xV_z),$$

$$k_z = M_z(m\bar{V}) = m(xV_y - yV_x).$$

Кінетичним моментом системи матеріальних точок відносно центра O називається геометрична сума кінетичних моментів усіх точок системи відносно того самого центра:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{M}_O(m_k\bar{V}_k) = \sum \bar{r}_k \times m_k\bar{V}_k. \quad (1.58)$$

Якщо спроектувати рівняння (1.58) на прямокутні декартові осі координат, то одержимо проєкції кінетичного моменту на ці осі або кінетичні моменти щодо осей координат:

$$\begin{aligned}
K_x &= \sum M_x(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (y_k V_{kz} - z_k V_{ky}), \\
K_y &= \sum M_y(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (z_k V_{kx} - x_k V_{kz}), \\
K_z &= \sum M_z(m_k \bar{V}_k) = \sum m_k (x_k V_{ky} - y_k V_{kx}).
\end{aligned}
\tag{1.59}$$

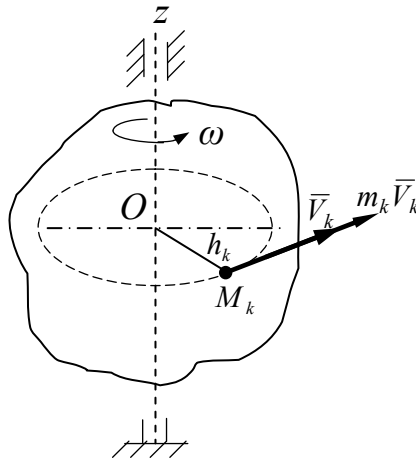


Рисунок 1.87

Обчислимо кінетичний момент твердого тіла щодо його нерухомої осі обертання z (рис. 1.87). За визначенням кінетичного моменту щодо осі (1.59) маємо:

$$K_Z = \sum M_Z(m_k \bar{V}_k) = \sum h_k \cdot m_k V_k.$$

Оскільки $V_k = \omega \cdot h_k$, де h_k – відстань від точки M_k до осі обертання, то $K_Z = \sum h_k m_k \omega h_k = \omega \cdot \sum m_k h_k^2$. Як відомо, сума, що входить до цього виразу, дорівнює моменту інерції тіла щодо осі z : $J_z = \sum m_k h_k^2$. Тоді остаточно

$$K_Z = J_z \cdot \omega.$$

Отже, кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно даної осі на кутову швидкість тіла.

1.3.4.2 Теорема про зміну кінетичного моменту

Теорему про зміну кінетичного моменту отримаємо з диференціальних рівнянь руху системи:

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Помножимо векторно зліва ці рівності на радіус-вектори \bar{r}_k кожної точки:

$$\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$$

Враховуючи, що $\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k)$ можна одержати:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$$

Складаючи геометрично ці n рівнянь і враховуючи, що операції підсумовування і диференціювання переміщуються, матимемо:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^i).$$

У цьому виразі $\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k) = \bar{K}_O$ – кінетичний момент системи щодо нерухомого центра O . За властивостями внутрішніх сил їх головний момент дорівнює нулю, тобто $\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^i) = 0$. Перша сума справа

$\sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e)$ – сума моментів зовнішніх сил системи відносно центра O , тобто головний момент зовнішніх сил системи відносно точки O .

У результаті остаточно отримаємо:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e). \quad (1.60)$$

Спроектувавши цю рівність на нерухомі осі прямокутної системи координат, отримаємо запис теореми в проєкціях на ці осі:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e). \quad (1.61)$$

Ці рівняння виражає теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи у векторній (1.60) і координатній (1.61) формі, яка формулюється так: *похідна за часом від кінетичного моменту системи матеріальних точок відносно нерухомого центра (нерухомої осі) дорівнює головному моменту зовнішніх сил системи відносно того самого центра (тієї самої нерухомої осі).*

З цих формул (1.60), (1.61) випливає, що *внутрішні сили не впливають на зміну кінетичного моменту системи.*

Дана теорема може привести до перших інтегралів і, зокрема, до законів збереження кінетичного моменту щодо нерухомого центра (нерухомої осі): *якщо головний момент зовнішніх сил відносно будь-якого нерухомого центра (нерухомої осі) дорівнює нулю, то кінетичний момент відносно цього центра (тієї самої нерухомої осі) залишається постійним, тобто*

якщо $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = 0$, то $\bar{K}_O = \overline{const}$ і якщо $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = 0$ то $K_z = const$.

Якщо цю теорему застосувати до вивчення руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі z , отримаємо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$J_z \ddot{\phi} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e).$$

1.3.4.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. На барабан масою m_1 і радіусом r (рис. 1.88) намотана нитка з вантажем A масою m_2 . Нехтуючи масою нитки і тертям на осі, визначити кутове прискорення барабана при опусканні вантажу, якщо радіус інерції барабана відносно осі обертання дорівнює ρ , і на барабан діє постійний момент сил тертя $M_{тр}$.

Розв'язання

Розглянемо систему, яка складається з барабана, що обертається, та вантажу в довільний момент часу. Покажемо на схемі (рис. 1.88) зовнішні сили: сили ваги барабана $\bar{P} = m_1 \bar{g}$ та вантажу $\bar{G} = m_2 \bar{g}$, реакцію \bar{R} барабана та момент $M_{тр}$.

Застосуємо для розв'язання задачі теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно осі обертання барабана:

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = \sum M_x(\bar{F}_k^e).$$

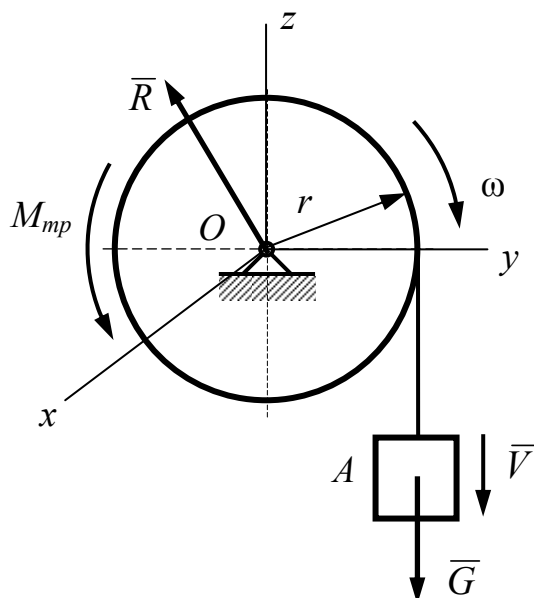


Рисунок 1.88

Для цієї системи

$$K_{Ox} = K_{Ox}^B + K_{Ox}^B,$$

де K_{Ox}^B і K_{Ox}^B – кінетичні моменти відносно осі Ox барабана і вантажу відповідно.

Барабан обертається навколо нерухомої осі Ox з кутовою швидкістю ω , і його момент інерції $J_x = m_1 \rho^2$. Вантаж A рухається поступально зі швидкістю $V = \omega r$. Тоді

$$K_{Ox}^B = m_1 \rho^2 \cdot \omega, \quad K_{Ox}^B = m_2 \omega \cdot r^2, \quad \text{і} \quad K_{Ox} = (m_1 \rho^2 + m_2 r^2) \omega.$$

Для моментів сили одержимо $\sum M_x(\bar{F}_k^e) = m_2 gr - M_{тр}$. Підставляючи всі ці величини у формулу теореми, знайдемо:

$$(m_1 \rho^2 + m_2 r^2) \frac{d\omega}{dt} = m_2 gr - M_{тр},$$

Звідси кутове прискорення барабана визначиться залежністю

$$\varepsilon = \frac{m_2 gr - M_{тр}}{m_1 \rho^2 + m_2 r^2}.$$

1.3.5 Теорема про зміну кінетичної енергії

Раніше розглянуті міри руху (кількість руху, кінетичний момент) не завжди повністю описують рух системи. Наприклад, при коливальному русі по гладкій горизонтальній поверхні двох з'єднаних пружиною однакових вантажів, які виведені зі стану спокою розтягуванням пружини і подальшим їх рухом без початкової швидкості, швидкості тіл у кожен момент часу дорівнюють одна одній і протилежно спрямовані. Загальна кількість руху системи і її кінетичний момент щодо будь-якої нерухомої точки тотожно дорівнюють нулю, хоча система знаходиться в русі. Таким чином, у цьому випадку ці дві величини ніяк не характеризують рух системи. Тому в механіці розглядається ще одна міра механічного руху, яку називають *кінетичною енергією*.

1.3.5.1 Кінетична енергія точки і системи

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна (завжди позитивна) величина, що дорівнює половині добутка маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \quad (1.62)$$

Кінетичною енергією системи n матеріальних точок називається арифметична сума кінетичних енергій усіх її точок:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (1.63)$$

Можна довести теорему Кеніга про те, що *кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас, якщо в ньому зосередити всю масу системи, і кінетичної енергії системи при її відносному русі відносно центра мас*:

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{kr}^2}{2}, \quad (1.64)$$

де $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – маса системи,

V_C – швидкість центра мас,

V_{kr} – швидкості точок системи відносно центра мас.

Кінетичну енергію твердих тіл системи обчислюють за формулами, отриманими із залежності (1.144) для різних видів руху тіла.

При *поступальному* русі тіла, коли швидкості всіх його точок однакові, тобто $V_k = V$, отримаємо: $T = \frac{MV^2}{2}$.

При *обертальному* русі тіла навколо нерухомої осі z , коли швидкості точок тіла $V_k = \omega \cdot h_k$, де h_k – відстань від точки M_k до осі обертання, отримаємо $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$.

Тут $J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$ – момент інерції тіла відносно осі обертання.

При *плоскопаралельному* русі тіла, коли центр мас тіла рухається зі швидкістю V_C , а тіло відносно центра мас обертається з кутовою швидкістю ω , кінетична енергія тіла, відповідно до теореми Кеніга (див. 1.145), обчислюється за формулою $T = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2$, де J_{Cz} – момент інерції тіла відносно осі Cz , що проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині руху.

1.3.5.2 Робота сили

Робота сили. Мірою силового впливу в теоремі про зміну кінетичної енергії виступає робота сили. Цей силовий параметр характеризує дію сили при переміщенні точки її прикладання.

Елементарною роботою сили \vec{F} на елементарному переміщенні точки її прикладання $d\vec{r}$ називається скалярний добуток:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha,$$

де α – кут між напрямками векторів \vec{F} і $d\vec{r}$.

Наведемо інші формули для обчислення елементарної роботи сили. З огляду на те, що $|d\vec{r}| = ds$ – елементарне переміщення точки по дузі траєкторії, і $|\vec{F}| \cos \alpha = F \cos \alpha = F_\tau$ – проєкція сили на напрямок швидкості, отримаємо:

$$dA = F \cos \alpha \cdot dS = F_\tau dS.$$

Оскільки $|d\vec{r}| = \vec{V} dt$, де \vec{V} – швидкість точки M , то можна записати ще один вираз елементарної роботи:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{V} dt . \quad (1.65)$$

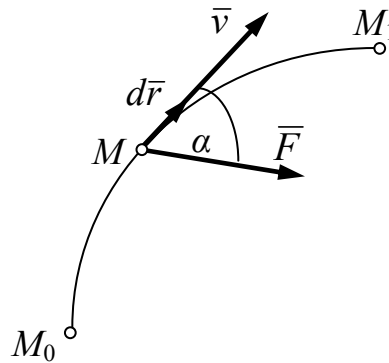


Рисунок 1.89

У координатній формі елементарна робота підраховується за формулою

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz , \quad (1.66)$$

де $F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz$ – проєкції векторів \vec{F} і $d\vec{r}$ на осі координат.

З формул елементарної роботи виходить, що ця величина може бути додатною, від'ємною або ж дорівнювати нулю.

Якщо кут α між векторами \vec{F} і $d\vec{V}$ (або \vec{V}) гострий ($\cos\alpha > 0$), то елементарна робота додатна.

Якщо кут α тупий ($\cos\alpha < 0$), то елементарна робота від'ємна, а якщо кут α прямий ($\cos\alpha = 0$, тобто сила перпендикулярна елементарному переміщенню), то елементарна робота дорівнює нулю.

Зокрема, робота нормальної складової сили F_n до швидкості завжди дорівнює нулю. Крім того, елементарна робота дорівнює нулю, якщо в цей момент $\vec{F} = 0$, а також якщо елементарне переміщення дорівнює нулю, тобто в момент, коли точка M нерухома. Зокрема, сили, прикладені в миттєвому центрі швидкостей тіла, не здійснюють роботи.

У випадку, коли до точки M прикладена система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, що має рівнодійну $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$, елементарна робота рівнодійної на переміщенні $d\vec{r}$ дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт сил системи на тому самому переміщенні, тобто

$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^n dA .$$

Робота сили на кінцевому переміщенні M_0M_1 (див. рис. 1.89) обчислюється як інтегральна сума відповідних елементарних робіт і дорівнюватиме:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Одиницею вимірювання роботи є джоуль (1 Дж = 1 Нм).

Робота сили тяжіння. Обчислимо роботу сили тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$ деякої точки M , яка перемістилася з положення M_0 з координатами x_0, y_0, z_0 в положення M_1 з координатами x_1, y_1, z_1 (рис. 1.90).

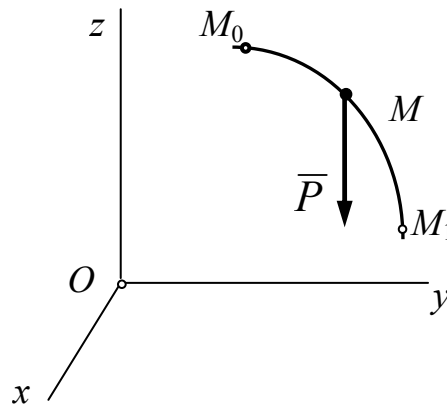


Рисунок 1.90

Елементарну роботу сили $\vec{P} = m\vec{g}$ виразимо в аналітичній формі:

$$dA(m\vec{g}) = P_x dx + P_y dy + P_z dz.$$

Згідно із введеною системою координат $P_x=0, P_y=0, P_z=-mg$, тому

$$dA(m\vec{g}) = -mg dz.$$

Робота сили тяжіння при переміщенні точки по дузі M_0M_1

$$A(m\vec{g}) = \int_{M_0}^{M_1} dA = -mg \int_{M_0}^{M_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1),$$

або

$$F = mgh, \tag{1.67}$$

де $h=(z_0-z_1)$ – висота, на яку опустилася точка прикладання сили.

Таким чином, робота сили тяжіння позитивна, коли точка опускається, і негативна, коли точка піднімається.

Робота сили пружності. Розглянемо роботу пружної сили пружини з жорсткістю c (рис. 1.91), прикріпленою до вантажу M , розмішеного на горизонтальній площині.

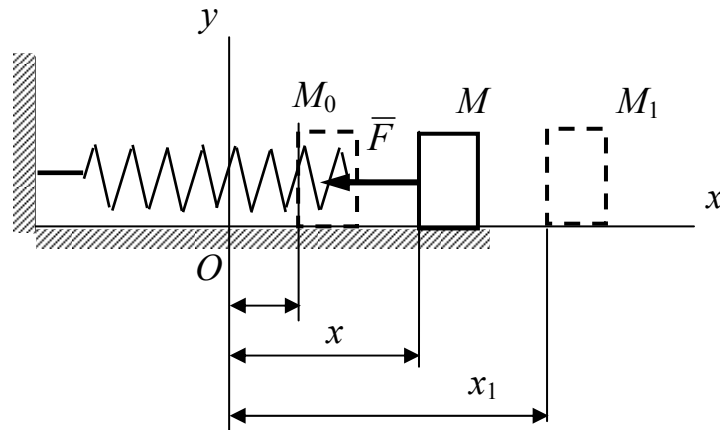


Рисунок 1.91

Виберемо початок координат у положенні, при якому пружина недеформована, і визначимо роботу, яку здійснить сила пружності пружини $\vec{F} = -cx\vec{i}$ при переміщенні тіла M з положення $M_0(x_0)$ в положення $M_1(x_1)$.

Знаходимо проєкції сили \vec{F} : $F_y = F_z = 0$, $F_x = -cx$. Елементарна робота пружної сили $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -cxdx$, а повна робота

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = - \int_{M_0}^{M_1} cxdx = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2) = -\frac{c}{2}(\lambda_{\text{кон}}^2 - \lambda_{\text{нач}}^2). \quad (1.68)$$

Тут при цьому виборі початку координат координати $x_0 = \lambda_{\text{нач}}$ і $x_1 = \lambda_{\text{кон}}$ являють собою відповідно початкову і кінцеву деформації пружини.

Робота сили пружності позитивна, якщо початкова деформація пружини більше кінцевої, тобто якщо точка M наближається до положення, при якому пружина не деформована.

У розглянутих прикладах робота сили не залежить від траєкторії точки її застосування. Такі сили називаються *потенційними*.

Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається

Нехай до точки M твердого тіла, що обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω , прикладена сила \vec{F} (рис. 1.92).

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі швидкість точки можна обчислити за векторною формулою Ейлера $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де \vec{r} – радіус-вектор точки M прикладання сили відносно точки O , яка лежить на осі обертання. Тоді елементарну роботу сили визначимо за формулою

$$dA = \bar{F} \cdot \bar{V} dt = \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dt = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) dt.$$

Але $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_O(\bar{F})$ – момент сили \bar{F} відносно точки O , тому $dA = \bar{\omega} \cdot (\bar{r} \times \bar{F}) dt = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_O(\bar{F}) dt = \omega \cdot M_O(\bar{F}) \cos \alpha dt$.

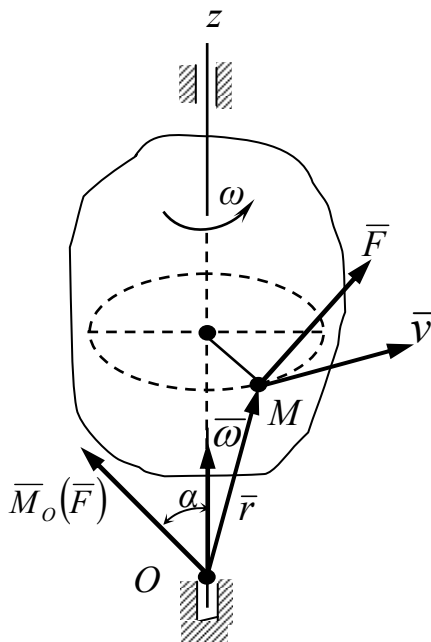


Рисунок 1.92

За визначенням моменту сили відносно осі маємо $M_z(\bar{F}) = |\bar{M}_O(\bar{F})|_z dt = M_O(\bar{F}) \cdot \cos \alpha$; крім того $\omega \cdot dt = \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = d\varphi$ Отже,

$$dA = M_z(\bar{F}) \cdot d\varphi,$$

тобто елементарна робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі обертання на елементарний кут повороту тіла. Ця робота позитивна, якщо напрямки моменту і повороту збігаються.

Робота цієї сили на кінцевому переміщенні визначається з рівняння

$$dA = M_z(\bar{F}) \cdot d\varphi,$$

а в разі постійного моменту, коли $(M_z(\bar{F}) = const)$, матимемо:

$$A = M_z(\bar{F}) \cdot \varphi.$$

Робота сил тертя, що діють на тіло, яке котиться

На колесо радіусом R (рис. 1.93), яке котиться по деякій площині (поверхні) без ковзання, діє прикладена в точці B сила тертя \vec{F}_{mp} , що перешкоджає ковзанню точки вздовж площині.

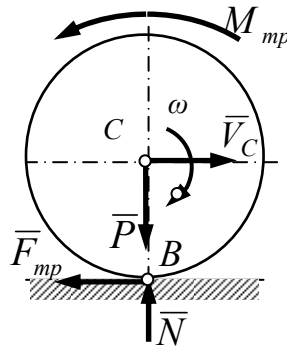


Рисунок 1.93

Елементарна робота цієї сили $dA = -\vec{F}_{mp} \cdot d\vec{S}_B$. Але точка B у цьому випадку збігається з миттєвим центром швидкостей і швидкість $V_B = 0$. Оскільки $d\vec{S}_B = V_B \cdot dt$, то $d\vec{S}_B = 0$ і для кожного елементарного переміщення $dA = 0$.

Отже, при коченні без ковзання робота сили тертя, що перешкоджає ковзанню, на будь-якому переміщенні тіла дорівнює нулю. З тієї самої причини в цьому випадку дорівнює нулю і робота нормальної реакції \vec{N} , якщо вважати тіла такими, що не деформуються, і силу \vec{N} , прикладеною в точці B (див. рис. 1.93).

Роботу моменту тертя $M_{mp} = k \cdot N$, де k – коефіцієнт тертя кочення, обчислюють за формулою

$$A = -M_{mp} \cdot \varphi,$$

яка відповідає формулі (1.62) для обчислення роботи моменту сили.

Потужність

Потужність сили визначається роботою, яку здійснюють силою за одиницю часу. Так, якщо за час dt сила зробила роботу $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, то вираз для потужності сили набуває вигляду

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} = |\vec{F}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha,$$

тобто *потужність сили* – це величина, що дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки її застосування. Таким чином, при постійній потужності збільшення швидкості веде до зменшення сили та навпаки. Одиницею вимірювання потужності є ват ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж}$).

Якщо сила прикладена до тіла, що обертається навколо нерухомої осі, то її потужність дорівнює:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z(\bar{F})d\varphi}{dt} = M_z(\bar{F}) \cdot \omega .$$

Аналогічно визначається і потужність пари сил. Потужність моменту позитивна, якщо його напрямок співпадає з напрямком обертання тіла.

Якщо сила прикладена до тіла, що обертається навколо нерухомої осі, то її потужність дорівнює:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z(\bar{F})d\varphi}{dt} = M_z(\bar{F}) \cdot \omega .$$

Аналогічно визначається і потужність пари сил. Потужність моменту позитивна, якщо його напрямок співпадає з напрямком обертання тіла.

1.3.5.3 Теорема про зміну кінетичної енергії

Запишемо для механічної системи, що складається з n матеріальних точок, диференціальні рівняння руху у векторній формі

$$m_k \cdot \bar{a}_k = m_k \cdot \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad (k=1,2,\dots,n),$$

де \bar{F}_k^e і \bar{F}_k^i – відповідно рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил системи, прикладених до k -ї точки.

Помножимо скалярно кожне з цих рівнянь на елементарне переміщення $d\bar{r}_k$ відповідної точки:

$$m_k \cdot \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot d\bar{r}_k = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k,$$

потім перетворимо ліву частину отриманої рівності:

$$m_k \cdot \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot d\bar{r}_k = m_k \cdot \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \bar{V}_k dt = m_k \bar{V}_k \cdot d\bar{V}_k = d\left(\frac{m_k \bar{V}_k^2}{2}\right).$$

З огляду на те, що $d\bar{V}_k = d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dT_k$, де $T_k = \frac{m_k V_k^2}{2}$ – кінетична енергія k -ї точки, а $\bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k = dA_k^e$ й $\bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k = dA_k^i$ – відповідно елементарні роботи рівнодійних зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до k -ї точки, отримуємо:

$$dT_k = dA_k^e + dA_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Складемо ці n рівностей:

$$\sum_{k=1}^n dT_k = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i.$$

Оскільки операції підсумовування і диференціювання такі, що переміщуються, то

$$\sum_{k=1}^n dT_k = d \sum_{k=1}^n T_k = dT,$$

де $T = \sum_{k=1}^n T_k$ – кінетична енергія системи.

Отже, остаточно теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок запишеться у вигляді

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i, \quad (1.69)$$

тобто диференціал кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх діючих на систему зовнішніх і внутрішніх сил.

Якщо механічна система є незмінною, тобто складається з твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, то сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю і в правій частині формули теореми залишається тільки сума елементарних робіт зовнішніх сил:

$$dT = \sum_{k=1}^n dA_k^e.$$

Виразимо цю теорему у вигляді похідної, розділивши рівняння (1.62) на елементарний відрізок часу dt :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{dA_k^i}{dt} .$$

Але величини $\sum_{k=1}^n \frac{dA_k^e}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e$ і $\sum_{k=1}^n \frac{dA_k^i}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^i$ – це потужності зовнішніх сил і внутрішніх сил системи.

Отже, ми отримуємо другу форму запису теореми про зміну кінетичної енергії системи:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{k=1}^n N_k^i , \quad (1.70)$$

яка читається так: *похідна за часом від кінетичної енергії системи матеріальних точок дорівнює сумі потужностей усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.*

Проінтегруємо обидві частини формули (1.69) від початкового положення системи M_0 до кінцевого положення M_1 , в яких кінетична енергія системи відповідно дорівнює T_0 і T , отримаємо:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n \int_{M_0}^{M_1} dA_k^e + \sum_{k=1}^n \int_{M_0}^{M_1} dA_k^i ,$$

або

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i , \quad (1.71)$$

де $A_k^e = \int_{M_0}^{M_1} dA_k^e$ і $A_k^i = \int_{M_0}^{M_1} dA_k^i$ – відповідно роботи зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до k -ї точці системи, на її переміщенні з положення M_0 в положення M_1 .

Формула (1.71) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи в кінцевій (інтегральній формі): *приріст кінетичної енергії системи на її кінцевому переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил на цьому переміщенні.* Для незмінної системи $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$, і тому для неї

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e .$$

З формул (1.62)...(1.64) випливає, що на відміну від попередніх загальних теорем динаміки до теореми про зміну кінетичної енергії системи в загальному випадку входять внутрішні сили. Таким чином, безпосередньо за рахунок внутрішніх сил неможна змінити ні кількість руху системи, ні її кінетичний момент, але можна змінити її кінетичну енергію.

1.3.5.4 Потенціальне силове поле і силова функція

Для обчислення роботи сили на будь-якому переміщенні в загальному випадку необхідно знати закон руху точки на цьому переміщенні. Є клас сил, для яких робота не залежить від характеру рухів точки на розглянутому переміщенні. Ці сили називаються *позиційними*, і вони мають велике значення в різних галузях механіки і фізики. Це, наприклад, сили пружності, гравітації, електричного і магнітного полів.

Силовим полем називають частину простору, в якому на матеріальну точку, що рухається в ньому, діють сили, що залежать від координат і часу, але не залежать від швидкості: $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z)$.

Силове поле вважають *стаціонарним*, якщо діючі сили не залежать від часу. Якщо ж сили залежать від часу, то силове поле є *нестационарним*. Стаціонарне силове поле називають *потенціальним*, якщо існує функція $U(x, y, z)$, через яку проєкції сили на координатні осі в кожній точці поля визначаються як приватні похідні від цієї функції за координатами, тобто за формулами:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.72)$$

Функцію $U(x, y, z)$ називають *потенціальною* або *силовою* функцією.

Підставивши у вираз (1.66) елементарної роботи замість F_x, F_y, F_z їх значення з (1.72), одержимо:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz = dU, \quad (1.73)$$

тобто $dA = dU$.

Таким чином, *елементарна робота сили у потенціальному силовому полі дорівнює повному диференціалу силової функції*. Іноді цю властивість силової функції приймають за її визначення; тоді рівняння (1.72) одержують із рівняння (1.73).

Повна робота сили \vec{F} на ділянці від точки M_1 до точки M_2

$$A_{(M_1 M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} dU(x, y, z) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) = U_2 - U_1, \quad (1.74)$$

де $U_1 = U(x_1, y_1, z_1)$ і $U_2 = U(x_2, y_2, z_2)$ – значення силової функції в точках M_1 і M_2 відповідно.

Отже, повна робота сили на будь-якому переміщенні точки у потенціальному силовому полі дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій і початковій точках переміщення і не залежить від форми траєкторії, за якою відбувається рух, якщо силова функція є однозначною.

З рівняння (1.74) витікає, що при переміщенні замкнутою траєкторією $U_2 = U_1$ і робота потенційної сили дорівнює нулю.

Визначимо умови існування силової функції, які надають змоги за силами силового поля встановлювати, чи буде силове поле потенціальним. Для її існування повинні задовольнятися певні співвідношення між проєкціями сили поля. Встановимо їх, для чого продиференціюємо за z

друге з рівнянь (1.72), а третє – за y , і одержимо:
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$$

Тоді на основі властивостей приватних похідних можемо записати рівності

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \text{ та аналогічно } \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (1.75)$$

Рівності (1.75) – це необхідні і достатні умови існування силової функції $U = U(x, y, z)$.

Сили, що діють на матеріальну точку в потенціальному полі, називаються *потенціальними*. До них відносяться сили ваги, лінійна сила пружності, сили тяжіння і т. д. Сили опору і, зокрема, сили сухого тертя не потенціальні.

Якщо встановлено, що співвідношення (1.73) має місце, то силова функція знаходиться з рівності

$$U = \int dA + C$$

або
$$U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C.$$

Постійна C тут може мати будь-яке значення, проте зазвичай домовляються вважати, що в деякій точці O , яку називають «нульовою точкою», величину $U_O = 0$ і визначають C , виходячи з цієї умови.

Вважаючи $U(x, y, z) = C$, де C – деяка постійна, отримаємо в просторі рівняння поверхні, в усіх точках якої функція U має одне і те саме значення C . Такі поверхні називають *поверхнями рівня* або *поверхнями*

рівного потенціалу. Якщо, як ми вважаємо, силова функція є однозначною функцією координат, то поверхні рівня не можуть перетинатися і через кожну точку поля проходить тільки одна поверхня рівня. При будь-якому переміщенні M_1M_2 уздовж поверхні рівня $U_1 = U_2 = C$, і робота сил поля, як випливає з рівняння (1.66), дорівнюватиме нулю. Оскільки сила при цьому не дорівнює нулю, то звідси висновлюємо, що у будь-якій точці потенціального силового поля сила спрямована за нормаллю до поверхні рівня, що проходить через цю точку.

Якщо в потенціальному силовому полі знаходиться система матеріальних точок, то силовою функцією буде така функція координат точок системи $U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, для якої $dU = \sum_{k=1}^n dA_k$, тобто диференціал якої дорівнює сумі елементарних робіт усіх сил поля, що діють на систему.

1.3.5.5 Потенціальна енергія

Якщо силове поле є потенціальним, то разом з розглянутою вище функцією U можна ввести іншу скалярну функцію, що називається потенціальною енергією, і визначає запас енергії матеріальної точки, поміщеної в даному пункті силового поля. *Потенціальною енергією Π точки в даному положенні M називається скалярна величина, що дорівнює тій роботі, яку виконують сили поля при переміщенні цієї точки з положення M в початкове положення M_0 :*

$$\Pi = A_{MM_0} = U_0 - U = C_0 - U.$$

Будемо надалі вважати, що нульові точки для функцій $\Pi(x, y, z)$ і $U(x, y, z)$ співпадають. Тоді постійна $C_0 = U_0 = 0$, і за формулою (1.67) одержимо:

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

тобто *потенціальна енергія в будь-якій точці силового поля дорівнює значенню силової функції, взятому з протилежним знаком.*

З цього випливає, що при розгляді всіх властивостей потенціального силового поля можна замість силової функції застосовувати поняття потенціальної енергії. Зокрема, проєкції сили поля визначаються за формулами:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

а роботу потенціальної сили на переміщенні точки з початкового положення M_1 до кінцевого M_2 замість рівності (1.66) можна обчислювати

за формулою

$$A_{(M_1 M_2)} = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2 .$$

Встановимо формули для обчислення силової функції і потенціальної енергії деяких відомих силових полів. Якщо обчислити силову функцію, то на підставі рівняння (1.68) буде відома і потенціальна енергія.

Для однорідного поля сили ваги. Якщо вісь z направити вертикально вгору, то проєкції сили ваги на осі координат будуть $P_x = P_y = 0, P_z = -P$.

Визначимо силову функцію:

$$dU = dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -P dz ,$$

звідки

$$U = -\int P dz = -Pz + C .$$

Потенціальна енергія сили ваги визначиться залежністю

$$\Pi = -U + C_1 = Pz + C .$$

Силова функція і потенціальна енергія лінійної сили пружності. Для лінійної сили пружності, яка розтягнута вздовж осі Ox силою пружності $\vec{F} = -cx\vec{i}$ (див. рис. 1.71), тобто $F_x = -cx, F_y = F_z = 0$. Тоді маємо $dU = dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -cxdx$, звідки (вважаючи $U=0$ при $x=0$) знаходимо силову функцію:

$$U = -\int cxdx = -\frac{cx^2}{2} .$$

Потенціальна енергія лінійної сили пружності визначиться залежністю

$$\Pi = -U = \frac{cx^2}{2} .$$

1.3.5.6 Закон збереження механічної енергії

Припустимо, що всі сили, які діють на систему (зовнішні і внутрішні), є потенціальними. Тоді для кожної з точок системи при її переході з одного положення в інше робота прикладених сил дорівнюватиме:

$$A_k = \Pi_{k_0} - \Pi_{k_1}.$$

Отже, для всіх зовнішніх і внутрішніх сил

$$\sum A_k = \sum \Pi_{k_0} - \sum \Pi_{k_1} = \Pi_0 - \Pi_1,$$

де $\Pi = \sum \Pi_k$ – потенціальна енергія всієї системи.

Підставляючи цей вираз роботи в рівняння (1.64), отримуємо для будь-якого положення системи:

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

або

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const}.$$

Таким чином, при русі системи під дією потенціальних сил сума кінетичної і потенціальної енергій системи в кожному її положенні залишається величиною постійною. У цьому і полягає закон збереження механічної енергії, що є окремим випадком загального фізичного закону збереження енергії. Величина $T + \Pi$ називається повною механічною енергією системи, а сама механічна система, для якої виконується закон, – консервативною системою.

1.3.5.7 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вантаж A масою m_1 опускається на невагомій нитці, перекинутій через невагомий блок B і намотаній на барабан D , заставляючи при цьому колесо E котитися без ковзання по горизонтальній поверхні (рис. 1.94). Барабан D радіусом r жорстко з колесом E радіусом R , їх загальна маса дорівнює m_2 , а радіус інерції відносно горизонтальної осі C дорівнює ρ . Знайти швидкість вантажу A після того, як він зі стану спокою опуститься на висоту h .

Розв'язання

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

Розглядувана система незмінна, оскільки вона складається з твердих тіл, зв'язаних нерозтяжною ниткою, тому $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$. Оскільки в початковому положенні система перебуває в стані спокою, то $T_0 = 0$, і тоді теорема запишеться у вигляді $T = \sum_{k=1}^n A_k^e$.

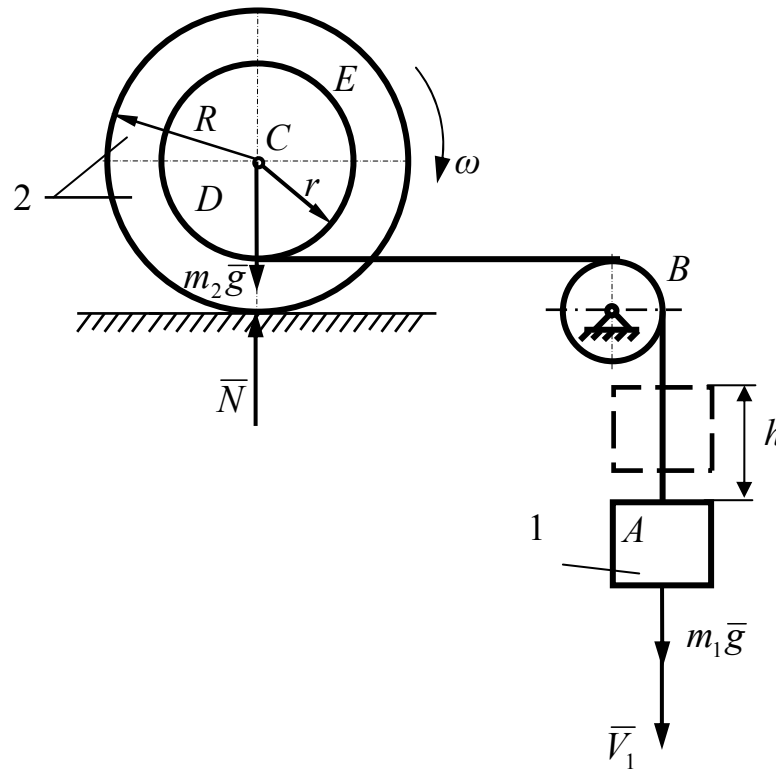


Рисунок 1.94

Обчислимо кінетичну енергію системи двох тіл:

$$T = T_1 + T_2.$$

Для вантажу A (тіло 1), який рухається поступально, кінетична енергія

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2.$$

Барaban D з колесом E (тіло 2) здійснює плоский рух, і його кінетична енергія

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} m_2 \rho^2 \omega^2.$$

Виразимо швидкості V_C та ω через швидкість V_1 вантажу A , величину якої слід визнати.

Оскільки точка P контакту колеса з поверхнею є миттєвим центром швидкостей, то його кутова швидкість

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R-r}, \text{ а швидкість центра колеса } V_C = \omega_2 \cdot R = \frac{V_1 \cdot R}{R-r}.$$

$$\text{Отже, } T_2 = \frac{m_2 V_1^2 R^2}{2(R-r)^2} + \frac{m_2 V_1^2 \rho^2}{2(R-r)^2} = \frac{1}{2} m_2 V_1^2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R-r)^2}.$$

Вираз кінетичної енергії системи набуде вигляду

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_1^2 (R^2 + \rho^2)}{2(R-r)^2} = \frac{V_1^2 [m_1 (R-r)^2 + m_2 (R^2 + \rho^2)]}{2(R-r)^2}.$$

Визначимо роботу зовнішніх сил, які діють на систему:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = m_1 gh.$$

Роботи сил $m_2 \bar{g}$ та реакції \bar{N} дорівнюють нулю, оскільки перша з них перпендикулярна напрямку переміщення точки її прикладення, а нормальна реакція \bar{N} прикладена в миттєвому центрі швидкостей.

Підставимо значення T і $\sum A_k^e$ у формулу теореми:

$$\frac{V_1^2 [m_1 (R-r)^2 + m_2 (R^2 + \rho^2)]}{2(R-r)^2} = m_1 gh,$$

і визначимо V_1 :

$$V_1 = \sqrt{\frac{2m_1 gh (R-r)^2}{m_1 (R-r)^2 + m_2 (R^2 + \rho^2)}}.$$

1.3.6 Принцип Даламбера

1.3.6.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки

Розглянемо невільну матеріальну точку M , що рухається по кривій AB під дією активних сил, рівнодіюча яких дорівнює F (рис. 1.95).

Позначивши через \bar{N} силу реакції, з якою крива AB діє на точку M , запишемо основне рівняння динаміки точки $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}$.

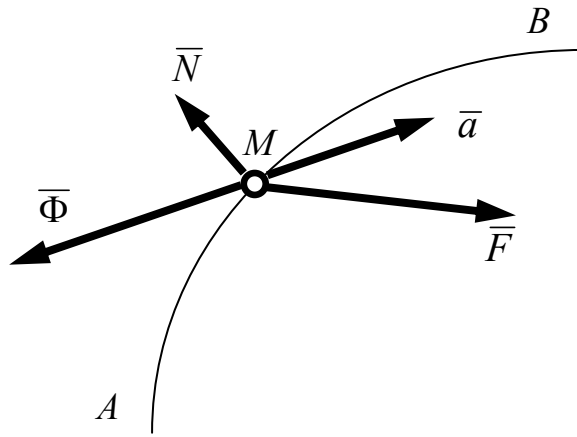


Рисунок 1.95

Перенесемо член $m\vec{a}$ в праву частину рівності: $\vec{F} + \vec{N} - m\vec{a} = 0$, і в розглянемо вектор

$$\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a},$$

Цей вектор, називають даламберовою силою інерції, або просто силою інерції матеріальної точки. Модуль цього вектора дорівнює добутку маси точки на її прискорення, а його напрям протилежний прискоренню точки. Тоді отримуємо основне рівняння динаміки у вигляді рівняння рівноваги сил

$$\vec{F} + \vec{N} - \vec{\Phi} = 0.$$

Це рівняння виражає принцип Даламбера для матеріальної точки: у кожен момент руху матеріальної точки діючі на неї активні сили, сили реакцій накладених на точку в'язей і умовно прикладена до точки сила інерції утворюють врівноважену систему сил.

Метод вирішення завдань з використанням принципу Даламбера (метод кінетостатики) дозволяє зводити завдання динаміки до завдань статки. Він найбільш ефективний при вирішенні першої задачі динаміки, коли потрібно визначити реакції в'язей за відомими кінематичними параметрами руху.

1.3.6.2 Принципу Даламбера для механічної системи

Для механічної системи, що складається з n матеріальних точок, в результаті введення сил інерції $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k$ кожної точки, отримуємо аналогічні рівняння руху у формі рівнянь рівноваги

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Система рівнянь (1.65) висловлює принцип Даламбера для системи матеріальних точок:

При русі механічної системи діючі на точки системи активні сили, реакції в'язей і додані сили інерції точок системи складають врівноважену систему сил, до якої можна застосовувати всі рівняння статyki.

Подамо прикладені до кожної точки системи рівнодіючі активних сил і реакцій в'язей, які розкладені на внутрішню \bar{F}_k^i і зовнішню \bar{F}_k^e сили:

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

Тоді система рівнянь (1.65) може бути подана в іншій формі:

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (1.76)$$

Для кожної матеріальної точки сума моментів цих врівноважених сил відносно будь-якого центра O також дорівнює нулю, тобто

$$\bar{M}_0(\bar{F}_k^e) + \bar{M}_0(\bar{F}_k^i) + \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0, \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (1.77)$$

Складаючи всі рівняння системи (1.76) та системи (1.77), одержимо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^i) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0.$$

За властивостями внутрішніх сил системи їх головний вектор і головний момент дорівнюють нулю ($\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0$, $\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^i) = 0$), тому

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (1.78)$$

Таким чином, *головний вектор і головний момент відносно будь-якого центра прикладених до системи зовнішніх сил і сил інерції всіх її точок дорівнюють нулю.* Цим наслідком з принципу Даламбера користуються при розв'язанні задач.

Спроектувавши рівняння (1.13) на осі координат, отримаємо аналітичні залежності:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz}^e + \sum_{k=1}^n \Phi_{kz} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_z(\bar{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Особливістю умов рівноваги сил у формі рівнянь (1.78) і (1.79) є відсутність у них внутрішніх сил, що робить їх особливо зручними при розв'язанні багатьох задач динаміки системи.

1.3.6.3 Головний вектор і головний момент сил інерції

При практичному використанні рівнянь (1.78) або (1.79) частіше за все не прикладають сили інерції до кожної точки системи з тим, щоб потім знайти їх головний вектор і головний момент, а використовують готові вираження для головного вектора і головного моменту сил інерції механічної системи. Виведемо ці вирази.

Із першого рівняння (1.67) випливає, що головний вектор сил інерції

$$\bar{\Phi} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

а згідно з теоремою про рух центра мас системи головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^e) = \frac{d\bar{K}_0}{dt}, \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = M \cdot \bar{a}_c,$$

де M – маса системи, \bar{a}_c – прискорення центра мас. Тому

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_c,$$

тобто головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює добутку маси системи сил та прискорення центра мас і спрямований протилежно напрямку цього прискорення.

Із другого рівняння (1.78) знаходимо, що головний момент сил інерції відносно довільного центра O дорівнює:

$$\bar{M}_0^\Phi = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{\Phi}_k) = -\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^e).$$

Але за теоремою про зміну кінетичного моменту

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k^e) = \frac{d\bar{K}_0}{dt}$$

і тому

$$\bar{M}_0^\Phi = -\frac{d\bar{K}_0}{dt},$$

тобто головний момент сил інерції системи відносно деякого центра O дорівнює взятій з протилежним знаком похідній за часом від кінетичного моменту системи відносно того самого центра.

Для твердого тіла, яке обертається нерухомої осі Oz , головний момент сил інерції відносно цієї осі дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_z(\bar{\Phi}_k) = -\frac{dK_z}{dt} = -J_z \frac{d\omega}{dt} = -J\varepsilon.$$

За допомогою принципу Даламбера просто і наочно вирішуються завдання, у яких за заданим рухом системи треба визначити реакції накладених на неї в'язей. При цьому виключаються всі наперед невідомі внутрішні сили. При визначенні реакцій внутрішніх в'язей систему слід розчленувати так, щоб шукані реакції стали зовнішніми силами. Принцип надає змоги скласти диференціальні рівняння руху системи і визначити прискорення рухомих тіл.

1.3.6.4 Сили інерції твердого тіла в окремих випадках його руху

Визначимо значення головного вектора та головного моменту сил інерції точок тіла для різних випадків його руху.

Поступальний рух. Якщо тверде тіло рухається поступально, то прискорення його точок однакові. Сили інерції цих точок становлять систему паралельних сил, спрямованих в один бік. Така система сил приводиться до рівнодіючої сили $\bar{\Phi}^*$, що дорівнює головному вектору, тобто

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Лінія дії рівнодіючої сили інерції в цьому випадку проходить через центр мас.

Обертання навколо нерухомої осі. Якщо вибрати за центр приведення сил інерції точку O на осі обертання Oz , то в цій точці одержимо головний вектор і головний момент сил інерції:

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C; \quad \bar{M}_0^\Phi = \frac{-d\bar{K}_0}{dt}.$$

Якщо центр мас перебуває на осі обертання, то $\bar{\Phi} = 0$, і сили інерції точок тіла зводяться до пари сил моментом $M_z^\Phi = -J_z \cdot \varepsilon$.

Плоский рух. Вибравши за центр приведення сил інерції центр мас точку C одержимо, що сили інерції зводяться до головного вектора $\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C$ і головного моменту сил інерції $M_{Cz}^\Phi = -J_{Cz} \cdot \varepsilon$.

1.3.6.5 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Через блок 3 масою $m_3 = 2m$ перекинута гнучка нитка, до кінців якої прикріплені вантаж 1 масою $m_1 = 3m$ і вантаж 2 масою $m_2 = 6m$ (рис. 1.96). Знайти прискорення вантажів і реакцію осі блоку, вважаючи його однорідним круглим диском, а також натяги гілок канатів, що з'єднують шків 2 з вантажами 1 і 3.

Розв'язання

Зображуватимемо на схемі активні сили, що діють на систему: $\bar{P}_1 = m_1\bar{g}$, $\bar{P}_2 = m_2\bar{g}$, $\bar{P}_3 = m_3\bar{g}$ і реакцію осі блоку \bar{X}_0, \bar{Y}_0 (рис. 1.97, а). Оскільки $P_2 > P_1$, то прискорення вантажу M_2 спрямоване вниз, вантажу M_1 – вгору, і кутове прискорення блоку – за ходом годинникової стрілки. Прикладемо до системи сили інерції і головний момент сил інерції блоку ($\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, M_z^\Phi$), модулі яких відповідно дорівнюють:

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 a, \quad \Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 a, \quad M_z^\Phi = J_z \varepsilon = \frac{m_3 r a}{2},$$

оскільки $a_1 = a_2 = a$, $J_z = m_3 r^2 / 2$, $\varepsilon = a / r$.

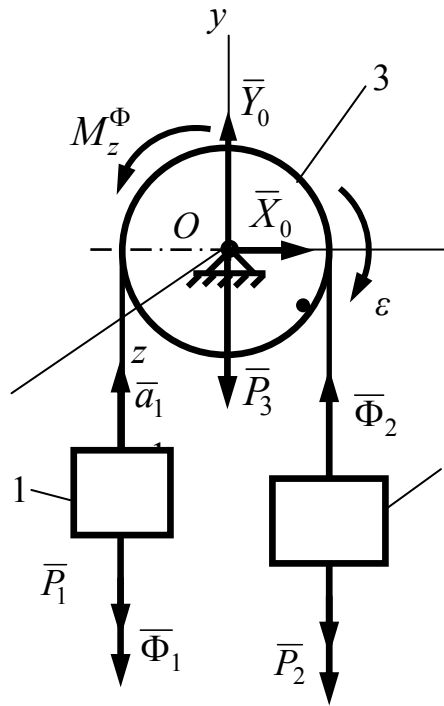


Рисунок 1.96

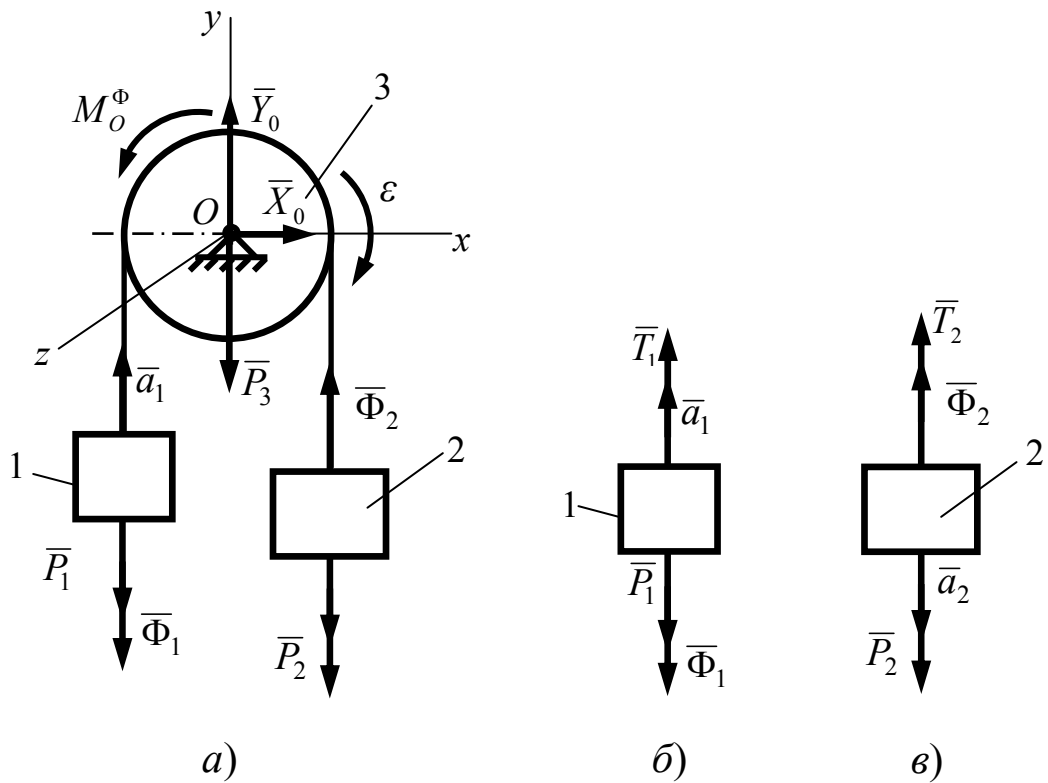


Рисунок 1.97

Щоб знайти прискорення, складемо рівняння моментів отриманої системи сил відносно точки O :

$$\sum M_O(\bar{F}_k) = P_1 r + \Phi_1 r + M_z^\Phi + \Phi_2 r - P_2 r = 0,$$

або

$$P_1 r + m_1 a r + \frac{m_3 r a}{2} + m_2 a r - P_2 r = 0,$$

звідки

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{0,5m_3 + m_1 + m_2} = 0,3g.$$

Щоб знайти реакції осі блока, складемо умови рівноваги сил в проєкціях на осі x і y :

$$\sum F_{kx} = X_0 = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_0 + \Phi_2 - P_1 - \Phi_1 - P_2 - P_3 = 0.$$

Таким чином, реакція осі блока вертикальна і дорівнює:

$$Y_0 = N = P_1 + P_2 + P_3 + \Phi_1 - \Phi_2 = P_1 + P_2 + P_3 + (m_1 - m_2) \cdot a = 10,1mg.$$

Для визначення натягів гілок канатів поділимо систему і розглянемо окремо кожен вантаж.

До тіла 1 прикладені сила ваги $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$, сила інерції $\bar{\Phi}_1$, і реакція каната \bar{T}_1 (рис. 1.97, б). Оскільки ці сили зрівноважені, то

$$T_1 - P_1 - \Phi_1 = 0,$$

звідки

$$T_1 = P_1 + \Phi_1 = m_1(g + a) = 3m(g + 0,3g) = 3,9mg.$$

Розглядаючи рівновагу вантажу 2 під дією сили ваги $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$, сили інерції $\bar{\Phi}_2$ і реакцію каната \bar{T}_2 (рис. 1.97, в), одержимо :

$$T_2 + \Phi_2 - P_2 = 0,$$

або

$$T_2 = P_2 - \Phi_2 = m_2(g - a) = 6m(g - 0,3g) = 4,2mg.$$

Приклад 2. Однорідний стрижень маси M і довжиною обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо нерухомої вертикальної осі, яка проходить перпендикулярно стрижню через його кінець. Визначити

розтягувальну силу в поперечному перерізі стрижня, який віддалений від осі обертання на відстань b .

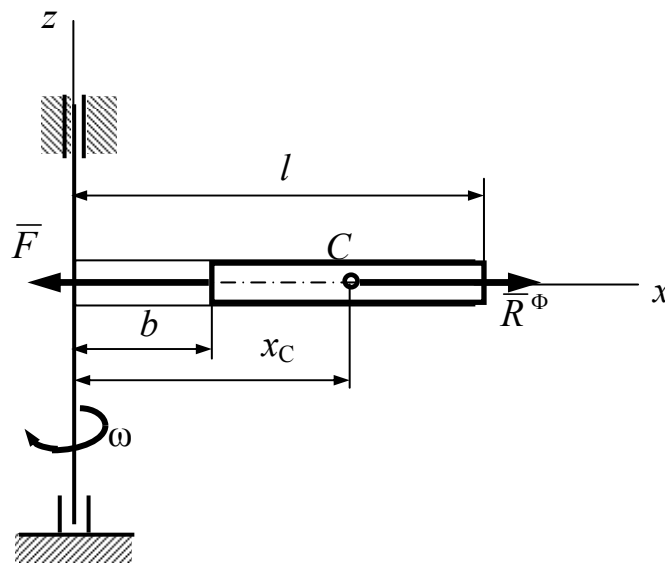


Рисунок 1.98

Розв'язання

Сила, що розтягує стрижень, є внутрішньою. Для її визначення поділимо стрижень у вказаному вище перерізі на дві частини. Розглянемо рух віддаленої від осі обертання частини довжиною $(l - b)$, маса якої становить $m = \frac{M}{l} \cdot (l - b)$, замінивши дію відкинутої частини розтягувальною силою \bar{F} (рис. 1.98). Застосуємо до цієї частини принцип Даламбера, для чого прикладемо в її центрі мас (точка C) головний вектор R^Φ сил інерції часток стрижня, направивши його вздовж стрижня від осі обертання. Оскільки при рівномірному обертанні стрижня прискорення $a_c = m\omega^2 x_c$, де $x_c = 0,5(l - b) + b = 0,5(l + b)$ – віддалення точки C від осі обертання, то остаточно одержимо:

$$R^\Phi = m\omega^2 x_c = \frac{M}{l} (l - b)\omega^2 \cdot 0,5(l + b) = M\omega^2 \frac{(l^2 - b^2)}{2l}.$$

Із умови рівноваги сил в проєкціях на вісь x маємо: $R^\Phi - F = 0$.

Таким чином, розтягувальна сила в поперечному перерізі стрижня, який віддалений від осі обертання на відстань b , дорівнюватиме

$$F = M\omega^2 \frac{(l^2 - b^2)}{2l}.$$

1.3.7 Основні поняття аналітичної механіки. Принцип можливих переміщень та загальне рівняння динаміки

У попередніх розділах були отримані умови рівноваги твердого тіла і досліджено питання про рівновагу системи твердих тіл; при цьому реакції в'язей не виділялися із загальної кількості прикладених до тіла сил. Для вивчення умов рівноваги складних невільних систем, що включають велику кількість тіл, цей метод призводить до надто громіздких обчислень. У цих випадках застосовується принцип можливих переміщень, який встановлює загальні умови рівноваги будь-якої механічної системи з врахуванням тільки активних сил, заздалегідь виключивши з розгляду всі невідомі реакції в'язей. Перш ніж сформулювати принцип можливих переміщень, необхідно ввести деякі нові поняття і визначення, основними з яких є класифікація в'язей та поняття про дійсні і можливі переміщення системи.

1.3.7.1 В'язі та їх класифікація

У техніці найчастіше зустрічаються *невільні* механічні системи, в яких на координати та швидкості їх точок накладені певні обмеження – в'язі. Математично в'язі можуть бути виражені рівняннями або нерівностями, до яких можуть входити координати точок системи, їх швидкості та час. Так наприклад, якщо матеріальна точка рухається по деякій нерухомій поверхні, то в'яззю є ця поверхня. Координати точки в кожен момент часу повинні задовольняти рівнянню поверхні, тобто рівняння цієї поверхні і буде рівнянням в'язі, накладеної на точку. У загальному випадку рівняння в'язі, накладеної на систему точок, записується у вигляді

$$f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0.$$

Залежно від виду цієї функції в'язі поділяються на такі:

- 1) геометричні та кінематичні,
- 2) голономні і неголономні,
- 3) стаціонарні і нестаціонарні,
- 4) утримуючі і неутримуючі.

Геометричні в'язі накладають обмеження тільки на координати точок системи, а *кінематичні* – ще й на їх швидкості.

До *голономних* відносяться всі геометричні в'язі, а також ті з кінематичних, які шляхом інтегрування можуть бути зведені до геометричних. Кінематичні в'язі, рівняння яких не можна проінтегрувати, тобто не можна звести до геометричних, є *неголономними* в'язями.

Якщо до рівняння в'язі час явно не входить, то в'язь називають *стаціонарною*, якщо ж входить, – *нестационарною*. Нестационарні в'язі звичайно реалізуються за допомогою тіл, які рухаються або тіл, що деформуються.

В'язі, які обмежують рух лише в одному напрямку, виражаються математичними нерівностями і називаються *утримуючими* або *однобічними*. *Неутримуючі* (двобічні) в'язі обмежують рух у двох протилежних напрямках. Вони виражаються математичними рівняннями.

1.3.7.2 Можливі переміщення

Особливість розглядуваного принципу полягає в тому, що при його застосуванні ефект дії в'язей враховується не шляхом впровадження невідомих наперед реакцій, а шляхом надання точкам системи можливих переміщень.

Можливими переміщеннями системи називають будь-яку сукупність уявних (віртуальних) нескінченно малих переміщень точок системи, які допускаються в цей момент усіма накладеними на систему в'язями.

Можливі переміщення точок системи позначають символами $\delta\vec{r}$, δx , δy , δz , δs , направляючи їх за напрямком швидкостей точок. Кутові можливі переміщення тіл $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\alpha$ направляють за напрямком кутових швидкостей цих тіл. Співвідношення можливих переміщень точок і тіл, кутових можливих переміщень тіл відповідає співвідношенню їх швидкостей, тобто $\frac{\delta s_A}{\delta s_B} = \frac{V_A}{V_B}$; $\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

З усіх можливих переміщень точок і тіл системи виділяють *незалежні можливі переміщення*, через які можна виразити усі інші можливі переміщення цієї системи. *Кількість незалежних можливих переміщень, які можна надати точкам системи у фіксований момент часу, називається числом степенів вільності цієї системи.*

1.3.7.3 Можлива робота сили. Ідеальні в'язі

Робота сили на одному з можливих переміщень точки її прикладання називається *можливою роботою сили*:

Її обчислюють за звичайними формулами для елементарної роботи:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z, \text{ або } \delta A = M \cdot \delta\varphi$$

З поняттям можливої роботи пов'язано ще один розподіл в'язей на ідеальні і неідеальні. *Ідеальною називається в'язь, сума робіт сил реакцій яких на будь-якому можливому переміщенні точок системи дорівнює нулю*, тобто умова ідеальності в'язі виражається залежністю

$$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (k=1,2,\dots,n)$$

де \bar{R}_k – реакція в'язі, що діє на k -ту точку системи, а n – кількість матеріальних точок системи. Якщо ж сума можливих робіт реакцій в'язей відмінна від нуля, то в'язь називається *неідеальною*. До ідеальних в'язей відносяться всі в'язі без тертя і ті з в'язей з тертям, які здійснюються коченням без ковзання (якщо знехтувати тертям кочення).

1.3.7.4 Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень визначає необхідну і достатню умову рівноваги механічної системи з ідеальними голономними утримуючими стаціонарними в'язями. Цей принцип широко використовується не лише в теоретичній механіці, але і в інших галузях механіки, таких як: опір матеріалів, будівельна механіка, гідравліка і т. п.

Принцип можливих переміщень полягає в такому: *для рівноваги механічної системи з голономними, стаціонарними, утримуючими, ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил, що діють на систему, на будь-якому можливому переміщенні системи з розглядуваного положення рівноваги дорівнювала нулю*.

Дійсно, якщо механічна система, яка складається з n матеріальних точок, перебуває в стані рівноваги, то кожна її точка буде зрівноваженою. Тому

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0,$$

де \bar{F}_k – активна сила, що діє на k -ту точку системи;

\bar{R}_k – реакція ідеальної в'язі.

Надавши системі довільного можливого переміщення $\delta \bar{r}_k$, додамо останньому виразу іншого вигляду $(\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0$. Складаючи ці

рівняння, одержимо для всієї системи: $\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r} = 0$, або

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Але за визначенням ідеальних в'язей $\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$, тому

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \delta A_k^a = 0,$$

що і необхідно було довести.

Рівняння (1.70) може бути подано в координатній або в натуральній формах:

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k) = 0.$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проєкції активних сил на осі координат;

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – проєкції $\delta \bar{r}_k$ на осі координат.

Користуючись виразом елементарної роботи в натуральній формі, одержимо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta S_k \cdot \cos \alpha_k = 0$$

Замість $3n$ рівнянь рівноваги системи, яка складається з n точок, згідно з принципом можливих переміщень одержують стільки рівнянь рівноваги, скільки степенів вільності має система за наявності голономних в'язей.

1.3.7.5 Загальне рівняння динаміки

Як було показано, принцип можливих переміщень надає загального методу розв'язання задач статки, а принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статки для запису динамічних рівнянь руху у вигляді рівнянь рівноваги. Послідовно застосовуючи ці два принципи одночасно, можна одержати загальний метод розв'язання задач динаміки.

Розглянемо систему з n матеріальних точок, на яку накладені ідеальні в'язі. Згідно з принципом Даламбера маємо:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n,$$

де \bar{F}_k – рівнодійна активних сил, прикладених до k -тої точки системи;

\bar{R}_k – рівнодійна реакцій в'язей;

$\bar{\Phi}_k$ – сила інерції k -тої точки ($\bar{\Phi}_k = m_k \bar{a}_k$).

Помноживши скалярно кожне з цих співвідношень на можливе переміщення точки $\delta \bar{r}_k$ і підсумовуючи за усіма точками системи,

отримаємо:
$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

або
$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^r + \sum_{k=1}^n \delta A_k^\Phi = 0.$$

Але за означенням ідеальних в'язей сума можливих робіт їх реакцій дорівнює нулю, тому остаточно отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^\Phi = 0.$$

Рівняння (1.72), яке називають загальним рівнянням динаміки, дозволяє сформулювати принцип Даламбера – Лагранжа: під час руху механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними, утримуючими в'язями в кожен момент часу сума елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

В аналітичній формі рівняння (1.72) має вигляд

$$\sum_{k=1}^n [(F_{kx} + \Phi_{kx}) + (F_{ky} + \Phi_{ky}) + (F_{kz} + \Phi_{kz})] = 0.$$

Рівняння (1.72) або (1.73) дозволяють скласти диференціальні рівняння руху механічної системи. Якщо при цьому система є сукупністю яких-небудь твердих тіл, то для складання рівнянь треба до активних сил, що діють на кожне тіло, додати прикладену у будь-якому центрі силу, яка дорівнює головному вектору сил інерції, і парі з моментом, який дорівнює головному моменту сил інерції відносно цього центра (чи одну з цих величин, (див. підпункт 1.3.4.4), а потім застосувати принцип можливого переміщення.

1.3.7.6 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вантаж Q піднімається за допомогою гвинтового домкрата, який починає рухатися за допомогою рукоятки OA , довжина якої $l = 0,6$ м. До кінця рукоятки перпендикулярно їй прикладена сила $P = 160$ Н. Визначити величину сили ваги вантажу Q , якщо крок гвинта домкрата $h = 12$ мм.

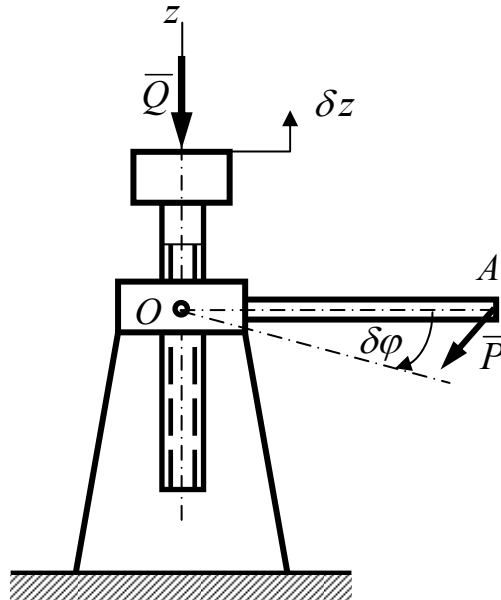


Рисунок 1.99

Розв'язання

Механізм домкрата, на який накладені ідеальні в'язі, знаходиться під дією активних сил \bar{P} і \bar{Q} (рис. 1.99). Направимо вісь z вздовж осі гвинта за вертикаллю вгору. Для розв'язання задачі застосуємо принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Надамо можливого кутового переміщення $\delta\varphi$ рукоятці OA . При цьому гвинт одержить поступальне переміщення δz . Тоді рівняння принципу можливих переміщень набуде вигляду $P \cdot l \cdot \delta\varphi - Q \cdot \delta z = 0$.

Для визначення залежності встановимо, що при повороті рукоятки на кут 2π радіан гвинт переміститься за вертикаллю на відстань h , а при повороті на кут $\delta\varphi$ – на δz . Тоді з умови пропорційності кінцевих і можливих переміщень системи $\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta z}{h}$ знаходимо: $\delta\varphi = \frac{2\pi}{h} \delta z$.

Підставляючи це значення $\delta\phi$ в попереднє рівняння, одержимо:

$$\left(P \cdot l \frac{2\pi}{h} - Q \right) = 0.$$

Звідки знайдемо: $Q = P \cdot \frac{2\pi l}{h} = 160 \cdot \frac{2\pi \cdot 0,6}{0,012} = 50,2 \text{ кН}.$

Приклад 2. Дві горизонтальні балки AC і CB з'єднані циліндричним шарніром C (рис. 1.100, а). Опора B стоїть на котках, а переріз A балки AB защемлений у стіні. До балки AC прикладена вертикальна сила P_1 і пара сил з моментом M , а до балки CB – сила P_2 . Розміри наведені на рисунку 1.100. Визначити реакції в'язей в точках A і B .

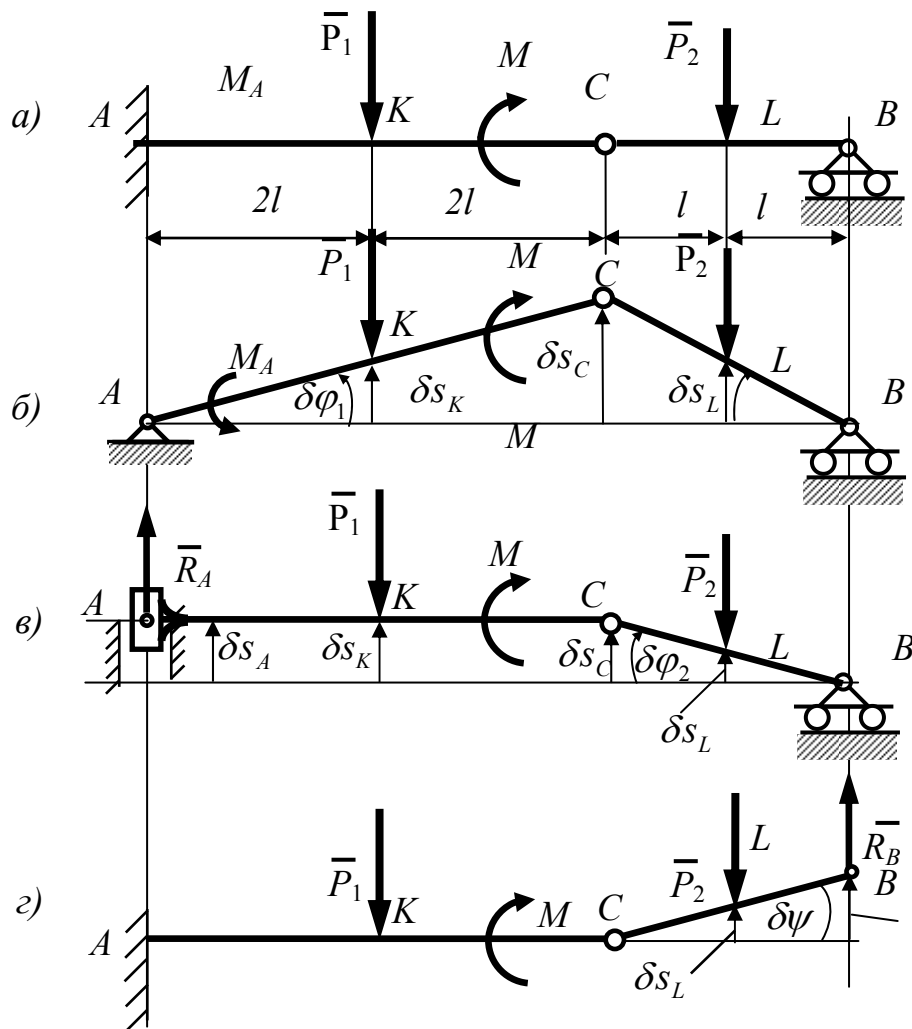


Рисунок 1.100

Розв'язання

Складена балка AB знаходиться в стані рівноваги під дією плоскої системи паралельних сил, яка включає активні сили \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , M , реакції \bar{R}_B рухомого циліндричного шарніра в точці B та реакцій \bar{X}_A , \bar{Y}_A , M_A жорсткого защемлення в точці A . Оскільки всі активні сили вертикальні, то можна зразу встановити, що горизонтальна реакція \bar{X}_A дорівнює нулю.

Для визначення реактивного моменту M_A замінимо жорстке защемлення в перерізі A нерухомим шарніром з додаванням реактивного моменту M_A . Надамо балці AC поворотного можливого переміщення $\delta\varphi_1$. При цьому складена балка займе положення, зображене на рисунку 1.100, б. Позначимо через δs_K , δs_C , δs_L можливі переміщення точок K , C і L , а через $\delta\varphi_2$ – можливе переміщення балки CB . Складемо рівняння принципу можливих переміщень:

$$M_A \cdot \delta\varphi_1 - P_1 \cdot \delta s_K - P_2 \sin \alpha \cdot \delta s_L - M \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Скориставшись подібністю трикутників, знайдемо співвідношення між можливими переміщеннями, які входять до цього рівняння:

$$\delta s_K = \delta\varphi_1 \cdot l, \quad \delta\varphi_1 \cdot 2l = \delta s_C = \delta\varphi_2 \cdot 2l, \quad \delta s_L = \delta\varphi_2 \cdot l = \delta\varphi_1 \cdot l.$$

$$\text{Отже, } M_A \cdot \delta\varphi_1 - M \cdot \delta\varphi_1 - P_1 \cdot l \cdot \delta\varphi_1 - P_2 \cdot l \cdot \delta\varphi_1 = 0$$

звідки
$$M_A = M + (P_1 + P_2) \cdot l.$$

Для визначення вертикальної складової реакції \bar{Y}_A надамо балці AC рухомості у вертикальному напрямку, замінивши защемлення в стіні реакцією \bar{Y}_A та жорстко зв'язаним з балкою AC повзуном, здатним переміщуватись у вертикальних напрямках (див. рис. 1.100, в).

Надамо точкам балки AC можливих переміщень $\delta s_A = \delta s_K = \delta s_C$. При цьому балка CB одержить можливе переміщення $\delta\varphi_2 = \delta s_A / 2l$, а точка L переміститься на $\delta s_L = \delta\varphi_2 \cdot l = 0,5\delta s_A$.

Складемо рівняння принципу можливих переміщень:

$$Y_A \cdot \delta s_A - P_1 \cdot \delta s_K - P_2 \cdot \delta s_L = 0.$$

Враховуючи встановлені пере цим співвідношення між можливими переміщеннями, одержимо:

$$Y_A \cdot \delta s_A - P_1 \cdot \delta s_A - P_2 \cdot 0,5\delta s_A = 0,$$

звідки
$$Y_A = P_1 + 0,5P_2.$$

Для визначення реакції \bar{R}_B подумки відкинемо опору B , компенсуючи відсутність в'язі опорною реакцією \bar{R}_B . Надамо можливого переміщення δS_B за вертикаллю вгору. При цьому балка CB повернеться на кут $\delta\psi = \frac{\delta S_B}{2l}$, а точка L переміститься на $\delta s_L = \delta\psi \cdot l = 0,5\delta S_B$. Складемо рівняння принципу можливих переміщень:

$$R_B \cdot \delta s_B - P_2 \cdot \delta s_L = 0.$$

Підставивши сюди наведене вище співвідношення між можливими переміщеннями, одержимо:

$$R_B \cdot \delta s_B - P_2 \cdot 0,5\delta s_B = 0,$$

звідки $R_B = 0,5P_2$.

Приклад 3. По похилій грані призми 1 масою m_1 , яка розміщена на гладенькій горизонтальній площині, починає ковзати (без тертя) вантаж 2 масою m_2 (рис. 1.101). Кут нахилу грані призми до горизонталі становить α . Визначити прискорення призми, на яку діє горизонтальна сила F .

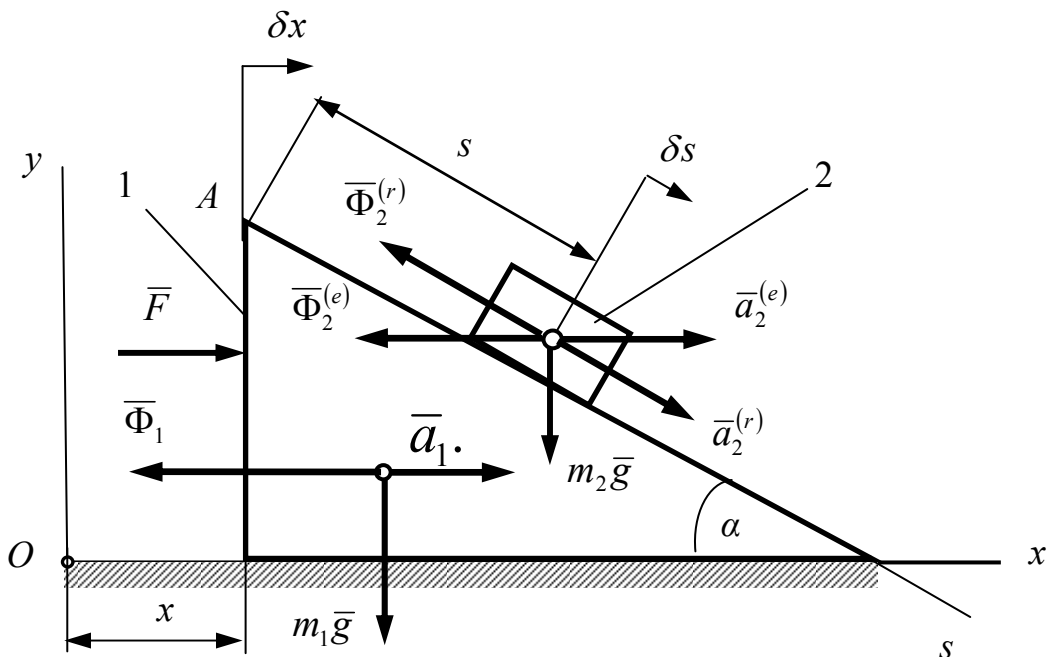


Рисунок 1.101

Розв'язання

Розглянемо рух механічної системи «призма – вантаж», на яку накладені ідеальні в'язі. Система має два степеня вільності: вантаж може

переміщуватись відносно призми та разом із призмою. Отже, її положення визначається двома незалежними між собою параметрами, наприклад координатою x , що визначає положення призми на горизонтальній площині, та відстанню s вантажу від вершини A призми (див. рис. 1.100). Відповідно до цих координат встановимо незалежні можливі переміщення системи δx та δs .

Зобразимо на рисунку 1.101 діючі на систему активні сили \bar{F} , $\bar{P}_1 = m_1 \bar{g}$, $\bar{P}_2 = m_2 \bar{g}$ і додамо до них головні вектори сил інерції $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2^{(e)}$, $\bar{\Phi}_2^{(r)}$ тіл системи, направивши їх протилежно відповідним прискоренням у припущенні, що прискорення тіл спрямовані у бік зростання вибраних координат $a_2^e = \ddot{x}$.

Для призми, прискорення якої $a_1 = \ddot{x}$, модуль сили інерції буде $\Phi_1 = m_1 \ddot{x}$. Для вантажу, поступальний рух якого розглядаємо як складний, його абсолютне прискорення $\bar{a}_2 = \bar{a}_2^{(e)} + \bar{a}_2^{(r)}$ включає переносне прискорення $a_2^{(e)} = \ddot{x}$ та відносне прискорення $a_2^{(r)} = \ddot{s}$. Отже, головний вектор сил інерції вантажу має дві складові: переносну $\Phi_2^{(e)} = m_2 \ddot{x}$ та відносну $\Phi_2^{(r)} = m_2 \ddot{s}$ сили інерції.

Складемо два загальні рівняння динаміки, почергово надаючи системі таких можливих переміщень, при яких змінюється тільки одна з координат. При зміні координати x (коли $\delta x > 0$, а $\delta s = 0$) сума елементарних робіт діючих сил та всіх сил інерції дорівнює нулю. Тоді

$$F \delta x - \Phi_1 \delta x - \Phi_2^{(e)} \delta x - \Phi_2^{(r)} \cos \alpha \delta x = 0,$$

або (при умові, що $\delta x \neq 0$)

$$F - (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 \ddot{s} \cos \alpha = 0. \quad (a)$$

Аналогічно при зміні координати s (коли $\delta s > 0$, а $\delta x = 0$)

$$F \delta x - \Phi_1 \delta x - \Phi_2^{(e)} \delta x - \Phi_2^{(r)} \cos \alpha \delta x = 0$$

$$m_2 g \sin \alpha \cdot \delta s - \Phi_2^{(e)} \cos \alpha \cdot \delta s - \Phi_2^{(r)} \cos \alpha \cdot \delta s = 0,$$

або

$$m_2 g \sin \alpha - m_2 \ddot{x} \cos \alpha - m_2 \ddot{s} = 0. \quad (b)$$

З рівняння (б) знаходимо, що $\ddot{s} = g \sin \alpha - \ddot{x} \cos \alpha$.

Підставивши це значення в рівняння (а), визначимо прискорення призми:

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{2F - m_2 g \sin 2\alpha}{2(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)}.$$

2 ЕЛЕМЕНТИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Вступ. Метод перерізів

2.1.1 Основні поняття і завдання науки про опір матеріалів. *Стисла історична довідка*

У процесі своєї виробничої діяльності людина створює і використовує безліч різних конструкцій. До них відносяться всілякі машини і механізми, прилади, будівельні споруди і т. д. Усі вони в процесі проєктування розраховуються так, щоб при дії заданих навантажень забезпечувалася їх міцність, жорсткість і стійкість.

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції і її деталей витримувати певне навантаження, не руйнуючись.

Під жорсткістю розуміють здатність конструкції і її елементів протистояти зовнішнім навантаженням відносно деформації (тобто зміни форми і розмірів). При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певної величини, що встановлюється відповідно до вимог, які висуваються до конструкції.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості, а, отже, була надійною в експлуатації, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначати відповідні розміри залежно від величини і характеру діючих сил.

На перший погляд, може здатися, що для надійного опору елементів конструкції зовнішньому навантаженню досить збільшити їх розміри. Дійсно, іноді це викликає бажані результати. Проте в тих випадках, коли власна вага складає істотну частину діючих на конструкцію навантажень, збільшення розмірів її елементів, а значить і ваги, не підвищить міцність. Збільшення розмірів рухомих деталей механізмів і машин викликає зростання сил інерції, підвищує навантаження, а це небажано, оскільки також може призвести до руйнування.

За допомогою методів опору матеріалів ведуть практичні розрахунки і визначають необхідні (надійні) розміри деталей машин і різних будівельних споруд. Одночасно з умовами надійності до конструкції висуваються вимоги її дешевизни і легкості. Вимоги надійності і найбільшої економії суперечать одна одній. Перша зазвичай збільшує витрати матеріалу (чи завжди збільшення ваги викликає зростання міцності?), друга ж вимагає зниження цієї витрати. Ця суперечність є

найважливішим елементом наукових методик, які обумовлюють розвиток науки «Опір матеріалів».

У деяких випадках інженерові, крім основних вимог – надійності і найбільшої економії, доводиться при виконанні розрахунків задовольняти й іншим умовам, наприклад: вимогам швидкості споруди (при відновленні зруйнованих споруд), мінімальної ваги (при конструюванні літаків) і т.д.

Опір матеріалів у теоретичній частині базується на вищій математиці і теоретичній механіці, у першу чергу на законах статички. Без знання основ теоретичної механіки вивчення курсу опору матеріалів взагалі неможливе. На відміну від теоретичної механіки опір матеріалів розглядає задачі, в яких найбільш істотними є властивості тіл, що *деформуються*, а закони руху тіла як жорсткого цілого не тільки відступають на другий план, але і у ряді випадків є просто неістотними.

У практичній частині опір матеріалів базується на фізиці твердого тіла і матеріалознавстві. Опір матеріалів не вичерпує всіх питань розрахунку на міцність. Методи опору матеріалів не залишаються постійними. Вони змінюються разом з виникненням нових завдань і нових вимог практики. При веденні інженерних розрахунків слід пам'ятати, що успіх практичного розрахунку лежить не стільки в застосуванні складного математичного апарату, скільки в умінні вникати в істоту досліджуваного об'єкта, знайти найбільш вдалі припущення і довести розрахунок до простих числових результатів.

Опір матеріалів, як і всяка інша наука, має свою історію, витоки якої йдуть у глиб століть. У деяких випадках будівельники якнайдавніших споруд (спираючись, мабуть, на інтуїцію і досвід своїх попередників) визначали розміри цих споруд настільки вдало, що їх творіння викликають здивування і захоплення і в наші дні. В інших же випадках, навпаки, споруди, що зводяться, виявлялися або дуже масивними, або недостатньо міцними. На базі згаданих успіхів і невдач стала складатися наука про міцність. Основи її були сформульовані в працях великого італійського вченого Г. Галілея (1564–1642), який першим провів і описав досліди щодо згинання балок. Він вперше поставив питання про необхідність аналітичних розрахунків для оцінювання здібності тіл чинити опір дії зовнішніх сил.

Наступною віхою в розвитку науки про міцність було відкриття основного закону деформації пружних тіл (деформація пружного тіла пропорційна діючим на нього зусиллям), опублікованої в 1678 році англійським ученим Р. Гуком. Ця залежність відома під назвою закону Гука, який має виключно важливе значення в опорі матеріалів.

У Росії перші дослідження у сфері міцності були проведені в 40-х роках XVIII століття. Найважливіший внесок у розвиток теорії згинання і стійкості стрижнів зробив академік Л. Ейлер (1707–1783).

На початку XIX століття широкої популярності набувають роботи французького вченого Нав'є (1785–1836), який написав перший систематичний курс опору матеріалів. Сильний поштовх до розвитку науки про міцність одержала в період будівництва металевих мостів. До цього періоду відносяться праці видатного російського вченого Д. І. Журавського (1821–1891), які набули визнання у всьому світі.

У кінці XIX – початку XX століття важливі дослідження у сфері міцності та стійкості були проведені Х. С. Головіним, Ф. С. Ясинським, І. Г. Бубновим, А. В. Гадоліним. Велика роль у розвитку науки про опір матеріалів, а також у пропаганді і розвитку ідей, що сформувалися до початку XX століття, належала С. П. Тимошенко. Написані ним підручники здобули всесвітню популярність.

У всю широчінь розвернулася наука про міцність у подальші роки, в епоху науково-технічної революції, коли над питаннями міцності стали працювати вже не окремі вчені, а цілі наукові школи. Провідні працівники вітчизняних шкіл: Н. Н. Давіденков, В. З. Власов, Н. З. Беляєв, С. В. Серенсен, А. А. Уманський, І. М. Рабінович, Н. У. Корноухов, Н. Н. Афанасьєв, С. Д. Пономарьов, Г. С. Писаренко і ціла низка їхніх послідовників.

2.1.2 Реальний об'єкт і розрахункова схема. Типові елементи конструкцій. Допущення опору матеріалів

У опорі матеріалів, як і у всякій природознавчій науці, дослідження питання про міцність реального об'єкта починається з вибору розрахункової схеми. Приступаючи до розрахунку конструкції, слід перш за все, встановити, що в даному випадку є істотним, а що неістотним, необхідно провести схематизацію об'єкта і відкинути всі чинники, які не можуть помітним чином вплинути на роботу системи в цілому. Такого роду спрощення завдання або вибір розрахункової схеми у всіх випадках абсолютно необхідні, оскільки рішення з повним обліком всіх властивостей реального об'єкта є принципово неможливим через їх очевидну невичерпність. Наприклад, потрібно провести розрахунок на міцність каната підйомника. У першу чергу треба врахувати вагу вантажу, що піднімається, прискорення, з яким він рухається, а при великій висоті підйому і вагу самого каната. Водночас очевидно треба відкинути вплив таких неістотних чинників, як аеродинамічний опір, що виникає при підйомі кліті, сили барометричного тиску на різних висотах, зміну температури і висоти та інші чинники.

Реальний об'єкт, звільнений від неістотних особливостей, називається розрахунковою схемою.

Для одного і того самого реального об'єкта може бути запропоновані декілька розрахункових схем, у першу чергу, залежно від необхідної точності і від того, яка сторона явища цікавить дослідника в даному конкретному випадку. Так, якщо в згаданому прикладі підйомника потрібно оцінити тільки міцність каната, то вантаж і кліть допустимо розглядати як жорстке ціле і звести їх до сили, прикладеної на кінці каната (рис. 2.1, а).

Якщо ж необхідно вирішити питання про міцність самої кліті, то її не можна вважати абсолютно твердим тілом. Її конструктивні особливості треба розглядати окремо і відповідно до цього вибирати для неї іншу розрахункову схему (рис. 2.1, б).

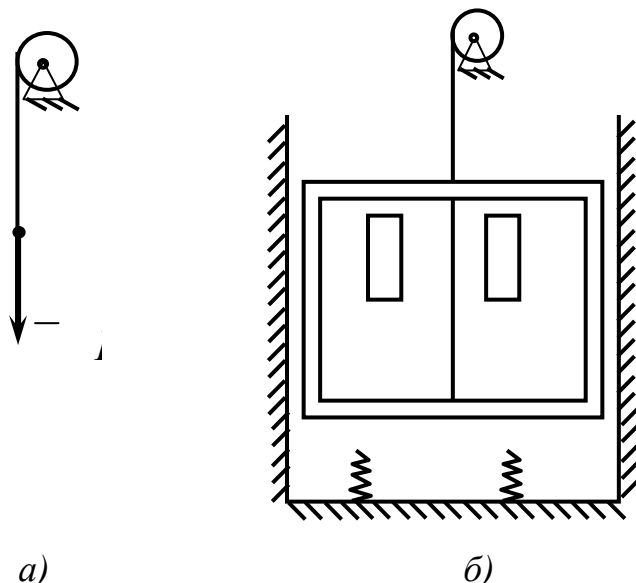


Рисунок 2.1

Якщо для одного і того самого об'єкта можуть бути запропоновані декілька розрахункових схем, то, з іншого боку, одній розрахунковій схемі може бути поставлено у відповідність багато різних об'єктів. Остання обставина є вельми важливою, оскільки, досліджуючи деяку схему, можна одержати рішення цілого класу задач, які зводяться до даної схеми.

Так, наприклад, на рисунку 2.2 наведені розрахункові схеми, які можна розглядати, як:

- а) позацентрово стиснутий стрижень (колона свердлувального верстата, частина кліті прокатного стану і т. д.);
- б) раму під дією навантаження (каркас поперечника цеху, кліть прокатного стану і т. д.);
- в) нерозрізну балку (залізничний міст, валок прокатного стану і т. д.).

При виборі розрахункової схеми вводиться низка допущень, з яких основними є такі:

- а) перше допущення передбачає *схематизацію властивостей матеріалу*, згідно з яким матеріал конструкції вважається однорідним суцільним середовищем і є ізотропним.

Суцільність (або безперервність) означає, що весь об'єм конструкції повністю заповнений речовиною і не містить порожнеч. Передбачається, що матеріал суцільно заповнює форму тіла. Атомістична теорія дискретної будови речовини до уваги не береться.

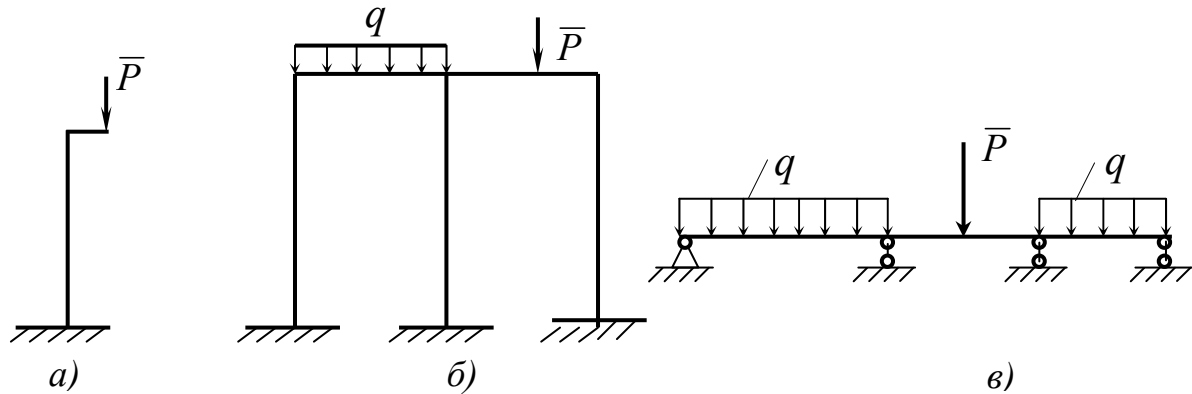


Рисунок 2.2

Однорідність означає незалежність властивостей матеріалу від величини виділеного з тіла об'єму. Насправді матеріал через молекулярну будову не може бути однорідним. Це стосується і металів, структура яких складається з безлічі хаотично розташованих кристалів. Проте вказані особливості не є істотними, оскільки йдеться про дослідження конструкцій, розміри яких перевищують не тільки розміри атомів, але і розміри кристалічних зерен.

Ізотропним вважається суцільне середовище, якщо вона має однакові властивості у всіх його частинах і за всіма напрямками. В анізотропних матеріалах властивості в різних напрямках відрізняються. До анізотропних матеріалів відносяться деревина, властивості якої вздовж і поперек волокон істотно різні, армовані матеріали, папір, тканини та ін.;

б) матеріал конструкції працює в межах пружності.

Пружністю називається властивість тіла відновлювати початкові розміри і форму після зняття навантажень, які викликали деформацію.

Деформації, які повністю зникають після зняття навантаження, називаються пружними.

Досвід показує, що деформації є повністю пружними лише до тих пір, поки навантаження не перевищує деякого певного значення, залежного від пружних властивостей даного матеріалу.

При навантаженнях, більших за цю межу, деформація зникає вже не повністю. У таких випадках повна деформація складається з пружної і залишкової (пластичної);

в) деформації тіла малі в порівнянні з розмірами тіла, яке деформується. Це дозволяє рівняння статички складати для тіла, що не деформується, і у висновках використовувати аналізування нескінченно малих величин;

- г) до деякої межі вантаження деформації тіл пропорційні навантаженню. Це допущення з достатньою точністю для практики підтверджується досвідом і називається законом Гука;
- д) застосовується принцип суперпозиції, тобто вважається, що ефект від суми дій дорівнює сумі ефектів від кожної дії;
- е) вводиться гіпотеза плоских перерізів, згідно з якою перерізи, плоскі до деформації, залишаються такими ж і під час деформації.

Окрім допущення про схематизацію властивостей матеріалу, враховують *схематизацію геометрії реального об'єкта*. Кожна конструкція складається з окремих деталей і елементів. З геометричної точки зору вони можуть мати вид стрижня (бруса), оболонки, пластини або масиву.

Стрижень (брус) – тіло, одне з вимірювань якого (довжина) значно більше двох інших (рис. 2.3).

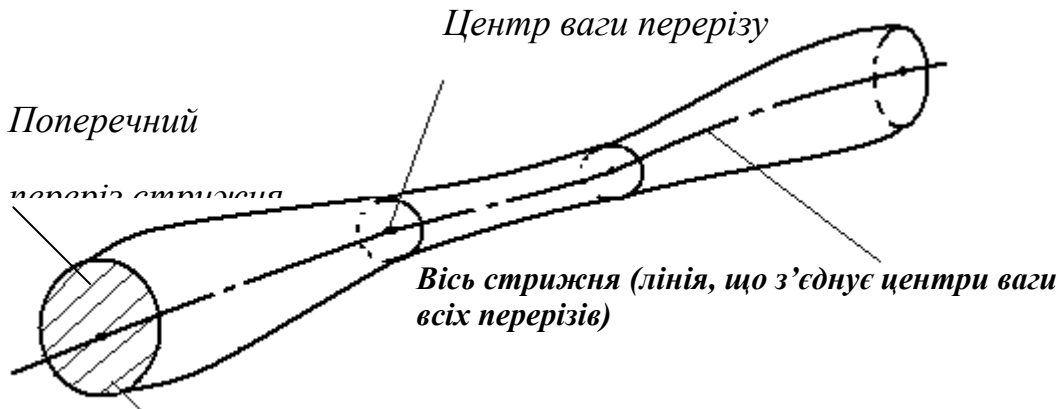


Рисунок 2.3

Стрижні бувають суцільні (рис. 2.4, а), тонкостінні (рис. 2.4, б) та порожнисті (рис. 2.4, в).

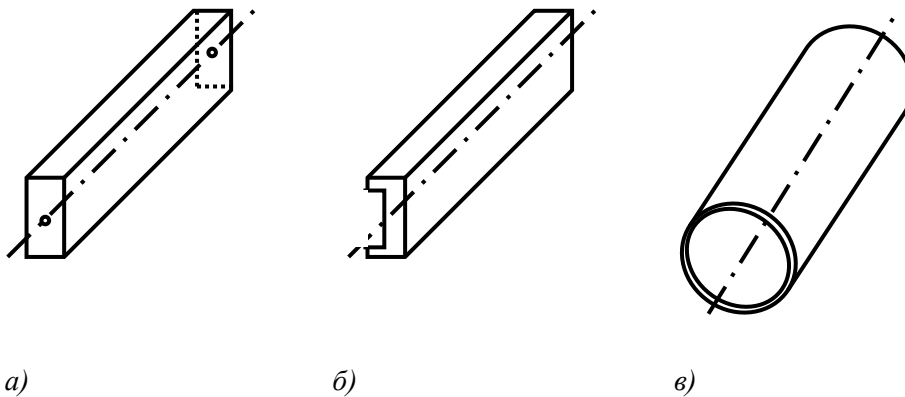


Рисунок 2.4

Серед стрижнів у свою чергу розрізняють балки, колони, стояки та ін. Це пов'язано головним чином з призначенням стрижнів і тією роллю, яку вони грають у конструкціях. Наприклад, поняття «балка» вживається для стрижнів, що працюють на згинання, а поняття «колона» і «стояк» – для вертикальних стрижнів, які працюють переважно на стискання, і т. д.

Оболонка – це тіло, у якого один розмір (товщина) значно менше двох інших (рис. 2.5, а).

Пластина – плоска оболонка (рис. 2.5, б).

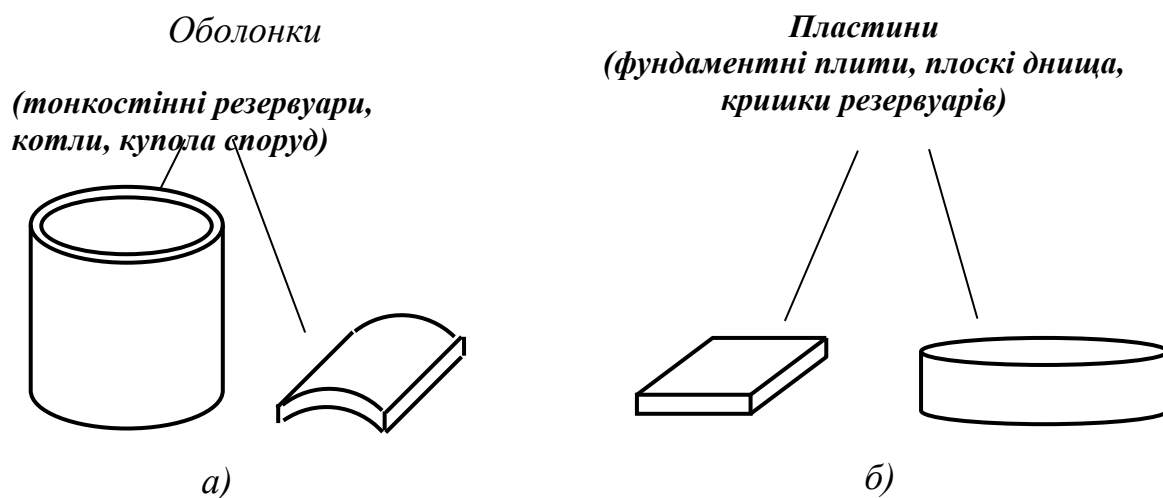


Рисунок 2.5

Масив – тіло, у якого всі три розміри порівняні (фундаменти, підпірні стінки).

Крім схематизації властивостей матеріалу і геометрії об'єктів враховують схематизацію систем сил.

В опорі матеріалів при схематизації реальних об'єктів вживається поняття *зосередженої сили*, як сили, яка передається на елементи конструкції через площадку, розмірами якої можна нехтувати в порівнянні з розмірами самого елемента. Наприклад, при розрахунку бруса, показаного на рисунку 2.6, а, можна розглядати вантаж \bar{P} як силу, прикладену в точці (рис. 2.6, б).

Таке спрощення є природним, оскільки розміри площадки, якою відбувається передача сили на брус, малі в порівнянні із загальними розмірами бруса. Ясно, що в реальних конструкціях передача зусиль у точці не можлива і зосереджена сила є поняттям, властивим тільки розрахунковій схемі.

Розподіленими навантаженнями називають сили, прикладені безперервно впродовж деякої довжини або площі конструкції. Шар піску, насипаний на тротуар, є розподіленим навантаженням. Власна вага балки якого-небудь перекриття є навантаженням, розподіленим за довжиною елемента. Розподілене навантаження може бути рівномірним або нерівномірним.

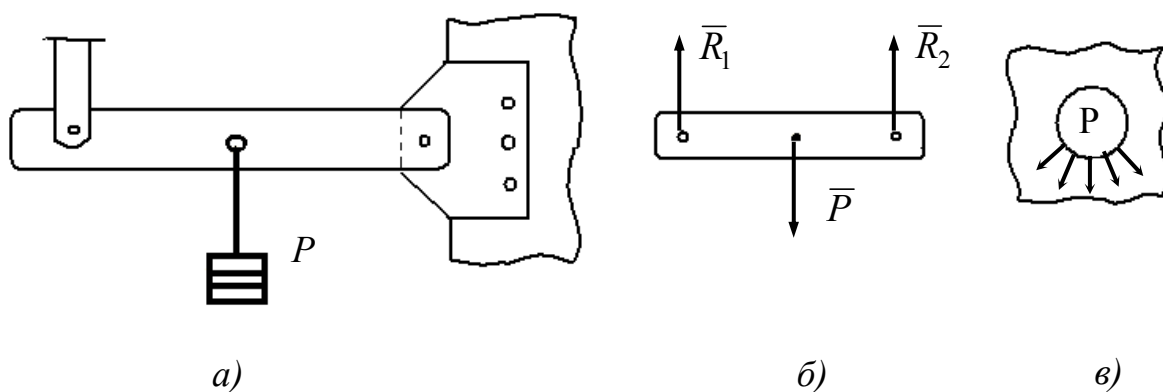


Рисунок 2.6

Заміна розподілених сил зосередженою рівнодіючою можлива тільки у тому випадку, коли аналізується брус в цілому, тобто в об'ємах, що істотно перевищують об'єм контактної зони. Якщо в розглянутому прикладі (рис. 2.6, в) необхідно розрахувати саму провущину, до якої підвішено вантаж, то використання зосередженої сили стає неприпустимим.

Зосереджені сили вимірюють в одиницях сили (ньютонах – Н, кілоньютонах – кН, меганьютонах – МН).

Розподілені навантаження виражають в одиницях сили, віднесених до одиниці площі (наприклад, кН/м²) або до одиниці довжини (наприклад, кН/м).

2.1.3 Зовнішні сили і внутрішні зусилля. Метод перерізів

Зовнішніми називаються сили, що діють з боку тіл, які не входять до даної системи. Зовнішні сили розподіляються на об'ємні і поверхневі.

Об'ємні сили розподілені за об'ємом тіла і прикладені до кожної його частинки (сила ваги, сила магнітного тяжіння).

Поверхневі сили прикладені до ділянок поверхні і характеризують безпосередню контактну взаємодію даного об'єкта з навколишніми тілами.

До зовнішніх сил включаються і *реакції зв'язків*, що доповнюють систему сил до рівнодіючої.

Розглянемо стрижень, який навантажений будь-якою, але взаємно урівноваженою системою

сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ (рис. 2.7). При збільшенні цих сил може наступити момент, коли стрижень руйнуватиметься або його деформація стане дуже великою.

Ці процеси можуть відбуватися тому, що в окремих місцях усередині стрижня виникають зусилля, величини яких досягають величин сил міжмолекулярного зчеплення. Отже, безпосередньою причиною руйнування є ті *внутрішні зусилля*, які виникають у стрижні при дії зовнішніх навантажень.

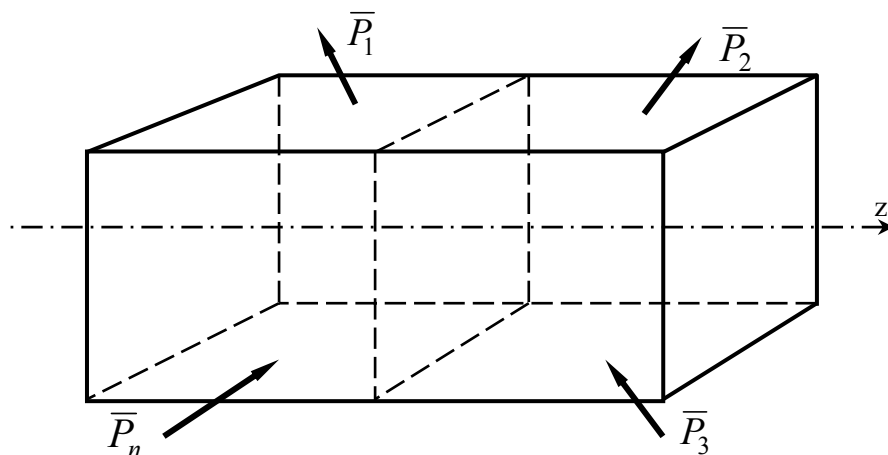


Рисунок 2.7

Величини внутрішніх зусиль визначаються методом перерізів.

Суть його полягає в такому:

- **розсікаємо** (у думках) стрижень за перерізом A , у якому слід визначити величину внутрішніх зусиль. Зазвичай стрижень розсікають площиною, перпендикулярною до осі стрижня, – z (рис. 2.8);

- **відкидаємо** яку-небудь частину стрижня (зазвичай ту, до якої прикладено більше сил);

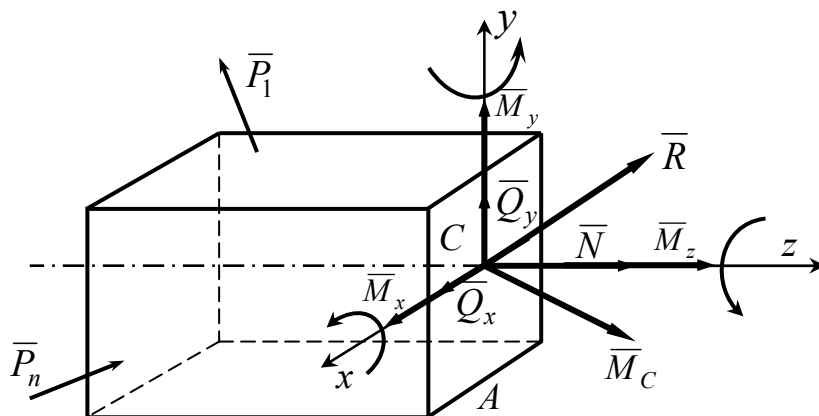


Рисунок 2.8

- **заміняємо** сили, що діють на залишену частину, їх головним вектором \bar{R} і головним моментом \bar{M}_C (т. C – центр ваги перерізу: докладніше див. підрозділ 2.3), розкладаємо кожен з них на три складових уздовж осей декартової системи координат (див. рис. 2.8). Маємо шість

невдомих: три сили (\bar{N} , \bar{Q}_x , \bar{Q}_y) і три моменти (\bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_z);

– **врівноважуємо** залишену частину, склавши для неї шість рівнянь рівноваги як для довільної просторової системи сил. Розв'язуючи ці рівняння, визначаємо всі означені невідомі внутрішні силові фактори. Для них прийняті такі назви:

\bar{N} – подовжня сила;

\bar{Q}_x і \bar{Q}_y – поперечні сили;

\bar{M}_x і \bar{M}_y – згинальні моменти;

\bar{M}_z – крутний момент (часто позначають $\bar{M}_{кр}$).

Указаним внутрішнім силовим факторам відповідають такі прості види деформації стрижня:

1 Розтягування (або стискання), при якому в поперечних перерізах виникає тільки подовжня сила \bar{N} .

2 Зсув, при якому в перерізах виникають тільки поперечні сили \bar{Q}_x або \bar{Q}_y .

3 Чисте згинання, при якому в перерізах виникають тільки згинальні моменти \bar{M}_x або \bar{M}_y .

4 Поперечне згинання, при якому в перерізах разом зі згинальними моментами виникають поперечні сили.

5 Кручення, при якому в поперечних перерізах виникає тільки крутний момент $\bar{M}_z \equiv \bar{M}_{кр}$.

Слід зауважити, що шість внутрішніх силових факторів (це максимально можлива їх кількість у перерізах стрижнів) виникають при дуже складних варіантах зовнішнього навантаження. У реальних конструкціях їх зазвичай менше.

2.1.4 Напруження повне, нормальне і дотичне. Загальні принципи розрахунку елементів конструкції

Щоб охарактеризувати закон розподілу внутрішніх сил за перерізом, необхідно ввести міру їх інтенсивності. За таку міру береться *напруження*.

Напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в заданій точці перерізу.

Напруження є результатом взаємодії частинок тіла при його навантаженні. Зовнішні сили прагнуть змінити взаємне розташування частинок, а виникаюче при цьому напруження перешкоджає зсуву частинок, обмежуючи його в більшості випадків деякою малою величиною. Розглянемо переріз A деякого тіла (рис. 2.9).

Навколо довільної точки виділимо елементарну площадку ΔF , у межах якої виявлена внутрішня сила $\Delta \bar{R}$. За середнє напруження на площадці \bar{p}_{cp} береться відношення

$$\frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \bar{p}_{cp}$$

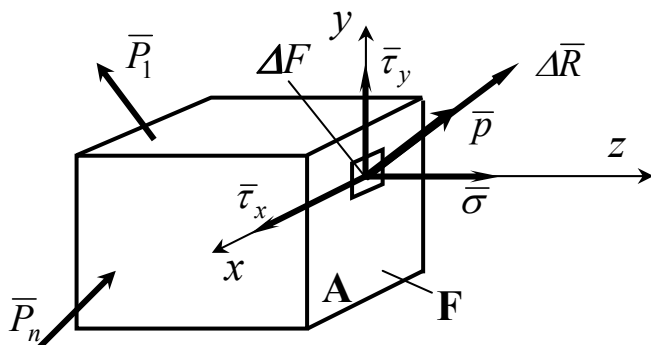


Рисунок 2.9

Якщо зменшувати площадку F , «стягуючи» її в точку, то можна одержати повне напруження в точці:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F} = \bar{p}$$

Напруження має розмірність сили, що ділиться на площу ($\text{Н/м}^2 = \text{Па}$, $\text{кН/м}^2 = \text{кПа}$ або $\text{МН/м}^2 = \text{МПа}$).

Сила $\Delta \bar{R}$ може бути розкладена на три складові уздовж осей координат: нормальну $\Delta \bar{N}$ і дві дотичні $\Delta \bar{Q}_x$ і $\Delta \bar{Q}_y$.

За їх допомогою можна визначити одне нормальне і два дотичних напруження відповідних напрямків (див. рис. 2.9).

Нормальне напруження $\bar{\sigma}$ визначається за формулою

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{N}}{\Delta F} = \frac{d\bar{N}}{dF} = \bar{\sigma}. \quad (2.1)$$

Дотичні напруження $\bar{\tau}_x$ і $\bar{\tau}_y$ визначаються таким чином:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}_x}{\Delta F} = \frac{d\bar{Q}_x}{dF} = \bar{\tau}_x, \quad \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{Q}_y}{\Delta F} = \frac{d\bar{Q}_y}{dF} = \bar{\tau}_y.$$

Хоча вказані напруження є векторними величинами, як і сили, з якими вони пов'язані, в курсі опору матеріалів векторну символіку до них зазвичай не використовують.

Якщо через згадану точку в тілі провести іншу площину, то всі напруження набудуть інших значень.

Сукупність напружень, які діють на всіх площадках, проведених через дану точку, називається напруженим станом у цій точці.

У результаті розрахунків потрібно одержати відповідь на питання, задовольняє чи ні конструкція тим вимогам, які до неї висуваються.

Найбільш поширеним методом розрахунку деталей машин і елементів споруд на міцність є *розрахунок за допустимим напруженням*, при якому на підставі аналізування конструкції виявляється в тілі та точка, у якій виникає найбільше (небезпечне) напруження. Останнє порівнюється з граничною величиною для даного матеріалу, і потім висновується про міцність конструкції.

У деяких випадках використовується метод *розрахунку за руйнуючими навантаженнями*. У цьому методі шляхом розрахунку знаходиться граничне навантаження, яке може витримати конструкція, не руйнуючись або не змінюючи істотно свою форму. Граничне навантаження зіставляється з діючим, унаслідок чого висновується про ступінь міцності конструкції в робочих умовах.

Методи розрахунку вибираються залежно від умов роботи конструкції і вимог, які до неї висуваються. Якщо, наприклад, необхідно домогтися найменших змін форми конструкції, проводиться *розрахунок за переміщеннями, що допускаються (розрахунок на жорсткість)*. Це не виключає одночасної перевірки конструкції на міцність.

Опір матеріалів викладає загальні методи визначення напружень, деформацій і переміщень. Докладніші розрахунки освітлюються в інших курсах інженерної підготовки.

2.2 Розтягання-стискання

2.2.1 Внутрішні зусилля у поперечних перерізах стрижнів, побудова їх епюр

Під розтяганням (або стисканням) розуміється такий вид навантаження, при якому в поперечних перерізах стрижня виникають тільки подовжні сили N , а інші внутрішні силові чинники дорівнюють нулю.

Передача навантаження на стрижень може бути здійснена різними способами (рис. 2.10, а...в). У всіх випадках система зовнішніх сил утворює рівнодіючу P , направлену уздовж осі стрижня. Тому розрахункова схема однакова (рис. 2.10, г), і подовжня сила в будь-якому перерізі дорівнює P . У цьому випадку вона є додатною, бо розтягує стрижень. При зміні напрямку зовнішніх сил стрижень стає стиснутим, а подовжня сила – від'ємною.

На стрижень можуть діяти декілька зовнішніх сил уздовж його осі. При цьому подовжня сила мінятиметься за довжиною стрижня.

Графічне зображення цієї зміни називається *епюрою* подовжніх сил.

Її будують за такими правилами:

1 Паралельно до осі стрижня проводять базу (нульову лінію).

2 Стрижень умовно поділяють на ланки між точками прикладення зовнішніх сил.

3 У межах кожної з ланок стрижень розсікають умовно на дві частини.

4 Застосовуючи метод перерізів, одну частину розсіченого стрижня відкидають, а з умов рівноваги іншої визначають величину подовжньої сили у ланці як алгебраїчну суму зовнішніх сил, що діють на залишену частину, при цьому сили, які спрямовані від перерізу, беруться зі знаком плюс, а у його бік – зі знаком мінус.

5 Визначені величини подовжніх сил з урахуванням їх знаків відкладають від бази у вигляді окремих точок з дотриманням певного масштабу. Точки з'єднують між собою відрізками прямих.

6 Епюру заштриховують перпендикулярно до бази і помічають на ній знаки подовжніх сил на окремих ділянках.

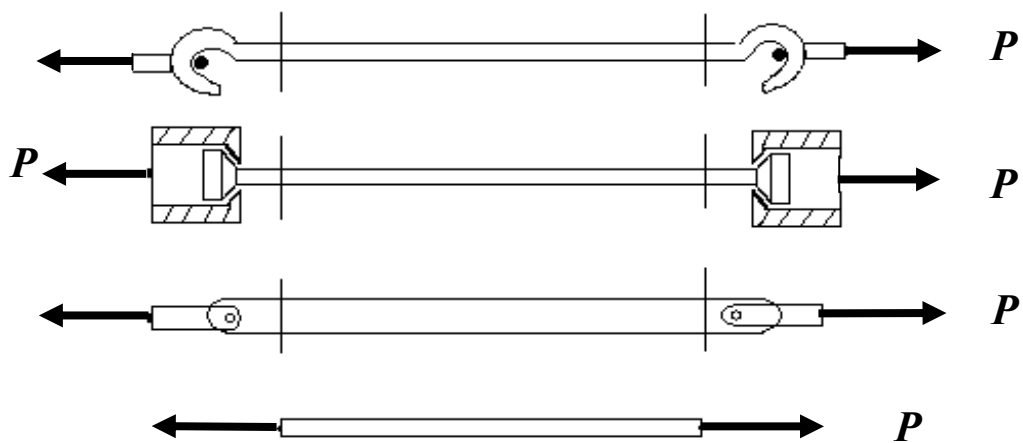


Рисунок 2.10

Наведену процедуру побудови епюри подовжніх сил проілюструємо таким прикладом.

Розглянемо стрижень, навантажений кількома зовнішніми силами (рис. 2.11, а). Він має три ділянки: *AB*, *BC* і *CD*.

Визначимо величину подовжньої сили на ділянці *AB* (рис. 2.11, б). Для цього у її межах довільним перерізом I-I розсічемо стрижень. Праву його частину відкинемо, а до залишеної лівої прикладемо подовжню силу N_1 , спрямувавши її від перерізу (тобто вважаючи її додатною). З умови рівноваги залишеної частини ($\Sigma P_z=0$) визначимо величину N_1 :

$P+N_1=0$, звідки $N_1 = -P$ (ділянка *AB* стиснута).

Аналогічно визначимо величини подовжніх сил на інших ділянках. На ділянці *BC* (рис. 2.1, в):

$P-6P+N_2=0$, звідки $N_2= 5P$ (ділянка *BC* розтягнута).

На ділянці *CD* (рис. 2.11, г):

$P-6P+P+N_3=0$, звідки $N_3= 4P$ (ділянка *CD* розтягнута).

За знайденими значеннями побудуємо епюру N (рис. 2.11, д).

Слід зауважити, що побудова епюр подовжніх сил не є самоціллю. На їх основі будуються епюри нормальних напружень, які дозволяють виявляти небезпечні перерізи стрижнів при їх розрахунках на міцність. У даному прикладі епюра нормальних напружень має вигляд, зображений на рис.2.11, е. Процедура її побудови розглянута в розділі 2.2.2.

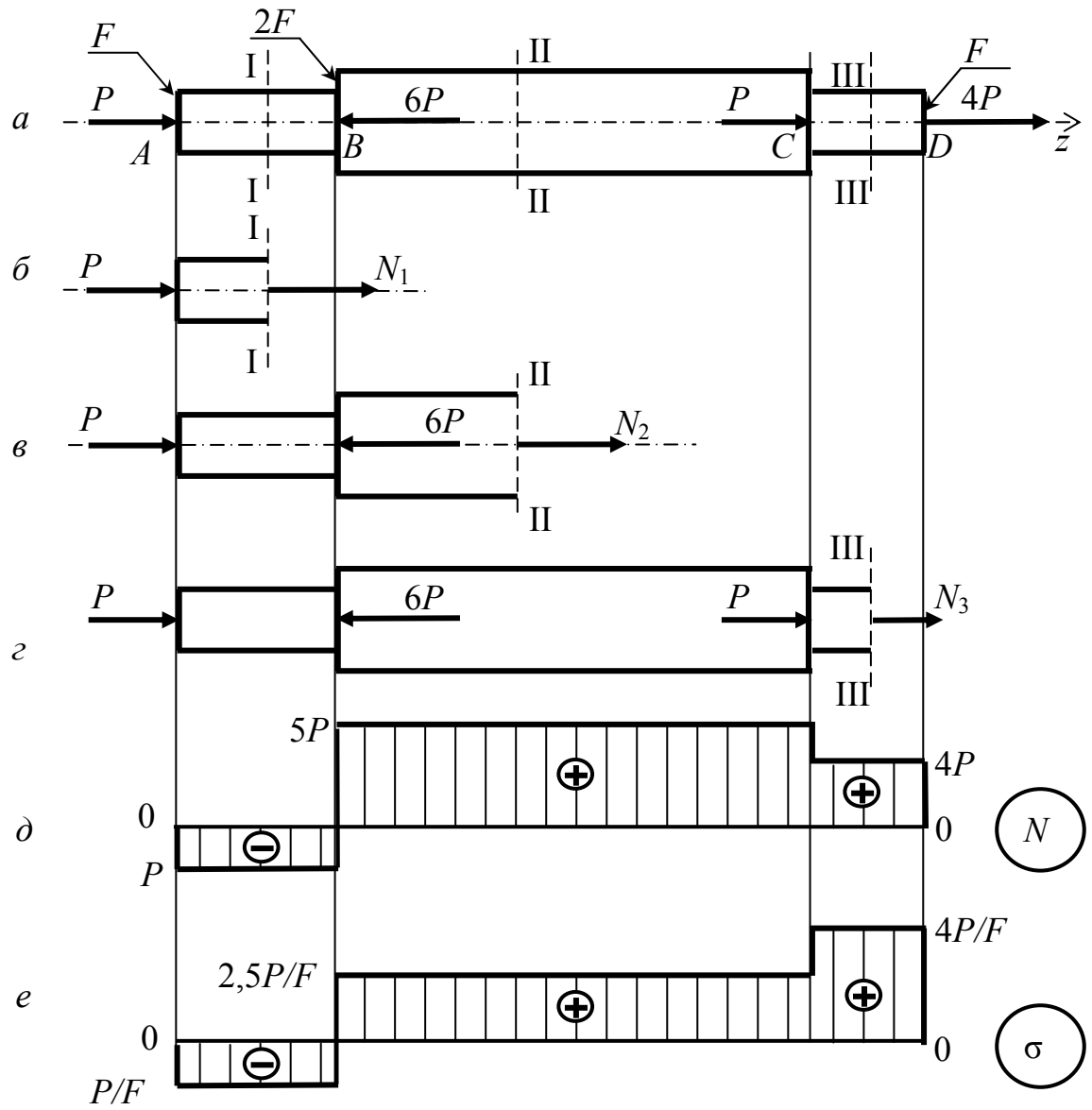


Рисунок 2.11

2.2.2 Деформації і напруження при розтяганні-стисканні. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона

Розміри стрижнів при розтяганні-стисканні змінюються залежно від величини і напрямку прикладених сил.

Розглянемо розтягнутий стрижень (рис. 2.12).

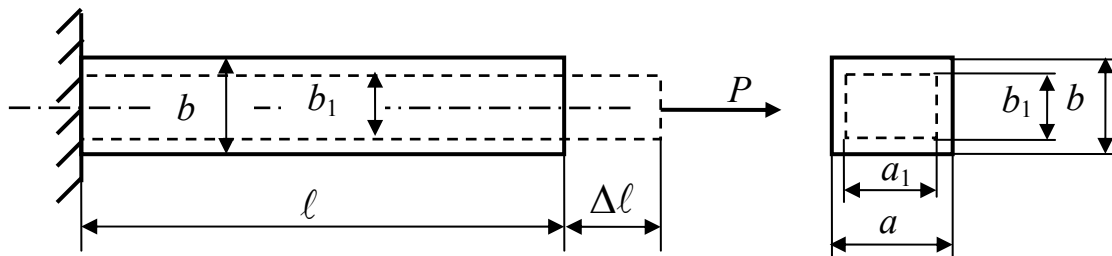


Рисунок 2.12

Якщо початкова довжина стрижня дорівнювала l , то в результаті навантаження вона зросте і буде дорівнювати $l + \Delta l$. Величина Δl називається *абсолютною подовжньою деформацією стрижня*. У цьому разі вона є додатною. Її відношення до початкової довжини стрижня позначається літерою ε і *відносною подовжньою деформацією стрижня*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.2)$$

Разом зі збільшенням довжини зазначеного стрижня його поперечні розміри зменшуються (див. рис. 2.12). Абсолютні величини цих зменшень дорівнюють $\Delta a = a - a_1$, $\Delta b = b - b_1$ і зветься абсолютними поперечними деформаціями стрижня. Відносні деформації в цьому разі однакові в усіх напрямках. Вони зветься поперечними і позначаються символом ε' :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

Знаки ε і ε' завжди протилежні: при розтяганні $\varepsilon > 0$ і $\varepsilon' < 0$, при стисканні $\varepsilon < 0$ і $\varepsilon' > 0$. Їх величини пов'язані між собою так званим **коефіцієнтом Пуассона**:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

Цей коефіцієнт є однією з фізичних констант матеріалів. Його значення лежать у межах 0...0,5. Значення $\mu = 0$ належить пробковому дереву, значення $\mu = 0,5$ – натуральному каучуку. У сталей $\mu = 0,25...0,33$, у чавуну $\mu = 0,23...0,27$, у бронзи $\mu = 0,32...0,35$.

Відносні подовжні деформації ε пов'язані з нормальними напруженнями σ , що виникають у стрижнях при розтяганні-стисканні, **законом Гука** у відносному вигляді:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.3)$$

де E – модуль пружності першого роду (**модуль Юнга**).

Цей модуль є ще однією фізичною константою матеріалу. Його розмірність така сама, як і у σ . Для найбільш вживаних матеріалів він має такі значення:

сталь – $E = (2,0 \div 2,1) \cdot 10^5$ МПа; чавун – $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа;
 мідь – $E = 1,0 \cdot 10^5$ МПа; дерево – $E = 1,0 \cdot 10^4$ МПа.

Згідно з *гіпотезою плоских перерізів (гіпотезою Бернуллі)*, *поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і під час неї*. Тому плоскі поперечні перерізи стрижня при розтяганні-стисканні переміщуються поступально, паралельно собі, й усі волокна (тобто уявні подовжні елементи стрижня безкінечно малого перерізу) подовжуються або скорочуються однаково: $\varepsilon = \text{const}$.

Таким чином, σ є константою в межах одного перерізу як добуток двох констант – E і ε . Інакше кажучи, нормальні напруження в усіх точках одного перерізу однакові.

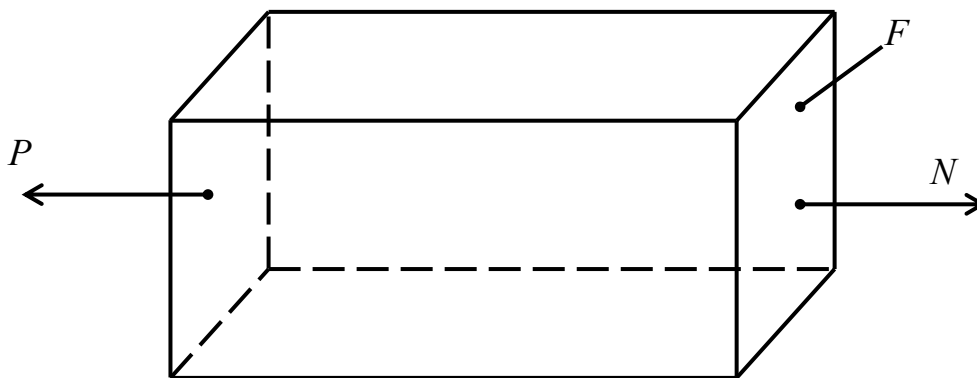


Рисунок 2.13

Подовжня сила N , що діє в перерізі (рис. 2.13), є рівнодієюною елементарних подовжніх сил у точках перерізу – dN . Її величина пов'язана з σ залежністю (2.1). Тоді, з урахуванням $\sigma = \text{const}$, маємо:

$$N = \int_F \sigma \cdot dF = \sigma \cdot \int_F dF = \sigma \cdot F,$$

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.4)$$

і остаточно

Залежність (2.4) дозволяє, побудувавши епюру σ , визначити небезпечні перерізи ступінчастого стрижня, наприклад, розглянутого в попередньому розділі (див. рис. 2.11). Для визначеності будемо вважати площі перерізів цього стрижня на ділянках AB і CD такими, що дорівнюють одна одній, а на ділянці BC вдвічі більше за них: $F_1 = F_3 = F$, $F_2 = 2F$. З урахуванням значень N на вказаних ділянках (див. рис. 2.11, д) маємо: $\sigma_1 = -P/F$, $\sigma_2 = 5P/2F = 2,5P/F$, $\sigma_3 = 4P/F$.

Побудована епюра σ зі вказаними значеннями зображена на рисунку 2.11, е. На ньому видно, що небезпечними з точки зору розтягувальних напружень є перерізи ділянки CD , а стискаючих – перерізи ділянки AB .

Об'єднавши формулу (2.2) з формулами (2.3) і (2.4), одержимо:

$$\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot F} \quad (2.5)$$

З формули (2.5) видно, що чим більше величина EF , тим менше деформація, тобто тим жорсткіше стрижень. Тому цю величину називають *жорсткістю перерізу стрижня при розтяганні-стисканні*.

Формулу (2.5) часто називають *законом Гука* в абсолютній формі. Цією формулою користуються в разі прикладення зовнішніх сил до кінцівок стрижнів (див. рис. 2.10). Коли ж стрижень ступінчастий і (або) величина N змінюється за довжиною стрижня (див. рис. 2.11), зазначену формулу слід застосувати для кожного ступеня (ділянки) окремо, а потім скласти отримані результати з урахуванням їх знаків.

2.2.3 Умови міцності й жорсткості. Приклади розв'язання задач

Як уже вказувалося, деталі машин й інших конструкцій повинні задовольняти умовам міцності й жорсткості. Розміри деталей необхідно підібрати так, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувалися і не деформувалися більш, ніж допустимо. Зокрема, у машинобудівних деталях, як правило, не допускаються залишкові деформації.

Як руйнування деталі, так і її деформації пов'язані з величиною діючих у ній напружень. Для деталей, виготовлених з пластичного матеріалу, небезпечним напруженням слід вважати *межу текучості* σ_T , а з крихкого – *межу міцності або тимчасовий опір* σ_B , величини яких визначаються за результатами механічних випробувань матеріалів на розтягання і стискання.

Вибір допустимих напружень, покладений в основу розрахунку на міцність, виявляється досить складним. Це пояснюється необхідністю врахувати такі обставини:

- неоднорідність характеристик матеріалу, одержаних на різних зразках;
- величина і характер найбільших навантажень на елемент конструкції, який розраховується, зазвичай точно невідомі;
- результати розрахунку є наближеними, оскільки розрахункові схеми спрощено відображають характер роботи конструкцій.

Тому не тільки допустимі напруження повинні бути вибрані менш небезпечними, але і необхідно мати деякий запас, щоб забезпечити міцність навіть у разі найбільш несприятливого поєднання перелічених чинників.

Допустиме напруження $[\sigma]$ в загальному випадку визначається за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma^o}{n},$$

де σ^o – небезпечне напруження для матеріалу;
 n – коефіцієнт запасу міцності.

Пластичні матеріали однаково чинять опір розтягання і стисканню, при чому величини σ_T у них вважаються однаковими для цих варіантів навантаження. Тому для цих матеріалів існує

одна величина $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (2.6)$$

де $n_T = 1, 3 \dots 1, 5$.

Крихкі матеріали краще чинять опір стисканню, ніж розтягання. Для них існує дві величини $[\sigma]$:

$$[\sigma_+] = \frac{\sigma_B^+}{n_B}, \quad (2.7)$$

$$[\sigma_-] = \frac{\sigma_B^-}{n_B},$$

де $[\sigma_+]$ – допустиме напруження при розтяганні;

$[\sigma_-]$ – допустиме напруження при стисканні;

σ_B^+ – тимчасовий опір при розтяганні;

σ_B^- – тимчасовий опір при стисканні;

$n_B = 2,5 \dots 3,0$.

Враховуючи викладене, умови міцності при розтяганні-стисканні можна записати таким чином:
- для пластичних матеріалів

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

- для крихких матеріалів

$$\sigma_{\max}^+ \leq [\sigma_+], \quad (2.9)$$

$$|\sigma_{\max}^-| \leq [\sigma_-], \quad (2.10)$$

де $|\sigma_{\max}|$ – максимальне за модулем напруження в зонах розтягання і стискання;

σ_{\max}^+ – максимальне напруження в зоні розтягання;

$|\sigma_{\max}^-|$ – максимальне напруження в зоні стискання.

Умова жорсткості накладає обмеження на деформації і має такий вигляд

$$\Delta \ell \leq [\Delta \ell], \quad (2.11)$$

де $\Delta \ell$ – абсолютна подовжня деформація елемента конструкції;

$[\Delta \ell]$ – її допустима величина, яка встановлюється, виходячи з досвіду експлуатації подібних виробів.

Умови міцності й жорсткості (2.8)...(2.11) дозволяють проводити розрахунки трьох типів:

1. На визначення потрібної площі поперечного перерізу стрижня (проектний розрахунок).
2. На визначення максимального навантаження стрижня при відомій площі його перерізу (проектний розрахунок).
3. На оцінювання міцності й жорсткості стрижнів (перевірочний розрахунок).

Приклад 2.1. Підібрати з умови міцності діаметр стрижня, на якому висить вантаж вагою $P = 100$ кН (рис. 2.14), якщо $[\sigma] = 160$ МПа.

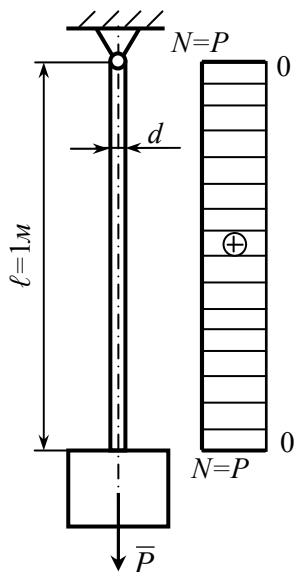


Рисунок 2.14

Розв'язання

Визначаємо потрібну площу поперечного перерізу стрижня і його діаметр:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{160} = 625 \text{ мм}^2 \quad d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 625}{3,14}} = 28,2 \text{ мм}$$

Приймаємо з нормального ряду (додаток А) : $d = 32$ мм.

Приклад 2.2. Для стрижня, зображеного на рисунку 2.14, визначити максимально допустиму вагу вантажу, якщо $d = 40$ мм, $[\sigma] = 160$ МПа.

Розв'язання

$$P_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot [\sigma] = \frac{3,14}{4} \cdot 40^2 \cdot 160 = 200960 \text{ Н} = 200,96 \text{ кН}$$

Приклад 2.3. Перевірити виконання умов міцності й жорсткості сталевого стрижня (див. рис. 2.14), якщо $P = 250$ кН, $d = 45$ мм, $[\sigma] = 200$ МПа, $[\Delta\ell] = 1$ мм.

Розв'язання

1. Перевіряємо виконання умови міцності:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} = \frac{P \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 45^2} = 157,27 \text{ МПа} < [\sigma]$$

: умова виконується.

2. Перевіряємо виконання умови жорсткості:

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot F} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 45^2} = 0,79 \text{ мм} < [\Delta\ell], \text{ тож і ця умова виконується.}$$

Приклад 2.4. Перевірити на міцність і жорсткість ступінчастий стрижень (див. рис. 2.11), прийнявши: $P = 100$ кН, $F = 20$ см², $\ell_1 = AB = 1$ м, $\ell_2 = BC = 2$ м, $\ell_3 = CD = 0,8$ м, $E = 2 \times 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа, $[\Delta\ell] = 2$ мм.

Розв'язання

1. Перевіряємо виконання умови міцності:

$$|\sigma_{\max}| = 4P / F = 4 \cdot 100 \cdot 10^3 / 20 \cdot 10^2 = 200 \text{ МПа} > [\sigma]: \text{ умова не виконується.}$$

2. Перевіряємо виконання умови жорсткості:

$$\Delta l_1 = N_1 \cdot l_1 / E \cdot F = -100 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2 = -0,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = N_2 \cdot l_2 / E \cdot 2F = 5 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^2 = 1,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = N_3 \cdot l_3 / E \cdot F = 4 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,8 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2 = 0,8 \text{ мм};$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,25 + 1,25 + 0,8 = 1,8 \text{ мм} < [\Delta l], \text{ тобто ця умова виконується.}$$

3. Зважаючи на **невиконання** умови міцності, визначимо додатково потрібну величину

F :

$$F \geq 4P / [\sigma] = 4 \cdot 100 \cdot 10^3 / 160 = 2500 \text{ мм}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

2.2.4 Випробування матеріалів на розтягання і стискання

Ці випробування є найбільш важливими і масовими в промисловості й наукових організаціях. Вони дозволяють отримати цілий комплекс механічних характеристик, які є основою конструювання різних виробів.

Для випробувань на розтягання виготовляють спеціальні зразки, з яких найчастіше використовують циліндричні (рис. 2.15, а).

Зразок повинен мати таку форму, щоб у межах заданої ділянки напружений стан був однорідним. Ця ділянка зразка називається робочою частиною. Вона являє собою стрижень l з прямолінійною віссю і перерізом круглої (див. рис. 2.15, а) чи прямокутної (рис. 2.15, б) форми

постійної площі F_0 . У разі необхідності застосовують зразки менших розмірів.

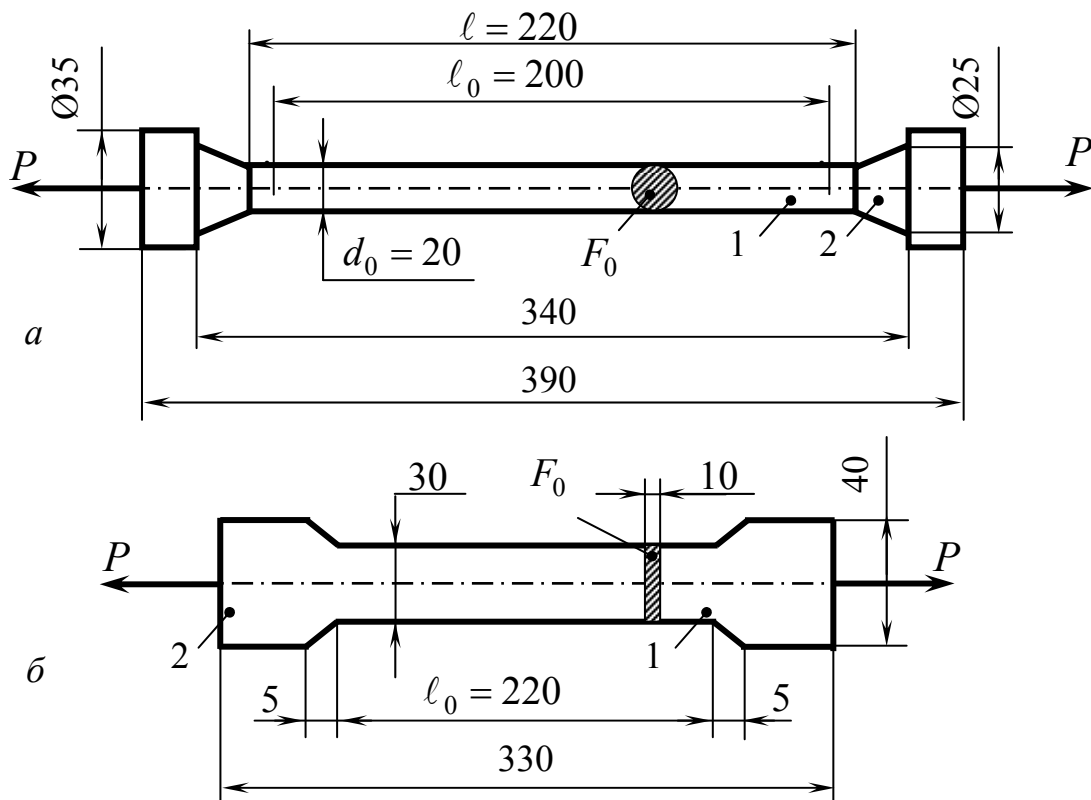


Рисунок 2.15

Розтягувальна сила P з обох кінців повинна бути направлена точно вздовж осі. Для здійснення зазначеної умови у випробувальній машині містяться два захоплювача, а на зразку – дві головки 2 (див. рис. 2.15).

Лінійне розтягання робочої частини зразка довжиною ℓ_0 надає змоги використати найпростішу формулу для розрахунку напруження:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}$$

Стандартний циліндричний зразок (див. рис. 2.15, а) для випробування на розтягання має довжину робочої частини $\ell = 11d_0$, де d_0 – початковий діаметр зразка.

Довжина $\ell_0 = 10d_0$ називається розрахунковою (базовою) довжиною зразка.

При випробуванні плоского зразка варто мати на увазі, що для циліндричного зразка

$$\ell_0 = 10d_0 = 10 \cdot \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 11,3 \cdot \sqrt{F_0}$$

тому розрахункову довжину плоского зразка приймають такою самою:

$$\ell'_0 = 11,3 \cdot \sqrt{F_0}$$

Як основні використовують також зразки з діаметром $d_0 = 10$ мм з робочою довжиною $\ell_0 = 100$ мм. Дозволяється застосування зразків інших діаметрів за умови, що їхня робоча довжина $\ell_0 = 10d_0$ або $\ell_0 = 5d_0$. Такі зразки називають *пропорційними*.

Випробування на розтягання провадиться при статичному навантаженні, тобто збільшення навантаження проводиться від нуля до кінцевого значення поступово без поштовхів та ударів. При статичному випробуванні встановлюється функціональна залежність діючого на зразок навантаження та його абсолютною подовжньою деформацією. Випробувальна машина надає зразку подовження та показує навантаження, яке відповідає цьому подовженню.

Схема випробувальної машини зображена на рисунку 2.16. Тип машини – ВМГ-30, максимальне зусилля 300 кН. Машина є універсальною і призначена для статичних випробувань матеріалів на розтягання, стискання, згинання, зріз та сколювання.

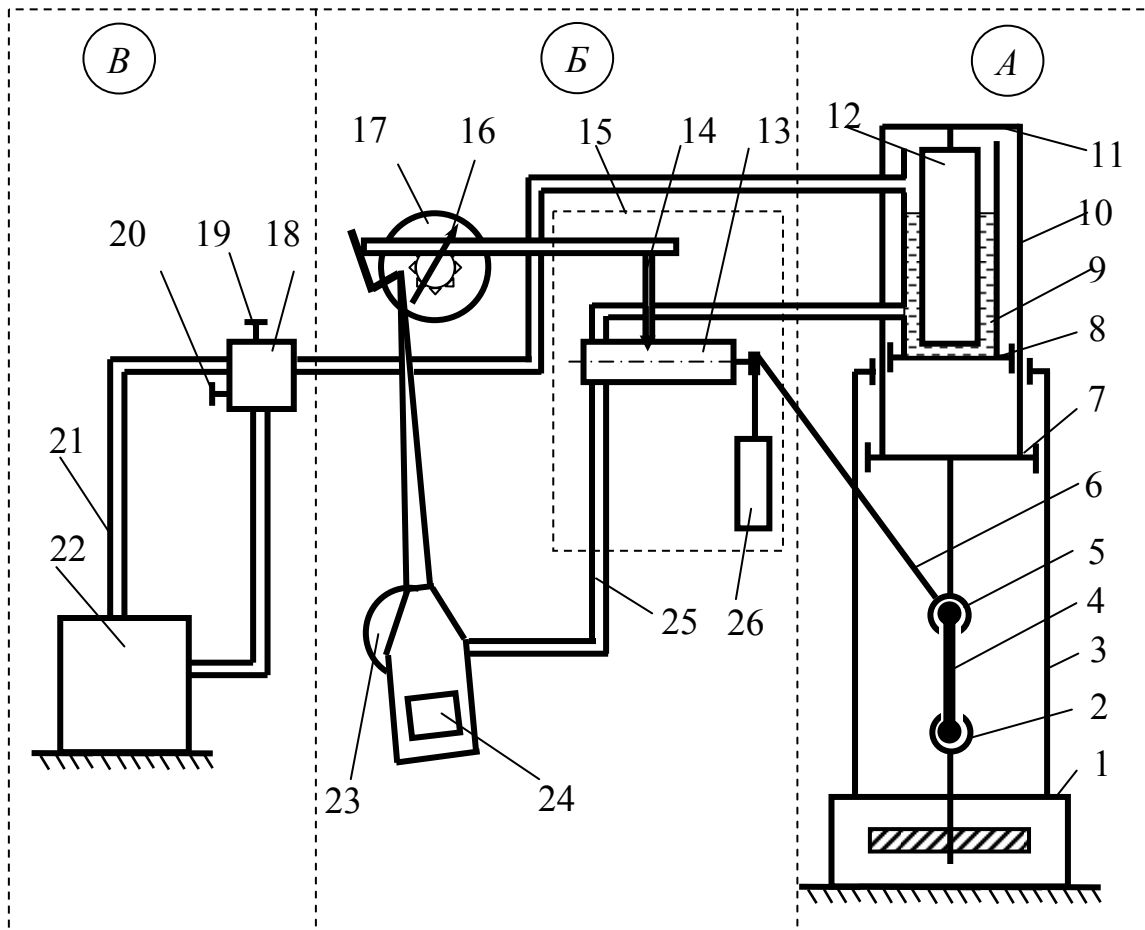


Рисунок 2.16

Машина складається з випробувального агрегату *A*, силовимірювального механізму *B* і насосної установки *B*.

Випробувальний агрегат *A* являє собою гідравлічний прес з верхнім розташуванням робочого циліндра і має дві рами. Нерухома рама складається з опори 1 із закріпленням на неї нерухомим захоплювачем 2, двох стояків 3, траверси 7 і робочого циліндра 9. Рухома рама складається з робочої траверси 8 із закріпленням на неї захоплювачем 5, двох тяг 10, траверси 11 і робочого поршня 12. Прикладення навантаження здійснюється робочим циліндром через раму і робочу траверсу 7. Під час робочого ходу поршень 12 переміщає нагору рухома раму.

При випробуванні на розтягання зразки 4 закріплюють в захоплювачах 2 і 5, а при випробуваннях на стиск (зріз, згинання, сколювання) – розміщують між траверсами 7 і 8.

Силовимірювальний механізм *B* гідравліко-маятникового типу складається з вимірювального циліндра 24, шкали 17 з маятником 23 і діаграмного пристрою 15. Останній складається з записуючого вузла 14 і барабана 13, на якому закріплюють папір.

Приєднання силовимірювального механізму до робочого циліндра машини здійснюється трубопроводом 25. Під час випробування тиск рідини з робочого циліндра 9 передається трубопроводом 25 у верхню порожнину циліндра 9, що викликає обертальний рух вказівної стрілки 16 шкали 17 і поступальний – записуючого вузла 14. Барабан 13 обертається за допомогою вантажу 26 нитки 6, яка закріплена на рухомому захоплювачі 5.

Насосна установка *B* служить для силового живлення робочого циліндра 9 випробувальної машини і складається з триплунжерного насоса високого тиску, резервуара для мастила з фільтром і електродвигуна. Усе це розміщено в корпусі 22. Мастило від насоса трубопроводом 21 подається в розподільну коробку 18, що служить для керування робочим поршнем 12 і рухомою рамою випробувальної машини. Верхній клапан 19 на розподільній коробці 18 служить для впуску, тобто для підйому поршня 12 (хід навантаження). Лівий клапан 20 призначений для впуску мастила, тобто для опускання поршня 12 (хід розвантаження). У корпусі коробки 18 розташований стабілізатор швидкості руху робочого поршня.

Характер діаграм розтягання залежить від властивостей випробуваного матеріалу. На рисунку 2.17 показана типова діаграма розтягання для маловуглецевої сталі.

Наведена діаграма умовно може бути поділена на 5 ділянок:

- ділянка пропорційності (*OA*);
- ділянка пружності (*OB*);
- ділянка загальної текучості (*CD*);
- ділянка зміцнення (*DE*);
- ділянка місцевої текучості (*EF*).

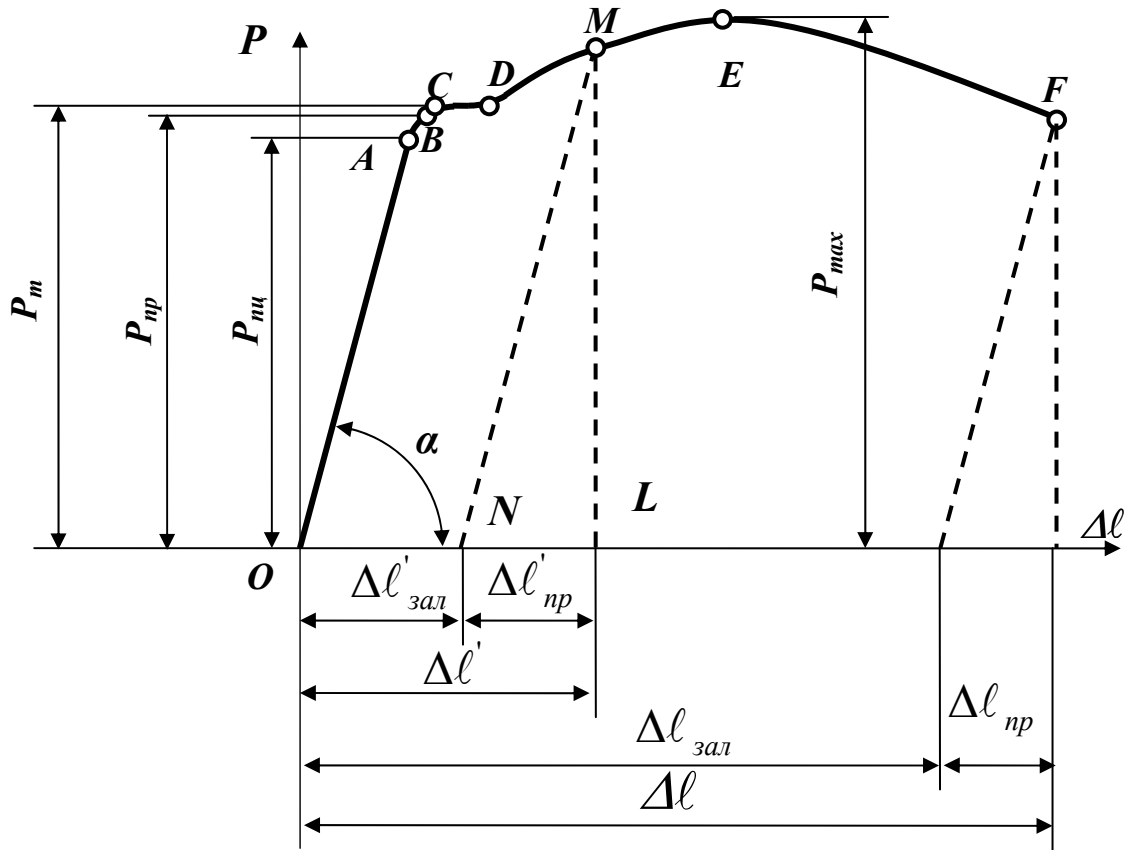


Рисунок 2.17

Від початку навантаження до деякого значення, яке відповідає точці A на діаграмі, функціональна залежність зусилля розтягання P від деформації Δl окреслюється прямою OA . На цій стадії розтягання є справедливим закон Гука.

Зазначена залежність характеризується величиною $\operatorname{tg} \alpha$, де α – кут між прямою OA і віссю Δl .

Точка A , в якій закон пропорційності припиняє свою дію, відповідає силі $P_{нц}$, яка використовується для визначення *граници пропорційності*.

Границею пропорційності $\sigma_{нц}$ називається напруження, після якого порушується закон Гука. Границя пропорційності обчислюється за формулою

$$\sigma_{нц} = \frac{P_{нц}}{F_0}, \quad (2.12)$$

де F_0 – початкова площа перерізу зразка.

Деформація називається пружною, якщо вона повністю зникає після розвантаження зразка (деталі, конструкції).

Доки сила P не досягне певного значення, доти спричинені нею деформації будуть зникати при розвантаженні. При цьому процес розвантаження зобразиться тією самою лінією, що й навантаження.

Позначимо через P_{np} найбільше значення сили, при якому зразок ще не дає при розвантаженні залишкової деформації. Ця сила використовується для визначення *границі пружності* і їй на діаграмі відповідає точка B , а пружній стадії розтягання зразка – ділянка OB .

Границею пружності σ_{np} називається найбільше напруження, до якого залишкових деформацій при розвантаженні не виявляється:

$$\sigma_{np} = \frac{P_{np}}{F_0}.$$

Границя пружності є характеристикою, не пов'язаною із законом Гука. Точки A і B діаграми, які відповідають границям пропорційності $\sigma_{пц}$ і пружності σ_{np} , близькі одна до одної, і різницею між ними зазвичай нехтують.

При розтяганні після точки A діаграма розтягання стає криволінійною і плавно підіймається до точки C , де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки CD , яка називається *полічкою плинності*. На цій стадії розтягання подовження зразка зростає при постійному значенні розтягувальної сили, яку позначають P_T . Такий процес деформації, який називають текучістю матеріалу, супроводжується залишковими (пластичними) деформаціями, які не зникають після розвантаження.

Отже, *границею текучості* σ_T зветься напруження, при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягувальному зусиллі. Границя текучості визначається за формулою

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}.$$

Полічка плинності CD є характерною тільки для маловуглецевої сталі та деяких сплавів, однак вона не властива більшості металів і сплавів. Для матеріалів, які не мають полічки плинності, границя текучості приймається відповідно напруженню, при якому залишкове подовження

зразка становить 0,2 чи 0,5 % його довжини і позначається відповідно $\sigma_{0,2}$ та $\sigma_{0,5}$. Це – умовні границі текучості.

Після стадії текучості матеріал збільшує опір подальшому деформуванню і сприймає зусилля, що зростає, до певної межі. Цьому відповідає ділянка DE , що зветься ділянкою зміцнення. Точка E відповідає найбільшому зусиллю P_{max} , яке може сприймати зразок.

Напруження, що відповідає максимальній силі P_{max} , називається тимчасовим опором, або границею міцності, і позначається σ_B .

Границя міцності обчислюється за формулою

$$\sigma_B = \frac{P_{\max}}{F_0} \quad (2.13)$$

До точки C (див. рис. 2.17) подовження зразка розподіляються рівномірно за всією довжиною зразка, а площі поперечних перерізів його розрахункової частини змінюються неістотно і також рівномірно за всією довжиною. Тому для обчислення σ_{nc} , σ_{np} , σ_T та σ_B у

розрахункових формулах використовується початкове значення площі перерізу F_0 .

Після досягнення зусилля P_{\max} деформація відбувається в основному на невеликій довжині зразка. Це призводить до утворення місцевого звуження у вигляді «шийки» (рис. 2.18) і зменшення сили P (див. рис. 2.17), незважаючи на те, що напруження у перерізі «шийки» безперервно зростає.

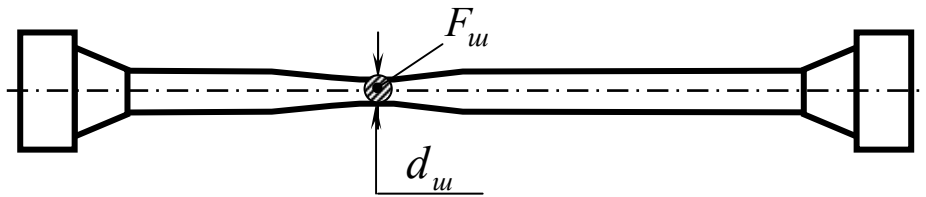


Рисунок 2.18

Позначивши через $P_{роз}$ силу в момент розриву (точка F на рис. 2.17), можемо знайти умовне напруження в момент розриву:

$$\sigma_{роз}^{ум} = \frac{P_{роз}}{F_0}$$

Це напруження умовне, тому що дійсна площа поперечного перерізу шийки $F_{ш}$ (див. рис. 2.18) менша, ніж розрахункова площа F_0 .

Дійсне напруження в момент розриву $\sigma_{роз}^{\partial}$ є тим найбільшим нормальним напруженням у перерізі «шийки», яке зразок може витримати до руйнування.

Таким чином, дійсне напруження в момент розриву можна знайти за формулою

$$\sigma_{роз}^{\partial} = \frac{P_{роз}}{F_{ш}}$$

Як уже зазначалось, якщо розвантажити зразок при напруженнях, які не перевищують границю

пружності σ_{np} , то процес розвантаження зобразиться на діаграмі лінією, яка практично збігається з лінією навантаження. Повторне навантажування піде тією самою лінією OB , яку одержали при першому навантажуванні зразка (див. рис. 2.17).

Коли зразок навантажити до напруження в точці M на ділянці зміцнення DE , то лінія розвантаження MN пройде паралельно прямолінійній ділянці OA . При розвантаженні подовження $\Delta l'$ зразка зникає не повністю. Воно зменшується на величину пружної частини подовження $\Delta l'_{np}$. Відрізок ON являє собою залишкову деформацію $\Delta l'_{зал}$ (див. рис. 2.17).

Подовження $\Delta l'_{зал}$ називають *пластичним подовженням*.

Таким чином, повне подовження зразка за границею пружності складається із двох частин – пружної та пластичної:

$$\Delta l' = \Delta l'_{np} + \Delta l'_{зал}$$

Границі пропорційності та текучості при повторному навантаженні підвищуються. Це явище має назву *зміцнення* або *наклепу*.

Після розриву пружна складова повного подовження зразка (відрізок $\Delta l_{пр}$) зникає.

Подовження, що залишилось, зображується відрізком $\Delta l_{зал}$.

Відносним подовженням після розриву δ , називають відношення приросту довжини зразка після розриву $\Delta l_{зал}$ до його початкової довжини, виражене у відсотках:

$$\delta = \frac{\Delta l_{зал}}{l_0} \cdot 100$$

Відносне подовження після розриву характеризує пластичність матеріалу. Залежно від нього матеріали поділяють на *пластичні* (для яких $\delta \geq 5\%$) та *крихкі* (для яких $\delta < 5\%$).

До пластичних матеріалів відносяться кольорові метали і їх сплави, також маловуглецеві сталі, до крихких – чавуни, загартовані сталі, спеціальні сплави, скло, бетон, цегла.

Відносне звуження зразка після розриву ψ (у відсотках) визначається відношенням абсолютного зменшення площі перерізу в шийці до початкової площі перерізу зразка:

$$\psi = \left(1 - \frac{F_{ш}}{F_0} \right) \cdot 100.$$

Величина ψ є другою (після δ) характеристикою пластичності матеріалу.

Діаграми розтягання крихких матеріалів істотно відрізняються від розглянутої діаграми розтягання пластичної маловуглецевої сталі (див. рис. 2.17). На них можна визначити лише величину P_{\max} (рис. 2.19) і розрахувати відповідне значення σ_B , використовуючи формулу (2.13).

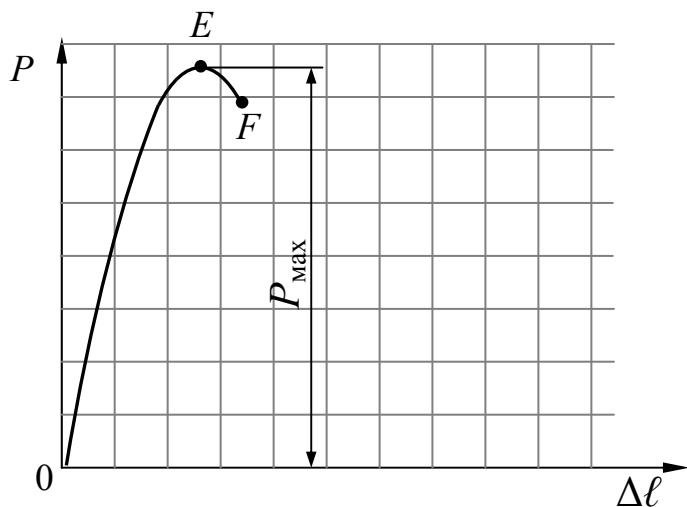


Рисунок 2.19

Випробування матеріалів на стискання проводять значно рідше, ніж на розтягання. Для випробувань використовують циліндричні зразки діаметром $d_0 = 20$ мм і висотою $h_0 = 20 \dots 40$ мм (рис. 2.20).

Зразки встановлюють між плитами випробувальної машини (див. рис. 2.16) і повільно навантажують. Записуючий пристрій машини викреслює діаграму стискання.

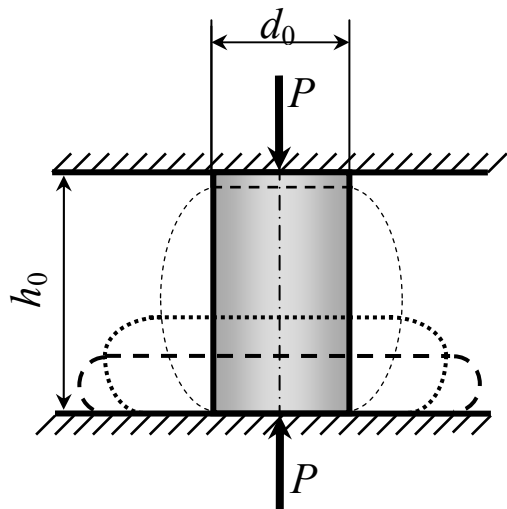


Рисунок 2.20

На рисунку 2.21 зображена діаграма стискання зразка із м'якої (пластичної) сталі. На цій діаграмі можна побачити, що в початковій стадії навантаження (ділянка OA) залежність між P і

Δh прямолінійна. То ж точка A відповідає границі пропорційності матеріалу – $\sigma_{пц}$.

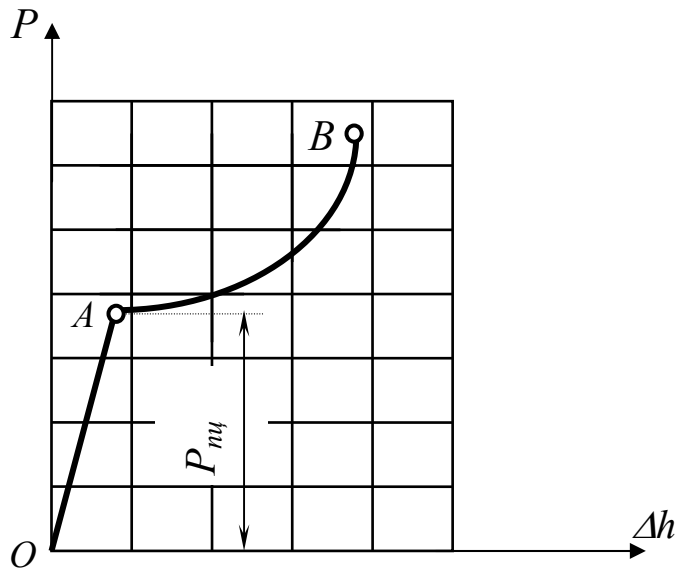


Рисунок 2.21

Потім деформація збільшується і на ділянці AB (див. рис. 2.21) діаграма стискання набуває криволінійної форми. Це пояснюється швидким зростанням пластичної деформації і безперервним збільшенням поперечного перерізу зразка. На діаграмі стискання ділянка текучості відсутня.

Унаслідок тертя між торцем зразка та опорною поверхнею плити деформація зразка відбувається не однакою за його висотою, внаслідок чого зразок набуває бочкоподібної форми (див. рис. 2.20) і може бути сплющений у диск без руйнування.

Таким чином, величина *границі міцності* пластичного матеріалу σ_B не може бути визначена. Єдина механічна характеристика, яка може бути знайдена з досліду, – це границя

пропорційності матеріалу $\sigma_{mц}$, яка розраховується за формулою (2.12).

Інакше поведуть себе при випробуванні на стискання крихкі матеріали (наприклад, чавун). Спочатку їх діаграма стискання являє собою пряму лінію, потім вона все більше загинається, досягає максимуму, після чого різко обривається при руйнуванні зразка (рис. 2.22). Цього разу діаграма стискання схожа на діаграму розтягання крихких матеріалів (див. рис. 2.19).

Чавунний зразок після стискання залишається майже циліндричним, що свідчить про відсутність значних пластичних деформацій. У ту мить, коли навантаження досягає найбільшого значення, зразок руйнується, причому на його поверхні з'являються тріщини, які нахилені під кутом, близьким до 45% (рис. 2.23). Такий напрямок руйнування пояснюється тим, що його причиною є найбільші дотичні напруження, які діють під таким кутом. При випробуванні визначається навантаження P_{max} , при якому відбувається руйнування зразка.

Після чого можна визначити величину *границі міцності* σ_B за формулою (2.13).

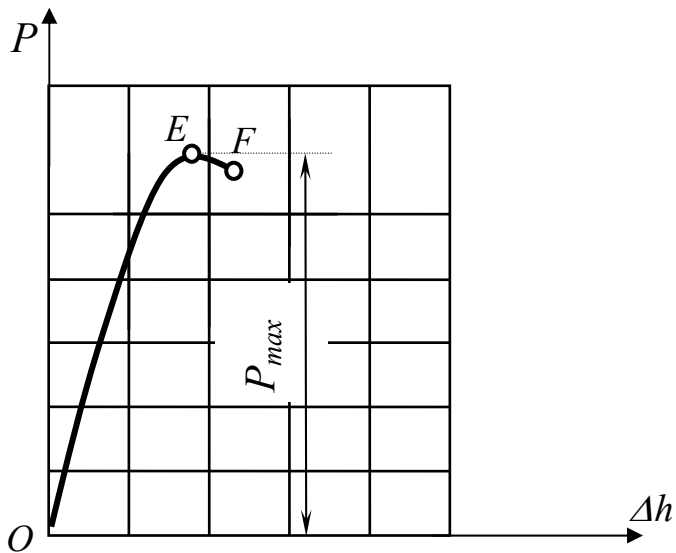


Рисунок 2.22

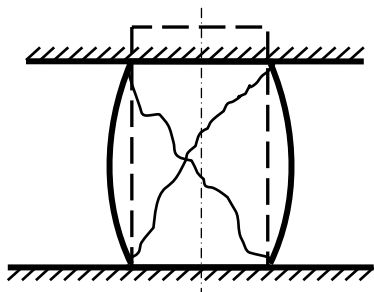


Рисунок 2.23

2.3 Геометрія плоских перерізів

2.3.1 Статичні моменти плоских перерізів. Визначення центрів ваги простих фігур

При розтяганні-стисканні єдиною геометричною характеристикою перерізу стрижня є його величина площі – F , а форма цієї площі ніяк не впливає на напруження і деформації стрижня. При згинанні й ряді інших видів навантаження стрижнів форма перерізу має суттєве значення як і величина площі, тому в цих випадках використовують геометричні характеристики перерізу, які одночасно враховують і величину його площі, і його форму. Такими характеристиками є статичні моменти плоских перерізів і їх моменти інерції.

Розглянемо плоску фігуру довільної форми, яка має площу F (рис. 2.24), і введемо поняття її статичних моментів відносно довільних координатних осей x і y :

$$S_x = \int_F y \cdot dF$$

$$S_y = \int_F x \cdot dF$$

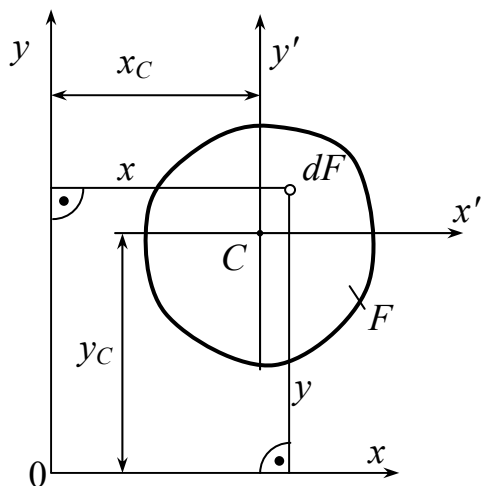


Рисунок 2.24

Знаки S_x і S_y залежно від розташування осей координат можуть бути додатними, від'ємними і такими, що дорівнюють нулю. Статичні моменти мають розмірності мм^3 , см^3 , м^3 .

Осі координат, відносно яких статичні моменти дорівнюють нулю, зветься *центральною осями* плоскої фігури, а точка їх перетину – *центром ваги* цієї фігури.

Центр ваги позначається великою літерою C (див. рис. 2.24). Центральні осі часто позначають буквами x і y з індексами c , що є не досить вдалим, бо такі самі позначення мають координати точки C . На рисунку 2.24 ці осі мають позначення x' і y' .

Якщо координати центра ваги відомі, то величини статичних моментів S_x і S_y можна визначити таким чином:

$$S_x = F \cdot y_C \quad (2.14)$$

$$S_y = F \cdot x_C \quad (2.15)$$

З формул (2.14) і (2.15) можна визначити координати центра ваги фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{F},$$

$$y_C = \frac{S_x}{F}.$$

У ряді простих фігур положення центрів ваги є відомим і розрахунку не потребує. Так, у кола центр ваги – це його геометричний центр, у прямокутника він знаходиться в точці перетину діагоналей або осей симетрії, у довільного трикутника – в точці перетину медіан, у прямокутного трикутника ця точка має координати, пов'язані з довжиною катетів (рис. 2.25). У довідковій літературі наведено багато даних про положення центрів ваги інших фігур, які також можна вважати простими.

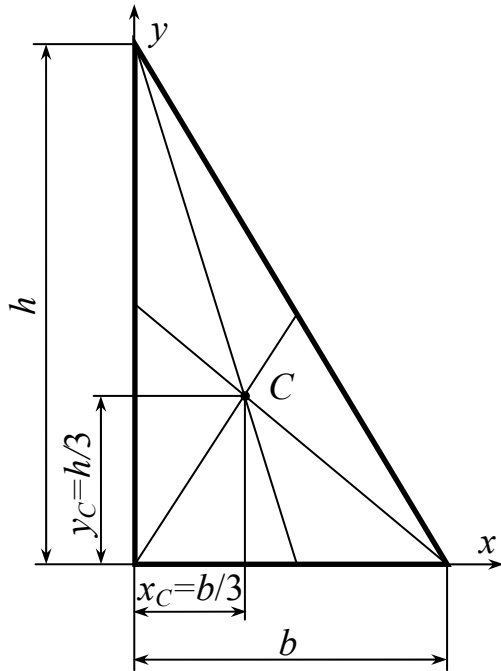


Рисунок 2.25

У фігур складної конфігурації положення центрів ваги знаходять, застосовуючи метод поділу на частини і метод «від'ємних площ».

Сутність першого методу – в поділі складної фігури на такі прості частини, у кожній з котрих відомі площа і положення центра ваги. У цьому разі координати центра ваги обчислюють за формулами:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (2.16)$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (2.17)$$

де $i = 1 \dots n$ – номери простих частин;

F_i – площі цих частин;

x_i, y_i – координати центрів ваги простих частин у вибраній системі координат.

Метод «від'ємних площ» застосовують до складних фігур з внутрішніми порожнинами. Цього разу координати центра ваги складної фігури також визначають за допомогою формул (2.16) і (2.17), але за частину 1 приймають усю фігуру без порожнин, а площі інших частин (порожнин) вважають від'ємними.

При визначенні центрів ваги складних фігур треба мати на увазі, що вони завжди лежать на осях симетрії, якщо фігури є симетричними. Якщо фігура має одну вісь симетрії, то, прийнявши її за одну з координатних осей, можна суттєво спростити пошук центра ваги: цього разу достатньо розрахувати тільки одну з його координат. За наявності у фігури двох осей симетрії ніяких розрахунків не треба, бо центр ваги лежить на перетині цих осей.

2.3.2 Моменти інерції плоских перерізів. Радіуси інерції

Існують три види моментів інерції: осьові (J_x і J_y), полярний (J_p) і відцентровий (J_{xy}). Введемо ці поняття (рис. 2.26).

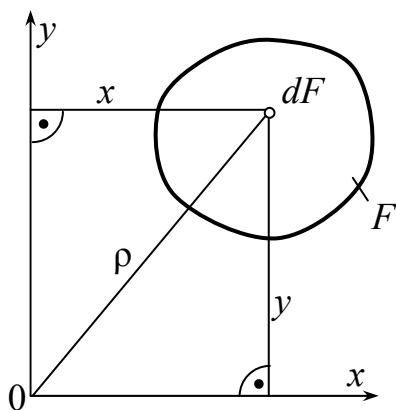


Рисунок 2.26

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dF \quad (2.18)$$

$$J_y = \int_F x^2 \cdot dF \quad (2.19)$$

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF \quad (2.20)$$

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \quad (2.21)$$

Осьові й полярний моменти інерції фігури завжди є додатними. Між ними існує зв'язок:

$$J_p = \int_F \rho^2 \cdot dF = \int_F (x^2 + y^2) \cdot dF = \int_F x^2 \cdot dF + \int_F y^2 \cdot dF = J_y + J_x, \quad (2.22)$$

тобто полярний момент інерції дорівнює сумі осьових. Відцентровий момент інерції залежно від розташування осей координат може бути додатним (рис. 2.27, а), від'ємним (рис. 2.27, б), а також дорівнювати нулю (рис. 2.27, в).

Усі моменти інерції мають розмірність мм^4 , см^4 , м^4 .

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються *головними осями інерції* плоскої фігури.

Вісь симетрії фігури завжди є головною віссю інерції, оскільки в цьому разі кожній додатній величині $x \cdot y \cdot dF$ в першому і третьому квадрантах відповідає така сама за модулем, але

від'ємна в другому і четвертому квадрантах (див. рис. 2.27, в), що призводить до $J_{xy} = 0$. Другою головною віссю у симетричної фігури є будь-яка інша вісь, перпендикулярна до осі симетрії.

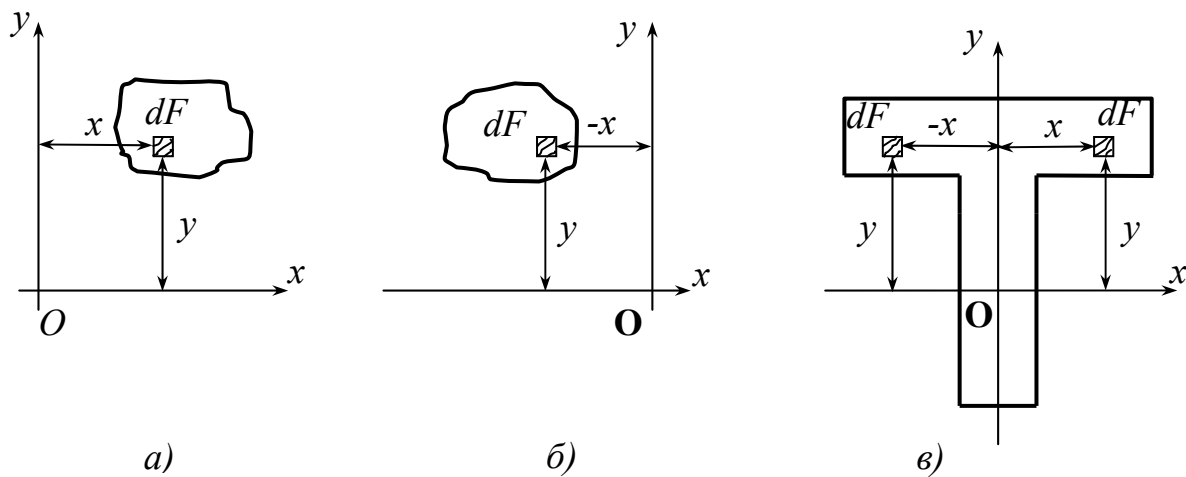


Рисунок 2.27

При розв'язанні задач опору матеріалів разом з моментами інерції використовують характеристики, які зветься радіусами інерції. Вони пов'язують між собою площу перерізу і його осеві моменти інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}},$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

2.3.3 Моменти інерції простих фігур

До простих фігур відносять прямокутник, коло і прямокутний трикутник. Їх моменти інерції визначають шляхом використання формул (2.18)...(2.21).

Прямокутник (рис. 2.28):

$$J_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3, \quad J_y = \frac{1}{12} h \cdot b^3, \quad J_{xy} = 0. \quad (2.23)$$

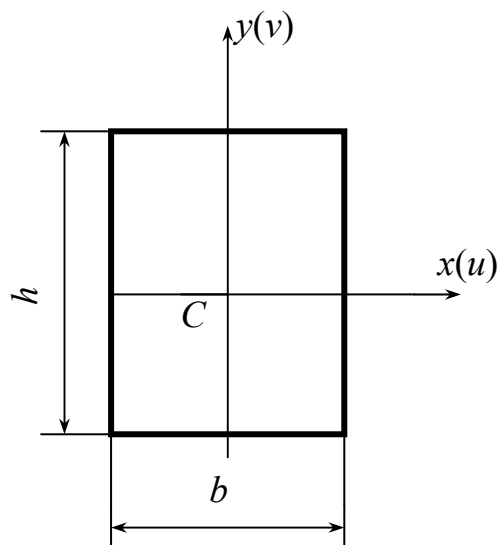


Рисунок 2.28

Коло (рис. 2.29):

$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \quad J_{xy} = 0. \quad (2.24)$$

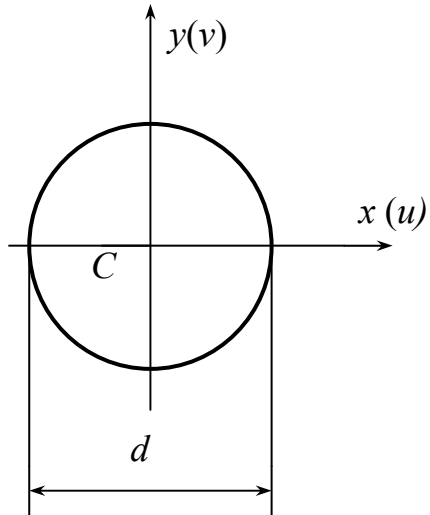


Рисунок 2.29

Прямокутний трикутник (рис. 2.30):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}, \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{36}, \quad J_{xy} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}.$$

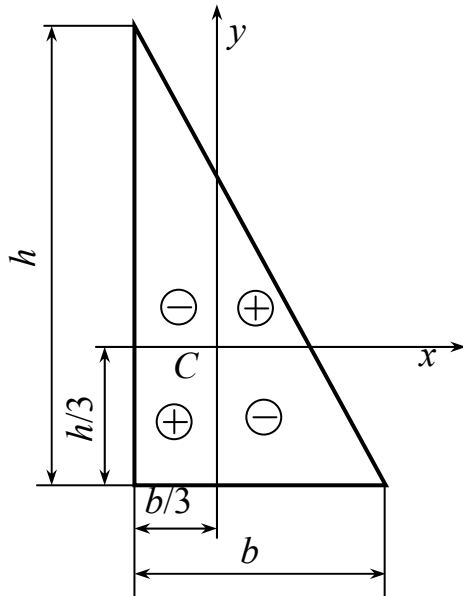


Рисунок 2.30

Слід зауважити, що відцентровий момент інерції цього трикутника не дорівнює нулю, тому що осі x і y не є осями симетрії. Його знак (у цьому разі мінус) можна встановити візуально, не виконуючи ніяких розрахунків.

Так, координати точок (елементарних площадок) у другому і четвертому квадрантах цього трикутника (див. рис. 2.30) мають протилежні знаки, і відцентрові моменти тут є від'ємними, а в першому і третьому квадрантах – додатними, оскільки координати точок в них однакові за знаком. Оскільки сумарна площа частин трикутника з від'ємними відцентровими моментами явно більша, ніж у частин з додатними, значення J_{xy} у всього трикутника має знак мінус. Для зміни знака відцентрового моменту інерції достатньо змінити напрямок будь-якої з осей координат. Одночасна ж зміна напрямків обох осей не призводить до зміни його знака.

Перерізи елементів конструкцій часто складаються з інших фігур, зокрема профілів прокату – двотаврів, швелерів, кутиків та ін. Їх також можна вважати простими, бо всі геометричні характеристики цих профілів містяться у відповідних таблицях сортаменту (дод. А).

Повертаючись до фігур, зображених на рисунках 2.28... 2.30, слід зауважити, що у прямокутника і кола осі x і y є не тільки центральними, але й головними осями інерції. Такі осі звуться *головними центральними осями* фігури і позначаються літерами u і v . У трикутника осі x і y є тільки центральними, бо відцентровий момент інерції відносно цих осей не дорівнює нулю. Назвемо їх *довільними центральними осями* фігури. Перехід від них до головних центральних осей буде розглянуто далі.

2.3.4 Перетворення моментів інерції при паралельному переносі й повороті осей координат

Виведемо формули перетворення моментів інерції фігури при паралельному перенесенні осей. Нехай відомі її моменти інерції відносно центральних осей x, y і відстані від цих осей до їх паралельних осей x_1, y_1 (рис. 2.31). Необхідно визначити моменти інерції фігури відносно осей x_1, y_1 .

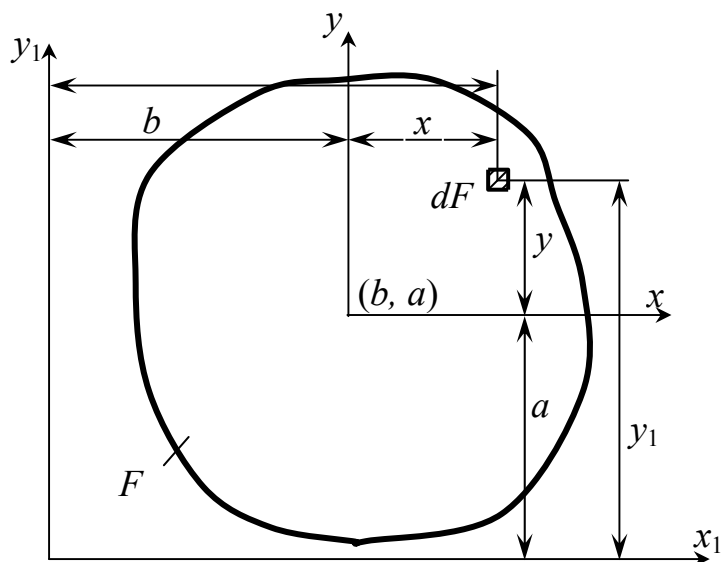


Рисунок 2.31

Згідно з визначенням:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 \cdot dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 \cdot y_1 \cdot dF \quad (2.25)$$

Координати будь-якої точки в новій системі координат x_1, y_1 можна виразити через її координати в старих осях x, y (див. рис. 2.31):

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a \quad (2.26)$$

Підставимо значення (2.26) у формули (2.25), одержимо:

$$J_{x_1} = \int_F (y + a)^2 \cdot dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2a \cdot \int_F y \cdot dF + a^2 \cdot \int_F dF$$

Другий інтеграл у цій формулі є статичним моментом фігури відносно центральної осі x , і тому він дорівнює нулю, тобто

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0$$

$$J_{x_1} = J_x + a^2 \cdot F \quad (2.27)$$

Тоді

Аналогічно:

$$J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot F \quad (2.28)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + a \cdot b \cdot F \quad (2.29)$$

Формули (2.27) і (2.28) дозволяють висновити про таке: *осьові моменти інерції фігури відносно осі, яка паралельна центральній, дорівнюють моменту інерції відносно центральної осі плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями.*

Слід зауважити, що величини a і b у формулі (2.29), на відміну від формул (2.27) і (2.28), не є відстанями між паралельними осями, бо відцентровий момент інерції може бути від'ємним. У загальному випадку вони є координатами точки C у системі осей x_1, y_1 і підставляти їх у формулу (2.29) треба зі своїми знаками (на рис. 2.31 вони є додатними, але в разі зміни напрямків осей x, y їх знаки можуть змінитись на протилежні).

Таким чином, відцентровий момент інерції відносно осей, які паралельні центральним, дорівнює відцентровому моменту відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях.

Розглянемо тепер варіант повороту осей координат навколо довільної точки O (рис. 2.32).

Нехай відомі моменти інерції плоскої фігури відносно вихідних координатних осей x і y (див. формули (2.18), (2.19), (2.21)):

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dF ; \quad J_y = \int_F x^2 \cdot dF ; \quad J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF .$$

Потрібно визначити моменти інерції цієї фігури відносно осей x_1, y_1 , повернених щодо осей x, y на деякий кут α .

Відокремимо з перерізу яку-небудь елементарну площадку dF з центром у точці A (див. рис. 2.32). Координати цієї точки у вихідній системі координат:

$$x = OB, \quad y = AB,$$

у поверненій:

$$x_1 = OC, \quad y_1 = AC.$$

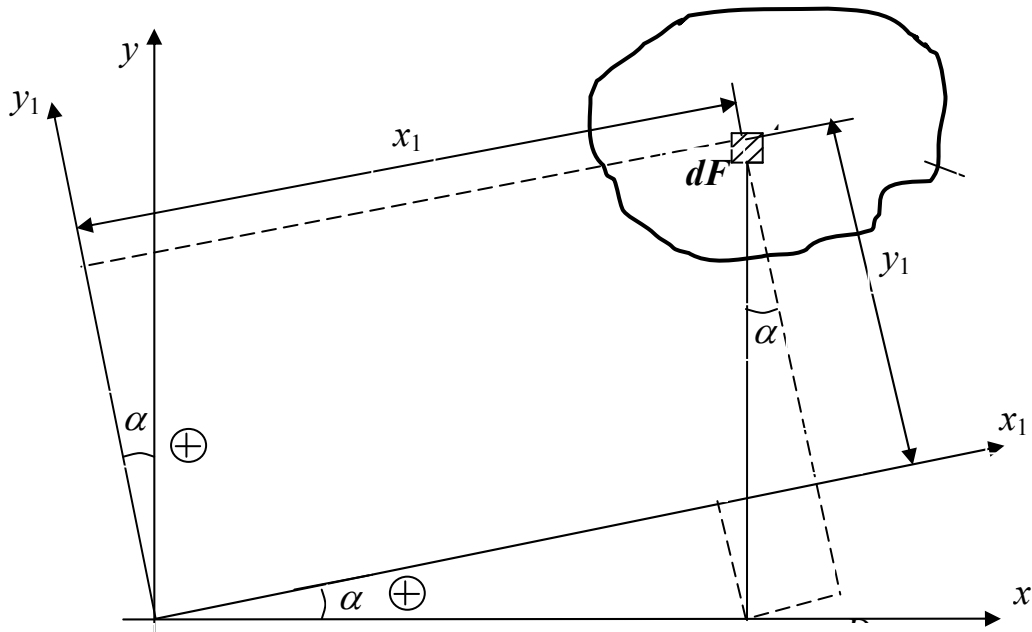


Рисунок 2.32

Виразимо нові координати x_1, y_1 через старі x, y і кут α , проводячи допоміжні лінії CD і BE паралельно осі Oy_1 , а лінію BD – паралельно осі Ox_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= OC = OE + BD = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \\ y_1 &= AC = AD - CD = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Згідно з визначенням (див. формули (2.25)):

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 \cdot dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 \cdot y_1 \cdot dF$$

Підставивши вирази (2.30) у (2.25), одержимо:

$$J_{x_1} = \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dF = \cos^2 \alpha \cdot \int_F y^2 \cdot dF - \sin 2\alpha \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF + \sin^2 \alpha \cdot \int_F x^2 \cdot dF$$

$$J_{y_1} = \int_F (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dF = \cos^2 \alpha \cdot \int_F x^2 \cdot dF + \sin 2\alpha \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF + \sin^2 \alpha \cdot \int_F y^2 \cdot dF.$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) \cdot (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot dF =$$

$$= \cos 2\alpha \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \left(\int_F y^2 \cdot dF - \int_F x^2 \cdot dF \right)$$

Враховуючи вирази (2.18, 2.19, 2.21), маємо:

$$J_{x_1} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \quad (2.31)$$

$$J_{y_1} = J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \quad (2.32)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} \cdot \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (2.33)$$

Формули (2.31) і (2.32) справедливі для будь-якої системи осей, у тому числі і для осей центральних.

Складаючи вирази (2.31) і (2.32), знаходимо:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p$$

Таким чином, при будь-якому повороті системи координат сума моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей.

2.3.5 Визначення напрямків головних центральних осей і величин головних моментів інерції

Головними моментами інерції фігури зводяться її моменти інерції відносно головних центральних осей – u і v (рис. 2.33), тобто центральних осей, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю:

$$J_{uv} = 0$$

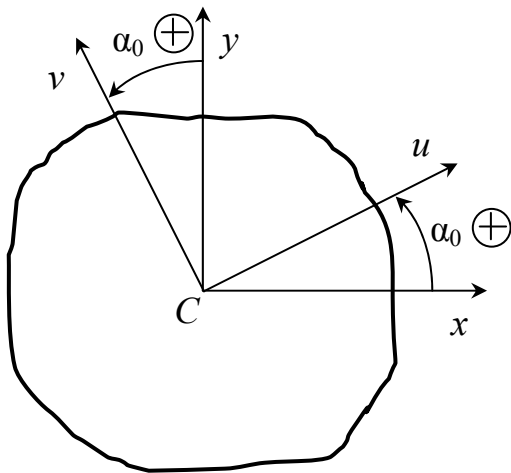


Рисунок 2.33

Головні моменти інерції перерізу – J_u, J_v є важливими показниками опору стрижнів згинанню й іншим, комбінованим видам навантаження з елементами згинання.

Перед визначенням величин J_u , J_v треба розглянути питання про напрямки головних центральних осей.

Формула (2.33) встановлює зв'язок відцентрового моменту інерції від кута повороту фігури навколо фіксованої точки. Узявши цю формулу за основу, визначимо кут α_0 , при якому відцентровий момент інерції стає таким, що дорівнює нулю, і довільні центральні осі (x і y) перетворюються на головні (див. рис. 2.33):

$$J_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0,$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.34)$$

Слід зауважити, що саме при такому куті α_0 осьові моменти інерції стануть екстремальними: один – максимальним, другий – мінімальним, в чому можна пересвідчитись, дослідивши на екстремум залежності (2.31) або (2.32). Це дозволяє вважати головними центральними осями такі осі, які проходять через центр ваги перерізу і характеризуються тим, що відцентровий момент інерції відносно їх дорівнює нулю, а осьові моменти інерції досягають своїх екстремумів.

Одержані з виразу (2.34) два значення кута α_0 відрізняються один від одного на 90° , і дають нам положення головних осей. Як легко бачити, менший з цих кутів за абсолютною величиною не

перевищує $\pi/4$. Надалі ми користуватимемося тільки меншим кутом, вважаючи його додатним в разі повороту проти ходу годинникової стрілки.

Значення головних моментів інерції можна одержати із загальних формул переходу до повернених осей (2.31) і (2.32), взявши $\alpha = \alpha_0$:

$$J_u = J_x \cdot \cos^2 \alpha_0 + J_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0, \quad (2.35)$$

$$J_v = J_x \cdot \sin^2 \alpha_0 + J_y \cdot \cos^2 \alpha_0 + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0. \quad (2.36)$$

Взявши за основу вирази (2.35) та (2.36) і виконавши низку перетворень, отримаємо вирази для J_u і J_v без кута α_0 :

$$J_{u,v} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (2.37)$$

У формулі (2.37) перед радикалом стоять знаки плюс і мінус, тож формула дає два значення головних моментів інерції – J_u , J_v . Щоб визначити, який з них менший, а який більший, треба порівняти між собою значення J_x і J_y . Якщо, наприклад, $J_x > J_y$, то $J_u > J_v$. Цього разу при розрахунку J_u треба перед радикалом мати знак плюс, а J_v – мінус.

2.3.6 Приклади розрахунків

Приклад 2.5. Визначити головні моменти інерції таврового перерізу (рис. 2.34).

Розв'язання

1. Вибираємо систему координат x , y і, застосувавши метод поділу на частини, знаходимо положення центра ваги перерізу.

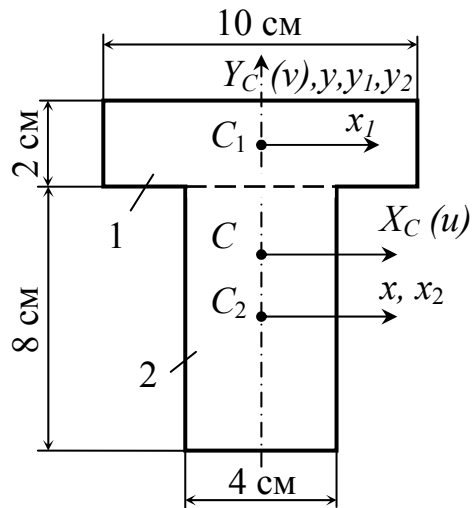


Рисунок 2.34

Оскільки вісь y є віссю симетрії,

$$y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2}$$

$$x_C = 0,$$

де F_1 і F_2 – площі частин перерізу: $F_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ см}^2$;

$F_2 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2$;

C_1 і C_2 – центри ваги частин перерізу;

y_1 і y_2 – вертикальні координати центрів ваги частин перерізу:

$$y_1 = \frac{8}{2} + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5 \text{ см}; \quad y_2 = 0.$$

Таким чином,

$$y_C = \frac{20 \cdot 5 + 32 \cdot 0}{20 + 32} = \frac{100}{52} = 1,923 \text{ см.}$$

2. Позначаємо на перерізі центр ваги (точку C) і проводимо через неї довільні центральні осі X_C, Y_C (див. рис. 2.34).

3. Підраховуємо моменти інерції перерізу відносно осей X_C, Y_C :

$$J_{X_C} = J_{x_1} + F_1 \cdot (C_1 C)^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot (C_2 C)^2, \quad J_{Y_C} = J_{y_1} + J_{y_2},$$

де J_{x_1}, J_{x_2} – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей x_1, x_2 , паралельних осі X_C :

$$J_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 2^3 = 6,667 \text{ см}^4, \quad J_{x_2} = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 8^3 = 170,667 \text{ см}^4;$$

$$C_1 C = y_1 - y_C = 5 - 1,923 = 3,077 \text{ см}; \quad C_2 C = y_C = 1,923 \text{ см};$$

де J_{y_1}, J_{y_2} – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей y_1, y_2 , які співпадають з віссю Y_C :

$$J_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 10^3 = 166,667 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 4^3 = 42,667 \text{ см}^4.$$

З урахуванням цих числових даних маємо:

$$J_{X_C} = 6,667 + 20 \cdot 3,077^2 + 170,667 + 32 \cdot 1,923^2 = \\ = 6,667 + 189,359 + 170,667 + 118,334 = 485,027 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_C} = 166,667 + 42,667 = 209,334 \text{ см}^4$$

$$J_{X_C Y_C} = 0$$

: переріз має вісь симетрії, яка співпадає з віссю Y_C .

4. Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{X_C Y_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = 0; \quad \alpha_0 = 0$$

: головні центральні осі співпадають з осями X_C, Y_C .

5. Визначаємо головні моменти інерції перерізу:

$$J_u = J_{X_C} = 485,027 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{Y_C} = 209,334 \text{ см}^4.$$

Приклад 2.6. Визначити головні моменти інерції пустотілого перерізу (рис. 2.35).

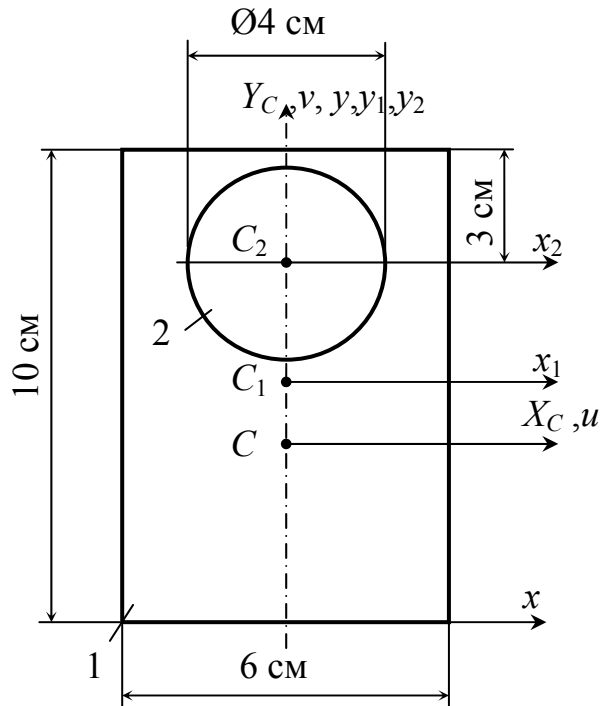


Рисунок 2.35

Розв'язання

1. Вибираємо систему координат x, y і, застосувавши метод «від'ємних площ», знаходимо положення центра ваги перерізу.

Оскільки вісь y є віссю симетрії,

$$y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2}$$

$$x_C = 0,$$

де $F_1 = 10 \cdot 6 = 60 \text{ см}^2$ (частина 1 – прямокутник без отвору);

$$F_2 = -\frac{\pi \cdot 4^2}{4} = -12,566 \text{ см}^2 \text{ (частина 2 – отвір діаметром 4 см);}$$

y_1 і y_2 – вертикальні координати центрів ваги частин перерізу (точок C_1 і C_2),

$$y_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ см; } y_2 = 10 - 3 = 7 \text{ см.}$$

Таким чином,

$$y_C = \frac{60 \cdot 5 + (-12,566) \cdot 7}{60 + (-12,566)} = \frac{212,038}{47,434} = 4,470 \text{ см.}$$

2. Позначаємо на перерізі центр ваги (точку C) і проводимо через неї довільні центральні осі X_C, Y_C .

3. Підраховуємо моменти інерції перерізу відносно осей X_C, Y_C :

$$J_{X_C} = J_{x_1} + F_1 \cdot (C_1 C)^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot (C_2 C)^2,$$

$$J_{Y_C} = J_{y_1} + J_{y_2},$$

де J_{x_1}, J_{x_2} – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей x_1, x_2 , паралельних осі X_C :

$$J_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 10^3 = 500 \text{ см}^4; \quad J_{x_2} = -\frac{\pi \cdot 4^4}{64} = -12,566 \text{ см}^4;$$

$$C_1 C = y_1 - y_C = 5 - 4,470 = 0,53 \text{ см}; \quad C_2 C = y_2 - y_C = 7 - 4,470 = 2,53 \text{ см};$$

J_{y_1}, J_{y_2} – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей y_1, y_2 , співпадаючих з віссю Y_C :

$$J_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 6^3 = 180 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = J_{x_2} = -12,566 \text{ см}^4;$$

З урахуванням цих числових даних маємо:

$$J_{X_C} = 500 + 60 \cdot 0,53^2 + (-12,566) + (-12,566) \cdot 2,53^2 =$$

$$= 500 + 16,854 - 12,566 - 80,434 = 423,854 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_C} = 180 + (-12,566) = 167,434 \text{ см}^4.$$

$J_{X_C Y_C} = 0$: переріз має вісь симетрії, яка співпадає з віссю Y_C .

4. Визначаємо положення головних центральних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{X_C Y_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = 0; \quad \alpha_0 = 0$$

: головні центральні осі співпадають з осями X_C, Y_C .

5. Визначаємо головні моменти інерції перерізу:

$$J_u = J_{X_C} = 423,854 \text{ см}^4; \quad J_v = J_{Y_C} = 167,434 \text{ см}^4.$$

Приклад 2.7. Визначити положення головних центральних осей і величини головних моментів інерції несиметричного перерізу (рис. 2.36).

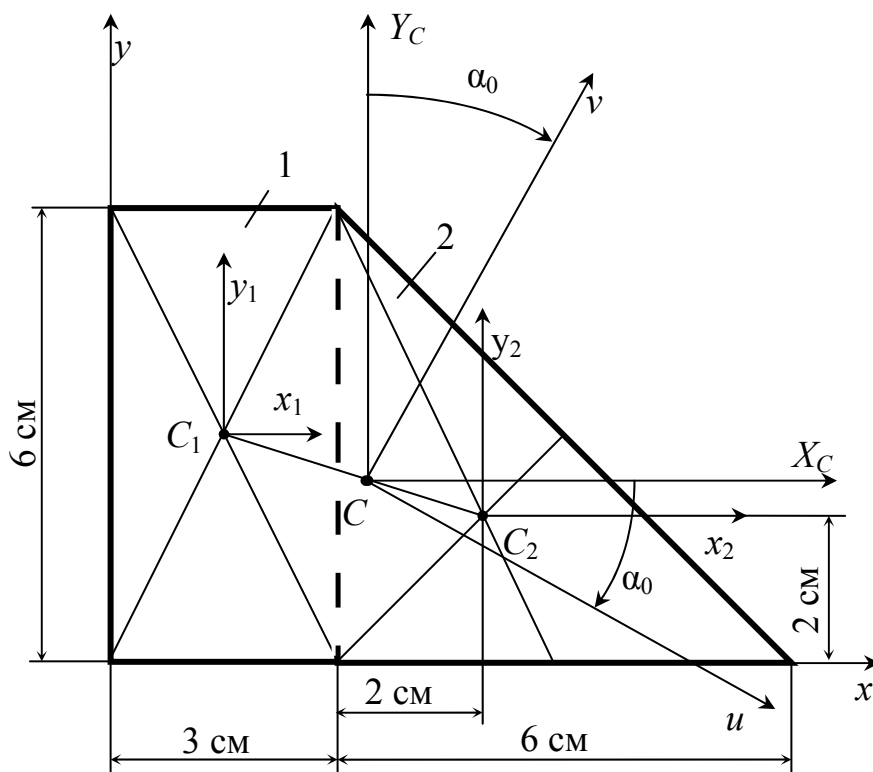


Рисунок 2.36

Розв'язання

1. Вибираємо систему координат x, y і, застосувавши метод поділу на частини, знаходимо координати центра ваги перерізу:

$$x_C = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F_1 + F_2}, \quad y_C = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2},$$

де F_1 і F_2 – площі частин перерізу,

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2;$$

$$F_1 = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2;$$

x_1 і x_2 – горизонтальні координати центрів ваги частин перерізу (точок C_1 і C_2):

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ см}, \quad x_2 = 3 + 2 = 5 \text{ см};$$

y_1 і y_2 – вертикальні координати центрів ваги частин перерізу:

$$y_1 = \frac{6}{2} = 3 \text{ см};$$

$$y_2 = \frac{6}{3} = 2 \text{ см}.$$

Тоді:

$$x_C = \frac{18 \cdot 1,5 + 18 \cdot 5}{18 + 18} = \frac{117}{36} = 3,25 \text{ см}, \quad y_C = \frac{18 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{18 + 18} = \frac{90}{36} = 2,5 \text{ см}.$$

2. Позначаємо на перерізі центр ваги (точку C) і проводимо через неї довільні центральні осі X_C, Y_C .

3. Підраховуємо моменти інерції перерізу відносно осей X_C, Y_C :

$$J_{X_C} = J_{x_1} + F_1 \cdot (y_1 - y_C)^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot (y_C - y_2)^2,$$

$$J_{Y_C} = J_{y_1} + F_1 \cdot (x_C - x_1)^2 + J_{y_2} + F_2 \cdot (x_2 - x_C)^2,$$

$$J_{X_C Y_C} = J_{x_1 y_1} + F_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 \cdot a_2 \cdot b_2,$$

де $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1 y_1}, J_{x_2}, J_{y_2}, J_{x_2 y_2}$ – моменти інерції частин перерізу відносно своїх центральних осей:

$$J_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 6^3 = 54 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 3^3 = 13,5 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_1 y_1} = 0 \quad (\text{частина 1 має осі симетрії});$$

$$J_{x_2} = \frac{1}{36} \cdot 6 \cdot 6^3 = 36 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = J_{x_2} = 36 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2 y_2} = -\frac{1}{72} \cdot 6^2 \cdot 6^2 = -18 \text{ см}^4;$$

$a_1; b_1; a_2; b_2$ – відповідно горизонтальні та вертикальні координати точок C_1 і C_2 у системі координат X_C, Y_C :

$$a_1 = -(x_C - x_1) = -(3,25 - 1,5) = -1,75 \text{ см};$$

$$b_1 = y_1 - y_C = 3 - 2,5 = 0,5 \text{ см};$$

$$a_2 = x_2 - x_C = 5 - 3,25 = 1,75 \text{ см};$$

$$b_2 = -(y_C - y_2) = -(2,5 - 2) = -0,5 \text{ см}.$$

З урахуванням цих числових даних маємо:

$$\begin{aligned} J_{X_C} &= 54 + 18 \cdot (3 - 2,5)^2 + 36 + 18 \cdot (2,5 - 2)^2 = \\ &= 54 + 4,5 + 36 + 4,5 = 99 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{Y_C} &= 13,5 + 18 \cdot (3,25 - 1,5)^2 + 36 + 18 \cdot (5 - 3,25)^2 = \\ &= 13,5 + 55,125 + 36 + 55,125 = 159,75 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{X_C Y_C} &= 0 + 18 \cdot (-1,75) \cdot 0,5 + (-18) + 18 \cdot 1,75 \cdot (-0,5) = \\ &= 0 - 15,75 - 18 - 15,75 = -49,5 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

4. Визначаємо кут повороту α_0 , при якому осі X_C, Y_C стають головними центральними осями перерізу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{X_C Y_C}}{J_{Y_C} - J_{X_C}} = \frac{2 \cdot (-49,5)}{159,75 - 99} = -\frac{99}{60,75} = -1,63;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1,63) = -29,24^\circ$$

5. Визначаємо головні моменти інерції перерізу, користуючись формулою (2.41).

Оскільки $J_{Y_C} > J_{X_C}$, повинно бути: $J_v > J_u$. Тоді

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{J_{X_C} + J_{Y_C}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{X_C} - J_{Y_C}}{2}\right)^2 + J_{X_C Y_C}^2} = \\ &= \frac{99 + 159,75}{2} - \sqrt{\left(\frac{99 - 159,75}{2}\right)^2 + (-49,5)^2} = \\ &= 129,375 - \sqrt{922,641 + 2450,25} = \\ &= 129,375 - 58,077 = 71,298 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{J_{X_C} + J_{Y_C}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{X_C} - J_{Y_C}}{2}\right)^2 + J_{X_C Y_C}^2} = \\ &= 129,375 + 58,077 = 187,452 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$J_v + J_u = 71,298 + 187,452 = 258,75 \text{ см}^4;$$

$$J_{X_C} + J_{Y_C} = 99 + 159,75 = 258,75 \text{ см}^4.$$

Оскільки сума осьових моментів інерції незмінна, розрахунок виконано вірно.

2.4 Теорія напруженого стану

2.4.1 Лінійний напружений стан

При вивченні напружень у стрижні при розтяганні-стисканні ми раніше розглядали тільки напруження за поперечними перерізами, перпендикулярними до осі стрижня. Визначимо напруження, які діють за яким-небудь похилим перерізом. Розглянемо призматичний стрижень, розтягнутий силами P (рис. 2.37, а).

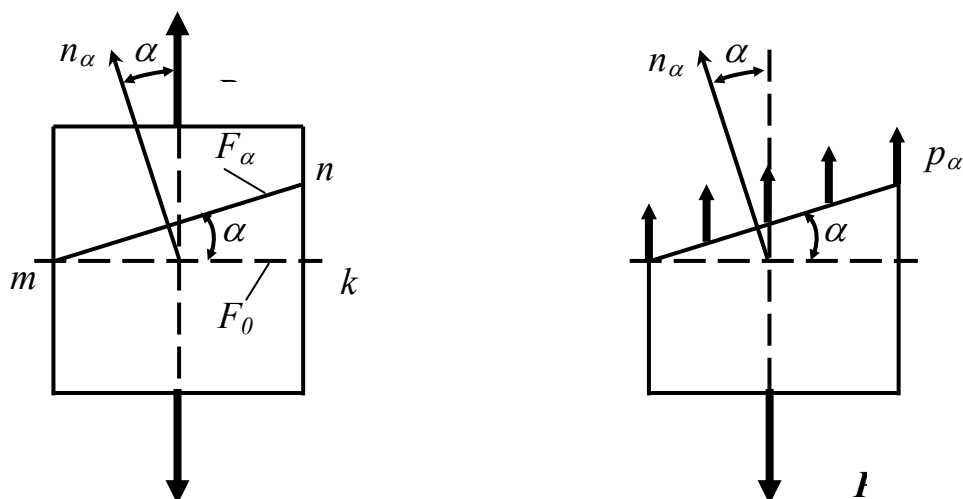


Рисунок 2.37

Поділимо його на дві частини перерізом mn , який утворює кут α з поперечним перерізом mk , перпендикулярним до подовжньої осі стрижня i . Додатний напрямок відліку цього кута – проти ходу годинникової стрілки.

Позначимо площу перерізу mk через F_0 , а перерізу mn – через F_α . При цьому

$$F_\alpha = \frac{F_0}{\cos \alpha}$$

Для знаходження напружень за перерізом mn відкинемо верхню частину стрижня (рис. 2.37, б) і замінимо дію її на нижню частину напруженнями, які дорівнюють:

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{F_0} = \sigma_0 \cdot \cos \alpha$$

де $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$ – нормальне напруження по площадці mk , перпендикулярній до осі стрижня.

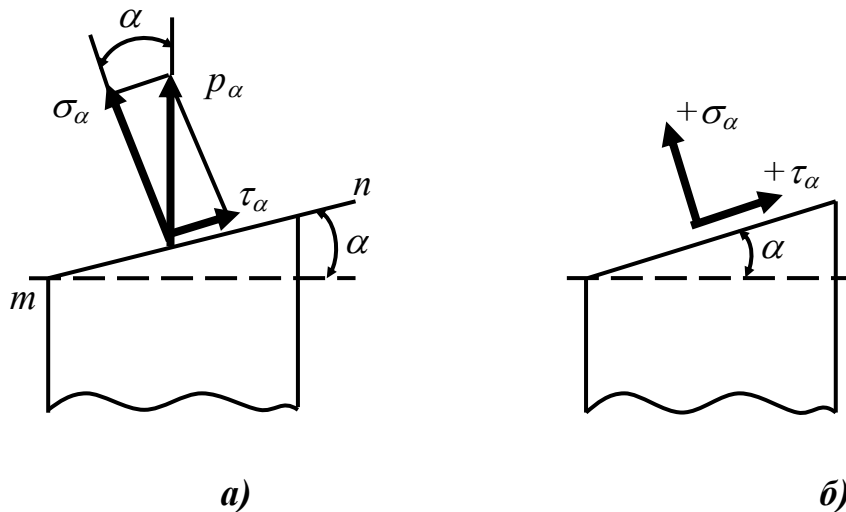


Рисунок 2.38

Розкладемо напруження P_α на дві взаємно перпендикулярні складові (рис. 2.38, а): *нормальне напруження* σ_α і *дотичне* τ_α . Величини цих напружень мінятимуться залежно від зміни кута α між нормаллю до площадки – n_α і напрямком розтягувальної сили:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha, \quad (2.38)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \sigma_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_0 \cdot \sin 2\alpha \quad (2.39)$$

Скористуємося такими *правилами знаків*.

Нормальні напруження вважатимемо додатними, якщо вони викликають розтягування елемента.

Дотичні напруження вважатимемо додатними, якщо вони як сили прагнуть повернути залишену частину елемента відносно будь-якої його внутрішньої точки за ходом годинникової стрілки.

На рисунку 2.38, б показані додатні напрямки напружень σ_α і τ_α .

Ці два види напружень відповідають двома видам деформацій, які випробовує матеріал стрижня. Виділимо з розтягнутого стрижня двома похилими паралельними перерізами 1-1 і 2-2 тонкий шар матеріалу (рис. 2.39).

На кожну площину діють нормальні напруження, що розтягують елемент, і дотичні, що викликають зсув перерізів 1-1 і 2-2 паралельно один одному.

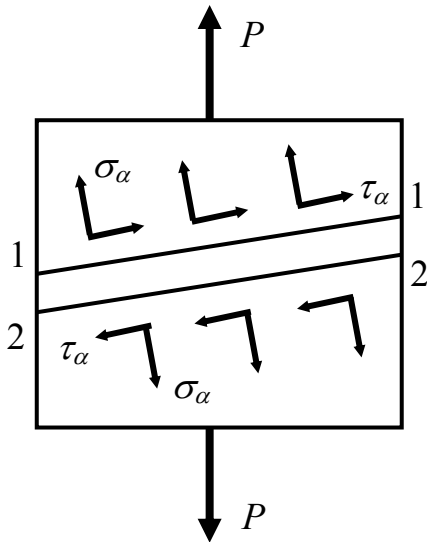


Рисунок 2.39

Таким чином, присутність цих двох видів напружень відповідає наявності двох видів деформацій: подовжньої деформації (подовження або укорочення) і деформації зсуву. Цьому відповідають два види руйнування матеріалу – *шляхом відриву* і *шляхом зсуву*.

Для того щоб переконатися в достатньому опорі матеріалу стрижня названим видам руйнування, необхідно встановити найбільші значення σ_α і τ_α .

Із формули (2.38) витікає, що максимальне значення σ_α має місце при $\alpha = 0^\circ$. Згідно ж з формулою (2.39) τ_α досягає максимуму при $\sin 2\alpha = 1$, тобто при $2\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 45^\circ$. Величини найбільших напружень при цьому дорівнюють:

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_0 = \frac{P}{F_0}; \quad \max \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_0$$

2.4.2 Поняття про головні напруження. Види напружених станів

Ми ознайомилися з поведінкою матеріалу при осьовому або, як його часто називають, простому розтяганні та стисканні.

Було показано, що при простому розтяганні можливі напруження двох видів: нормальні та дотичні. З формул (2.38) і (2.39) виходить, що за перерізами, перпендикулярними до осі розтягнутого стрижня ($\alpha = 0^\circ$), виникає тільки нормальне напруження (тобто $\tau = 0$), за перерізами, паралельними його осі ($\alpha = 90^\circ$), не виникає ні нормальних, ні дотичних напружень (тобто $\sigma = 0$ і $\tau = 0$).

Площинки, на яких відсутні дотичні напруження, називаються головними площадками. Нормальні напруження, які діють на цих площадках, називаються головними напруженнями, а осі координат, паралельні головним напруженням, зветься головними напрямками.

У кожній точці напруженого тіла можна виділити елементарний кубик, гранями якого є головні площадки. Матеріал кубика розтягується або стискається трьома взаємно перпендикулярними головними напруженнями (рис. 2.40).

У разі простого розтягання чи стискання тільки одне головне напруження в точках стрижня відмінне від нуля. Такий напружений стан називається лінійним.

На практиці зустрічаються випадки, коли елемент матеріалу у вигляді кубика піддається розтягуванню або стисканню за двома взаємно перпендикулярними напрямками або за всіма трьома.

Випадок, коли два головні напруження в даній точці не дорівнюють нулю, називається плоским напруженим станом.

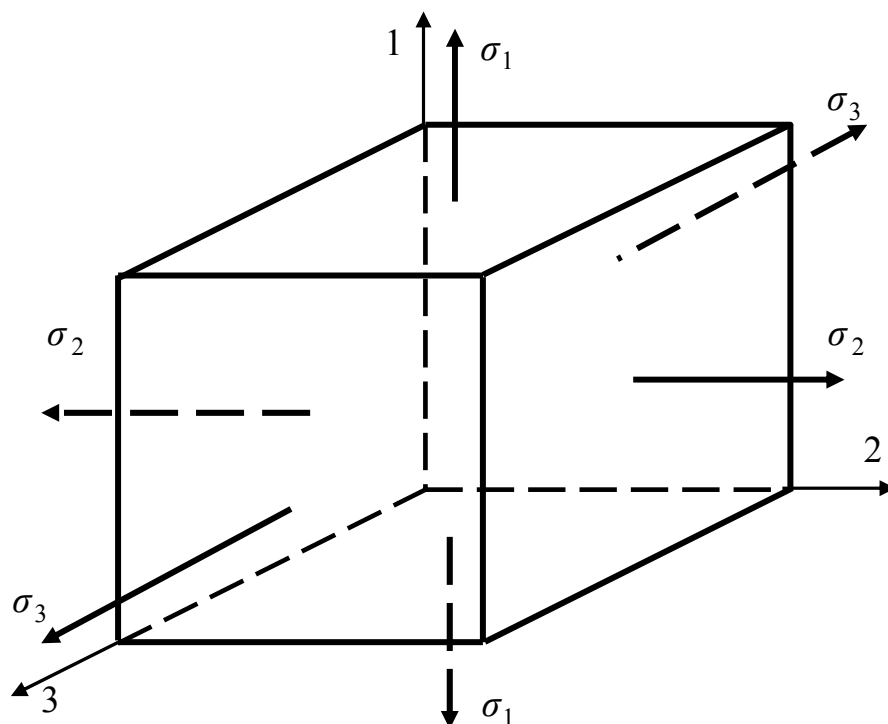


Рисунок 2.40

Якщо ж всі три головні напруження не дорівнюють нулю, то в наявності найзагальніший випадок розподілу напружень у матеріалі – *об'ємний напружений стан*, при якому елементарний кубик піддається розтягуванню або стисканню за трьома взаємно перпендикулярними напрямками (див. рис. 2.40).

Головні напруження позначають символами σ_1 , σ_2 і σ_3 . Такі ж індекси мають і відповідні головні напрямки (див. рис. 2.40). Нумерацію головних напружень встановлено так, щоб дотримувалася (в алгебраїчному розумінні) умова:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2.40)$$

2.4.3 Плоский напружений стан

У теорії напруженого стану розв'язують дві основні задачі – пряму і обернену.

Пряма задача ставить за мету визначення нормальних і дотичних напружень на довільних площадках навколо точки залежно від головних напружень у цій точці, величини і напрямки яких є відомими.

Обернена задача, навпаки, переслідує мету визначення напрямків і величин головних напружень за відомими нормальними і дотичними напруженнями на двох (при плоскому напруженому стані) або трьох (при об'ємному напруженому стані) взаємно перпендикулярних площадках навколо точки.

У випадку плоского напруженого стану обидві ці задачі розв'язують як аналітичним, так і графічним методами.

Розглянемо аналітичне розв'язання прямої задачі для плоского напруженого стану (рис. 2.41).

Нехай у деякій точці тіла діють головні напруження σ_1 і σ_2 , а $\sigma_3 = 0$. Треба знайти нормальні і дотичні напруження, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках, нормалі яких складають кути α і β з першим головним напрямком (див. рис. 2.41), причому кут α будемо вважати дотичним, а кут β – від'ємним:

$$\beta = -(90^\circ - \alpha). \quad (2.41)$$

Для розв'язання задачі розглянемо умови рівноваги кожного з клинів, похилі поверхні яких мають нормалі n_α і n_β (рис. 2.42) і площі dF .

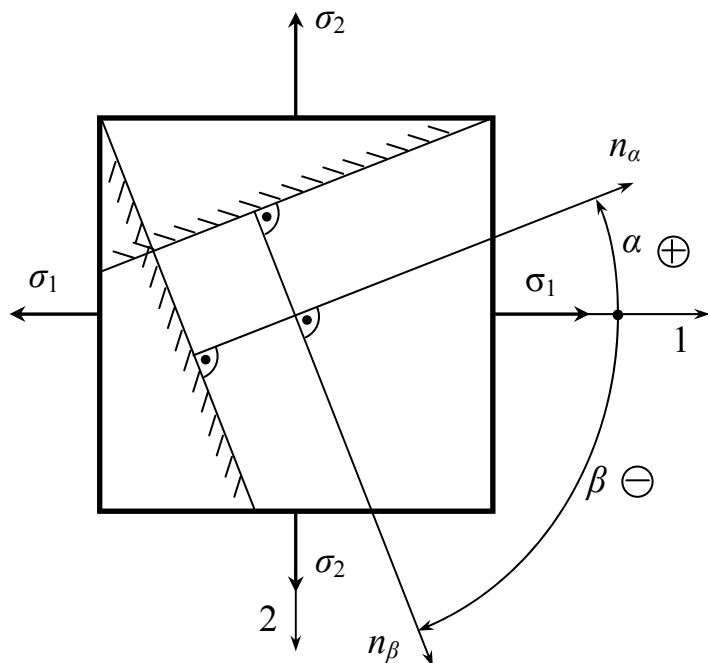


Рисунок 2.41

Для першого клина (див. рис. 2.42, а):

$$\sum P_x = 0: \quad -\sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha + \sigma_2 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha + \tau_\alpha \cdot dF = 0,$$

$$\text{або } \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (-\sigma_1 + \sigma_2) + \tau_\alpha = 0;$$

$$\sum P_y = 0: \quad \sigma_\alpha \cdot dF - \sigma_1 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha - \sigma_2 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\text{або } \sigma_\alpha - \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = 0. \quad (2.43)$$

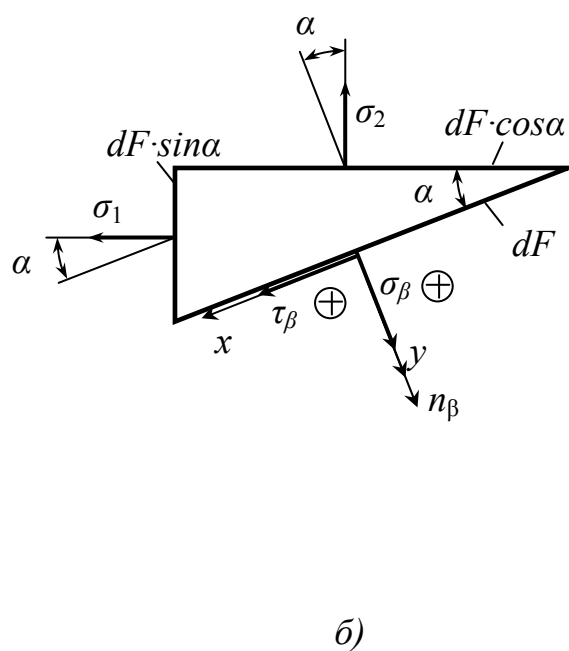
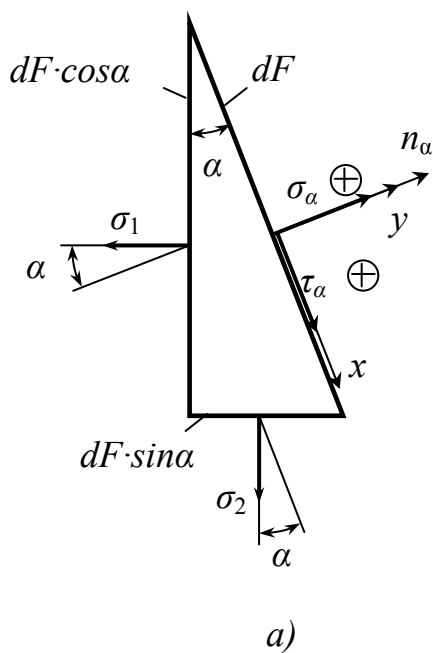


Рисунок 2.42

Для другого клина (див. рис. 2.42, б):

$$\sum P_x = 0: \quad \sigma_1 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha - \sigma_2 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha + \tau_\beta \cdot dF = 0,$$

$$\text{або} \quad \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) + \tau_\beta = 0; \quad (2.44)$$

$$\sum P_y = 0: \quad \sigma_\beta \cdot dF - \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot dF \cdot \sin \alpha - \sigma_2 \cdot \cos \alpha \cdot dF \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\text{або} \quad \sigma_\beta - \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha - \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha = 0. \quad (2.45)$$

З рівнянь (2.42)...(2.45) знаходимо:

$$\begin{cases} \tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_2), \\ \sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\begin{cases} \tau_\beta = -\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) = -\tau_\alpha, \\ \sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \end{cases} \quad (2.47)$$

Оскільки $\sigma_1 > \sigma_2$ за означенням (див. формулу (2.40)), величина τ_α є додатною, а τ_β – від'ємною. Таким чином, дотичні напруження по двох взаємно перпендикулярних площадках однакові за величиною і протилежні за знаком. Цю властивість зазвичай називають *законом парності дотичних напружень*.

Склавши між собою значення σ_α і σ_β з виразів (2.46) і (2.47), отримаємо:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}. \quad (2.48)$$

Ця властивість може бути сформульована так: *сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках постійна і дорівнює сумі головних напружень*.

Дослідивши на екстремум вираз для σ_α із формул (2.46), можна пересвідчитись, що

$$\begin{cases} \max \sigma_\alpha = \sigma_1 & (\text{при } \alpha = 0^\circ), \\ \min \sigma_\alpha = \sigma_2 & (\text{при } \alpha = 90^\circ), \end{cases}$$

тобто, найбільше і найменше нормальні напруження в точці – це головні напруження σ_1 і σ_2 .

Що ж стосується дотичного напруження τ_α , то його максимальне значення має місце при $\alpha = 45^\circ$:

$$\max \tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2).$$

Розглянемо тепер аналітичне розв'язання оберненої задачі для плоского напруженого стану.

Нехай відомі нормальні й дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках навколо точки тіла. Треба знайти величини і напрямки головних напружень в цій точці (рис. 2.43).

Будемо вважати величини σ_α , σ_β , τ_α додатними, а величину τ_β від'ємною, як це витікає з рівнянь (2.46), (2.47), отриманих при розв'язанні прямої задачі, в якій кут α між першим головним напрямком і n_α відкладався проти ходу годинникової стрілки (див. рис. 2.41).

Тепер, щоб визначити напрямок σ_1 , треба відкласти такий самий за модулем, але протилежний за знаком кут $\alpha_0 = -\alpha$.

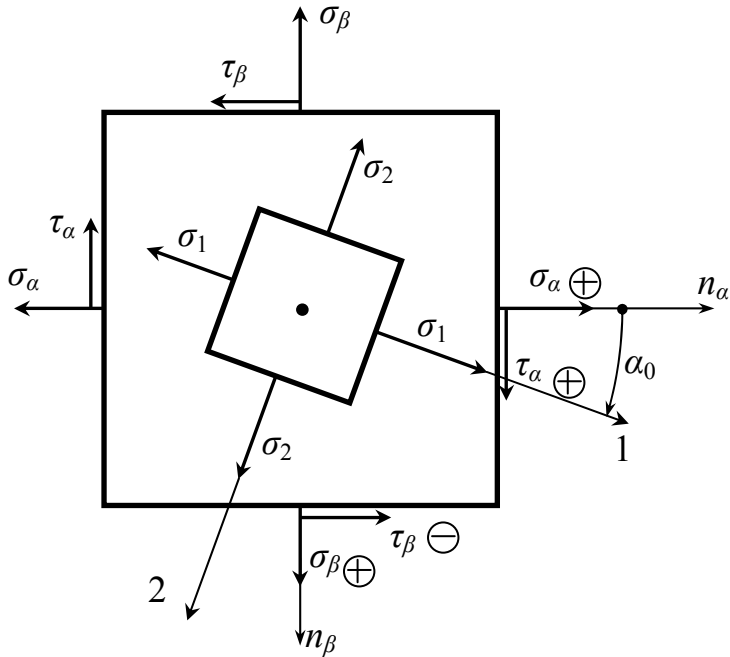


Рисунок 2.43

Для визначення цього кута, також величин σ_1 і σ_2 скористуємося рівняннями (2.42), (2.43) і (2.45). З них після низки перетворень маємо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (2.49)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \quad (2.50)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (2.51)$$

Графічний метод розв'язання прямої й оберненої задач для плоского напруженого стану був запропонований німецьким вченим **Мором** (1835–1918). Розглянемо його сутність.

Для розв'язання прямої задачі будується відповідне коло напружень (коло Мора), який зображений на рисунку 2.44. Він будується в координатах σ, τ з дотриманням певного масштабу.

По осі σ відкладаються відрізки, які дорівнюють σ_1 і σ_2 , після чого визначаються центр круга (точка O_1) і його радіус R :

$$OO_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

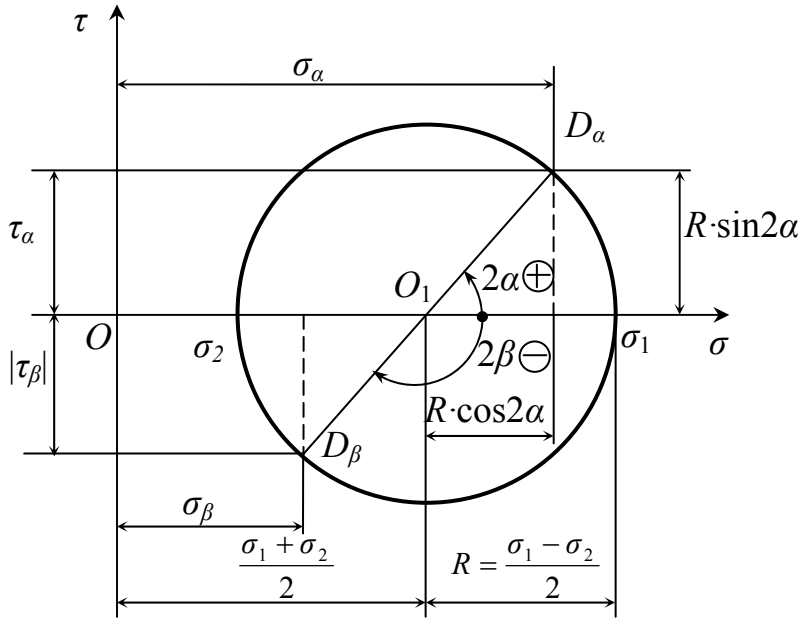


Рисунок 2.44

Із центра круга під кутами 2α і 2β до осі σ проводяться прямі до перетину з колом радіуса R . Так визначаються точки D_α і D_β , координати яких є нормальними і дотичними напруженнями на площадках з нормальми n_α і n_β (див. рис. 2.44). Ці координати достатньо просто підрахувати або виміряти з урахуванням прийнятого масштабу. Слід зауважити, що вказані точки лежать на кінцях одного діаметра, бо на підставі (2.48) виходить:

$$2\alpha + |2\beta| = 2\alpha + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

Легко пересвідчитись, що графічний метод дає такі самі результати, що і аналітичний. Так, з рисунка 2.44 маємо:

$$\sigma_\alpha = OO_1 + R \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{\sigma_2}{2} \cdot (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{\sigma_1}{2} \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_2}{2} \cdot 2 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_\beta = OO_1 - R \cdot \cos 2\alpha = \dots = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\beta = -R \cdot \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\tau_\alpha$$

Порівнюючи отримані результати з виразами (2.46) і (2.47), бачимо, що вони повністю збігаються.

Коло Мора для оберненої задачі будується дещо інакше (рис. 2.45).

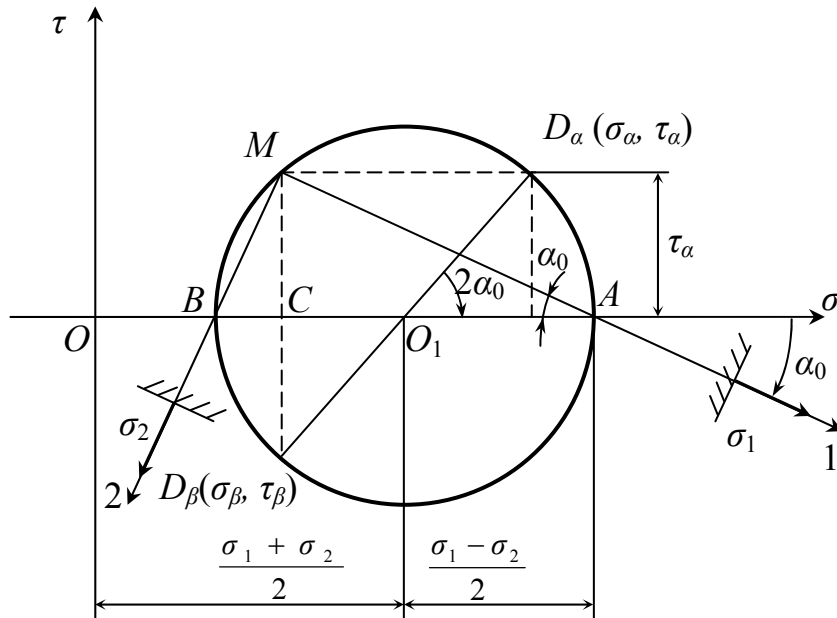


Рисунок 2.45

Оскільки величини σ_α , τ_α , σ_β , τ_β цього разу відомі, то спершу зображуємо точки D_α і D_β , координати яких є вказані величини, а вже через них проводимо діаметр кола, визначаємо його центр (точку O_1) і радіус, головні напруження і кут α_0 :

$$OO_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2},$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2},$$

$$\sigma_1 = OA = OO_1 + R = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \quad (2.52)$$

$$\sigma_2 = OB = OO_1 - R = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}, \quad (2.53)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{\tau_\alpha}{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)/2} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}. \quad (2.54)$$

Є ще один спосіб визначення кута α_0 . Згідно з ним слід побудувати полюс M (див. рис. 2.45) і провести з нього прямі через точки A і B , які вкажуть дійсні напрямки σ_1 і σ_2 , бо вісь σ співпадає з напрямком σ_α (див. рис. 2.43). Цього разу вписаний кут MAB і центральний кут $D_\alpha O_1 A$ спираються на однакові дуги BM і AD_α , тому кут MAB вдвічі менший кута $D_\alpha O_1 A$ і дорівнює α_0 .

Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{MC}{AC} = -\frac{\tau_\alpha}{OA - OC} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{\tau_\beta}{\sigma_1 - \sigma_\beta}.$$

Порівнявши вирази (2.52)...(2.54) з виразами (2.49)...(2.51), що були отримані аналітичним методом, бачимо їх повну ідентичність.

Слід зауважити, що всі наведені вище формули стосуються випадку, коли в точці діють головні напруження σ_1 і σ_2 , а $\sigma_3 = 0$. На практиці ж можливі й інші комбінації головних напружень. У цих випадках треба замінити σ_1 на більше із двох головних напружень, задіяних в задачі, а σ_2 – на менше із них.

Процедуру такої заміни проілюструємо такими прикладами, у яких діють σ_2 і σ_3 , а $\sigma_1 = 0$.

Приклад 2.8. Визначити нормальні й дотичні напруження на площадках з нормаллями n_α і n_β (рис. 2.46) при таких вихідних даних: $\sigma_2 = -20$ МПа, $\sigma_3 = -100$ МПа, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -60^\circ$.

Розв’язання

У цьому прикладі запропонована пряма задача теорії плоского напруженого стану. Для її розв’язання побудуємо відповідне коло Мора (рис. 2.47). З цього кола отримуємо:

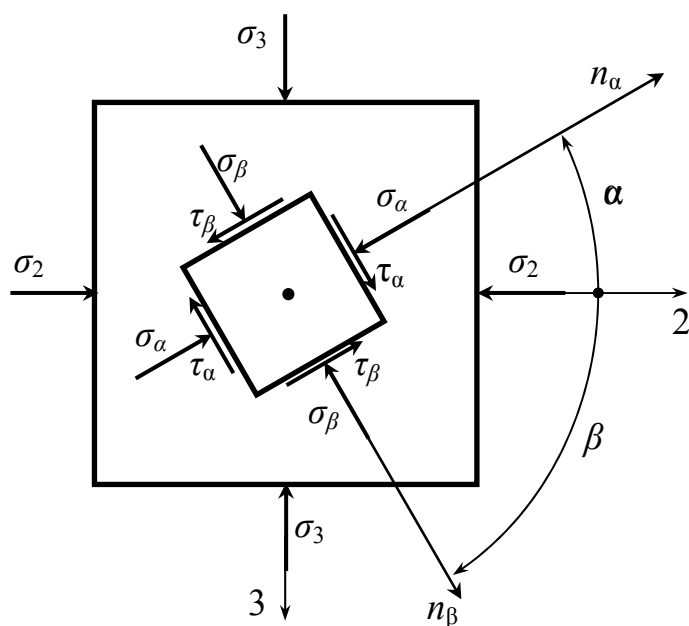


Рисунок 2.46

1. Координата точки O_1 (центра кола):

$$OO_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot (-20 - 100) = -60 \quad (\text{МПа}).$$

2. Радіус кола:

$$R = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot (-20 + 100) = 40 \quad (\text{МПа}).$$

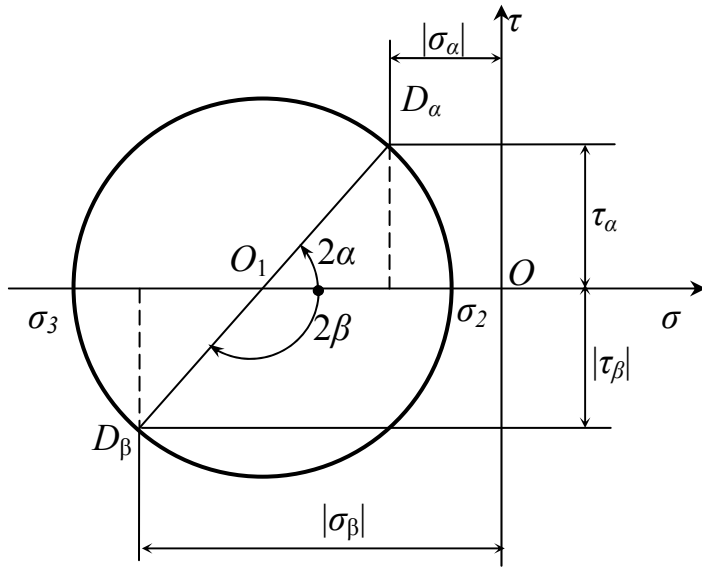


Рисунок 2.47

3. Напруження на площадках:

$$\sigma_{\alpha} = OO_1 + R \cdot \cos 2\alpha = -60 + 40 \cdot 0,5 = -40 \quad (\text{МПа});$$

$$\tau_{\alpha} = R \cdot \sin 2\alpha = 40 \cdot 0,866 = 34,64 \quad \text{МПа};$$

$$\sigma_{\beta} = OO_1 - R \cdot \cos 2\alpha = -60 - 40 \cdot 0,5 = -80 \quad (\text{МПа});$$

$$\tau_{\beta} = -\tau_{\alpha} = -34,64 \quad \text{МПа}.$$

4. Позначаємо визначені напруження на рисунку 2.46 з урахуванням їх знаків.

Приклад 2.9. Визначити величини і напрямки головних напружень в точці тіла, якщо $\sigma_{\alpha} = -60$ МПа; $\tau_{\alpha} = 40$ МПа; $\sigma_{\beta} = -140$ МПа; $\tau_{\beta} = -40$ МПа (рис. 2.48).

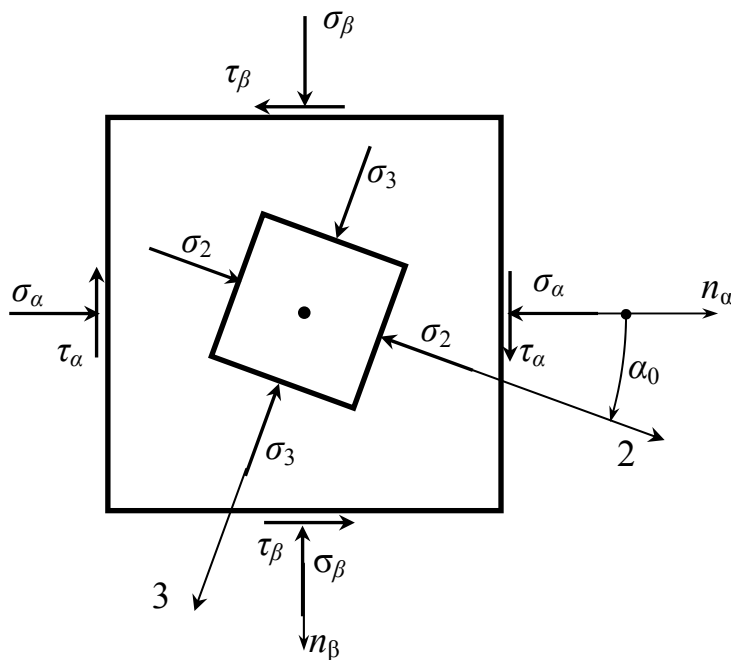


Рисунок 2.48

Розв'язання

У цьому прикладі пропонується обернена задача теорії плоского напруженого стану. Для її розв'язання побудуємо відповідне коло Мора (рис. 2.49).

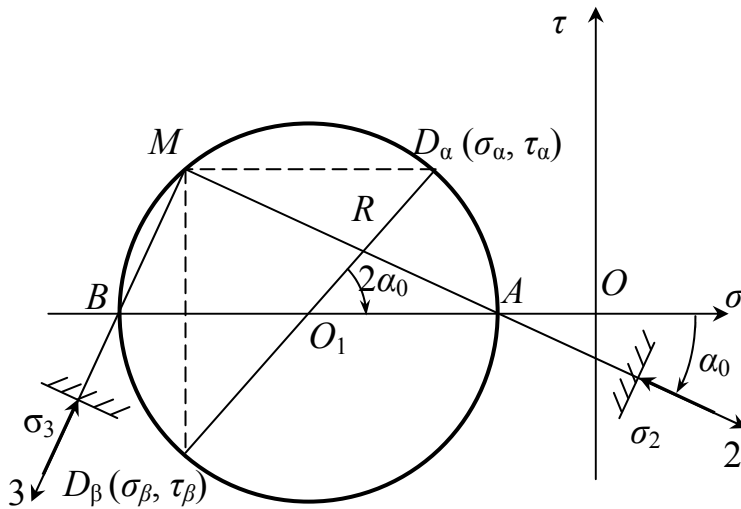


Рисунок 2.49

З нього знаходимо:

1. Координата точки O_1 (центра кола):

$$OO_1 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) = \frac{1}{2} \cdot (-60 - 140) = -100 \text{ МПа.}$$

2. Радіус кола:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{-60 + 140}{2}\right)^2 + 40^2} = 56,57 \text{ МПа.}$$

3. Головні напруження:

$$\sigma_2 = OO_1 + R = -100 + 56,57 = -43,43 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = OO_1 - R = -100 - 56,57 = -156,57 \text{ МПа;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\tau_\beta}{\sigma_2 - \sigma_\beta} = \frac{-40}{-43,43 + 140} = -\frac{40}{96,57} = -0,414$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-0,414) = -22,49^\circ.$$

4. Позначимо знайдені головні напруження σ_2 і σ_3 на схемі до задачі (див. рис. 2.48).

2.4.4 Об'ємний напружений стан

У випадку об'ємного напруженого стану розв'язання обох основних задач можливе тільки аналітичним методом: застосування кругів Мора в цьому випадку є неприйнятним, бо вони враховують тільки два із трьох головних напружень. Аналітичний же метод з причини його складності до програми цього курсу не включено. Цей метод зазвичай застосовують в університетських курсах.

В окремих випадках, коли площадка паралельна якомусь одному із головних напружень, напружений стан на цій площадці можна дослідити за допомогою кола Мора, побудованого на

двох інших головних напруженнях, бо головне напруження, яке паралельне площадці, не впливає на її напружений стан. Оскільки головних напружень в точці тіла три, то за допомогою кіл Мора можна дослідити напружений стан на трьох площадках, паралельних головним напруженням (рис. 2.50). Так, напружений стан площадки, паралельної σ_1 , визначають точки кола L_I з центром O_1 , паралельних σ_2 – точками кола L_{II} з центром O_2 , паралельних σ_3 – точками кола L_{III} з центром O_3 (див. рис. 2.50).

Якщо площадка перетинає три головних напрямки, точка D_α , що характеризує напружений стан на цій площадці, вже не лежить ні на одному з кіл. Вона розташована десь у заштрихованій зоні, де саме, тобто які напруження σ_α і τ_α діють на ній, може встановити лише додаткове теоретичне аналізування. Кола ж Мора, зображені на рисунку 2.50, не в змозі відповісти на це питання. Але вони дозволяють встановити межі, в яких можуть знаходитись величини σ_α і τ_α на площадці D_α .

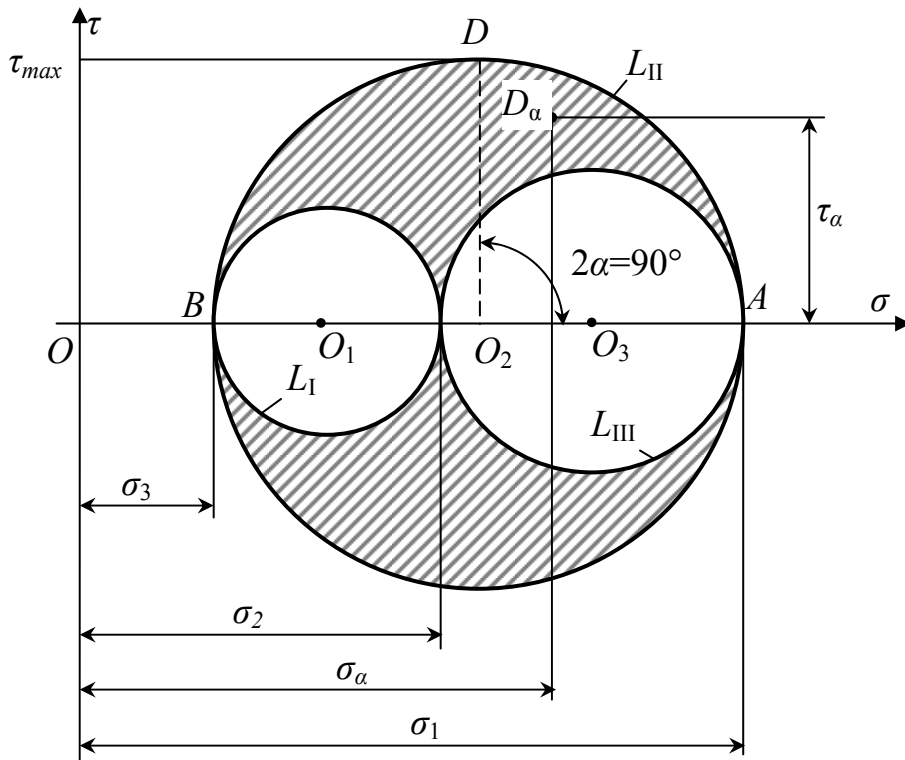


Рисунок 2.50

Так, нормальне напруження на цій площадці не може бути меншим σ_3 і більшим σ_1 :
 $\sigma_3 \leq \sigma_\alpha \leq \sigma_1$.

Дотичне напруження τ_α може змінюватись у межах

$$-R_{\max} \leq \tau_\alpha \leq R_{\max}$$

де R_{\max} – радіус найбільшого кола, побудованого на σ_1 і σ_3 :

$$R_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Таким чином, максимальне дотичне напруження в точці дорівнює

$$\tau_{\max} = R_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3). \quad (2.55)$$

Воно діє на площадці D (див. рис. 2.50), яка розташована під кутом $2\alpha = 90^\circ$ і $\alpha = 45^\circ$ до σ_1 .

Напруження на гранях елемента, виділеного навколо точки тіла, спричиняють зміну його об'єму і форми. Якщо цей елемент побудований трьома довільними взаємно перпендикулярними площадками, то нормальні напруження на його гранях змінюють довжину ребер, а дотичні – спотворюють прямі кути. Якщо ж він створений головними площадками, то

напруження на них ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) викликають тільки зміну довжини ребер, не спотворюючи при цьому прямих кутів. Але зміна форми і в цьому випадку має місце, бо змінюються співвідношення розмірів елемента (так, зокрема, кубик стає паралелепіпедом з різною довжиною ребер).

Відносні деформації ребер елемента, гранями якого є головні площадки, зветься головними деформаціями в точці тіла і позначаються $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (рис. 2.51):

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}.$$

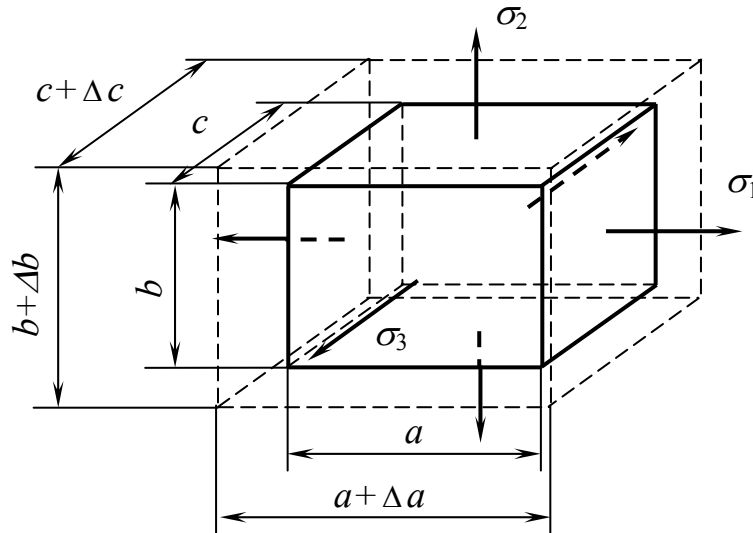


Рисунок 2.51

Індекси головних деформацій – такі ж, як і головних напружень, що діють уздовж відповідних ребер елемента.

Зв'язок головних деформацій з головними напруженнями встановлює узагальнений закон Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)], \end{cases} \quad (2.56)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона;

E – модуль пружності I роду.

З рівнянь (2.56) виходить, що величина того чи іншого головного напруження визначає відповідну головну деформацію не сама, а за участю двох інших головних напружень, які виливають на дану деформацію через коефіцієнт Пуассона, зменшуючи її.

Головні деформації, у свою чергу, визначають відносну зміну об'єму паралелепіпеда навколо точки ε_V . До деформації цей елемент мав об'єм

$$V_0 = a \cdot b \cdot c$$

У деформованому стані його об'єм зміниться і дорівнюватиме:

$$V = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c) = a \cdot b \cdot c \cdot \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) =$$

$$= a \cdot b \cdot c \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3) = V_0 \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3).$$

Враховуючи незначну величину головних деформацій, останніми чотирма членами можемо нехтувати. Тоді відносна зміна об'єму

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Виразивши головні подовження через головні напруження за допомогою формул (2.56), одержимо остаточно:

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (2.57)$$

У випадках рівномірного всебічного розтягання або стискання:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = P.$$

Тоді формула (2.57) набуває вигляду

$$\varepsilon_V = \frac{(1 - 2\mu) \cdot 3P}{E} = \frac{P}{K},$$

де K – так званий модуль об'ємної деформації:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\mu)}.$$

Якщо $\mu = 0,5$ (натуральний каучук), величина ε_V дорівнює нулю, тобто об'єм матеріалу при деформації не змінюється.

Разом з величинами ε_1 , ε_2 , ε_3 і ε_V деформований стан матеріалу навколо точки характеризує величина питомої потенційної енергії пружної деформації u , тобто такої, що накопичується в одиниці об'єму елемента:

$$u = \frac{\Pi}{V_0} \quad (2.58)$$

При розтяганні зразка діаграма розтягання на ділянці пружності має вигляд, наближений до прямої лінії (див. рис. 2.17). У цьому випадку згідно з теоремою **Клапейрона**, відомою з курсу фізики, величина потенційної енергії пружної деформації зразка Π дорівнює площі діаграми розтягання:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta \ell \quad (2.59)$$

де P – величина сили, що розтягує зразок;

$\Delta \ell$ – абсолютне подовження зразка при цій силі.

Виразимо тепер початковий об'єм зразка через його площу поперечного перерізу F_0 і довжину ℓ_0 :

$$V_0 = F_0 \cdot \ell_0 \quad (2.60)$$

Напружений стан в об'ємі зразка – лінійний і однорідний, тобто в усіх його точках діє однакоке

головне напруження σ_1 . Тому з урахуванням (2.59) і (2.60) вираз (2.58) набуває вигляду:

$$u = \frac{\Pi}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \Delta \ell}{F_0 \cdot \ell_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{F_0} \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1$$

У разі об'ємного напруженого стану:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3 \quad (2.61)$$

Замінивши в (2.61) головні деформації ε_1 , ε_2 і ε_3 їх виразами із узагальненого закону Гука (2.58), після перетворень отримуємо:

$$u = \frac{1}{2E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)] \quad (2.62)$$

Зважаючи на те, що при об'ємному напруженому стані змінюються і об'єм елемента, і його форма, величину u можна розкласти на дві складові, пов'язані відповідно зі зміною об'єму елемента (u_0) і зміною його форми (u_ϕ):

$$u = u_0 + u_\phi$$

Визначимо спочатку величину u_0 . Для цього розкладемо реальний об'ємний напружений стан (рис. 2.52, а) на об'ємне рівномірне розтягання (рис. 2.52, б), при якому змінюється тільки об'єм елемента, і додатковий до нього об'ємний напружений стан (рис. 2.52, в), при якому змінюється лише форма елемента. При цьому

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - P; \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - P; \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - P$$

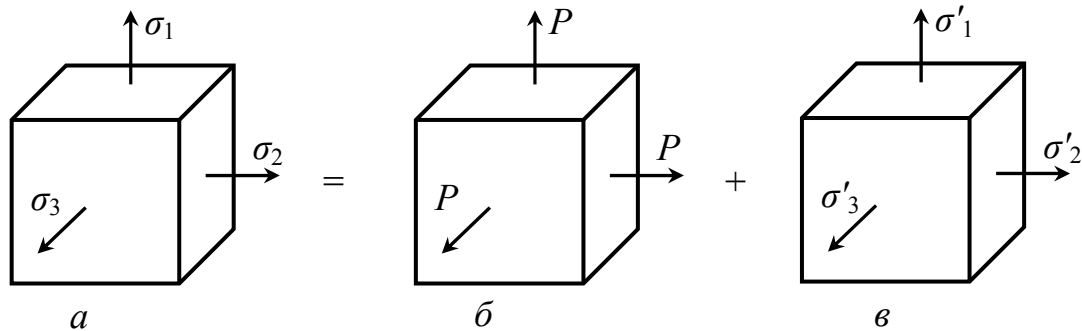


Рисунок 2.52

Значення P при такому підході визначимо за допомогою формули (2.57) з урахуванням відсутності зміни об'єму елемента в додатковому напруженому стані (див. рис. 2.52, в):

$$\varepsilon'_V = \frac{(1-2\mu)}{E} \cdot (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = 0 \quad \text{або}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 &= \\ &= (\sigma_1 - P) + (\sigma_2 - P) + (\sigma_3 - P) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3P = 0. \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Звідси

(2.63)

Тепер запишемо на підставі (2.62) вираз для u ($u = u_0$) стосовно рівномірного об'ємного розтягання (див. рис. 2.52, б):

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} \cdot [P^2 + P^2 + P^2 - 2\mu \cdot (P \cdot P + P \cdot P + P \cdot P)] = \\ &= \frac{3P^2}{2E} \cdot (1 - 2\mu). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Підставивши в (2.64) вираз для P (2.63), остаточно отримаємо:

$$u_0 = \frac{(1-2\mu)}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Величину u_ϕ визначимо як різницю між u і u_0 :

$$u_\phi = u - u_0 = \frac{1}{2E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)] -$$

$$-\frac{(1-2\mu)}{6E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Після перетворень маємо:

$$u_\phi = \frac{(1+\mu)}{6E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]. \quad (2.65)$$

2.5 Теорії міцності

2.5.1 Завдання теорій міцності. Критерії міцності, еквівалентні напруження

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінювання міцності елемента конструкції за відомим напруженим станом, тобто за відомими головними напруженнями в кожній його точці. Найпростіше це завдання вирішується при лінійному напруженому стані, який має місце, зокрема, при розтяганні-стисканні стрижнів. У цьому випадку легко встановити експериментально значення небезпечних (або граничних) напружень і сформулювати відповідні умови міцності.

Так, для пластичних матеріалів небезпечним є напруження, що дорівнює границі текучості σ_T , яка вважається однаковою при розтяганні і стисканні. Для крихких матеріалів небезпечними є

напруження, які дорівнюють межі міцності (або тимчасовому опору) σ_B , при цьому вона має

різні значення при розтяганні (σ_B^+) і стисканні (σ_B^-). Відповідні значення допустимих напружень встановлюють, поділивши величини вказаних характеристик матеріалу на коефіцієнт запасу міцності (n_T або n_B).

У разі складного напруженого стану (плоского або об'ємного), коли в точках конструкції діють два або три головних напруження, небезпечний стан (текучість або руйнування) для одного і того самого матеріалу може мати місце при різних значеннях головних напружень залежно від співвідношень між ними. У цьому випадку експеримент не дозволяє отримати необхідні дані, бо важко, а то і зовсім неможливо, експериментально здійснити бажаний напружений стан. Вихід із такого тупикового стану надають так звані теорії міцності.

У кожній з таких теорій є той чи інший критерій міцності, тобто умова настання руйнування або переходу матеріалу в пластичний стан, при цьому цей критерій вважається незалежним від виду напруженого стану, що надає змоги встановити його значення, базуючись на даних експерименту з розтягання або стискання. Критерії міцності базуються на двох різних уявленнях про причину втрати матеріалом роботоспроможності. Одні теорії пов'язують це з дією нормальних напружень, які спричиняють розрив матеріалу, інші – з дією дотичних напружень, що призводять його перехід у пластичний стан (див. пункт 2.4.1).

При такому підході з'являється можливість оцінювати міцність матеріалу за так званою величиною еквівалентного напруження $\sigma_{екв}$, яка є тією чи іншою комбінацією головних напружень ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), різною в різних теоріях міцності.

На даний час винайдено багато теорій міцності. Більшість із них не пройшли достатньої перевірки практикою і залишилися на рівні гіпотез. Ряд інших отримали підтвердження в тій чи іншій області застосування і використовуються в практиці інженерних розрахунків. До них, в першу чергу, слід віднести, так звані, класичні (тобто загально признані) теорії міцності, які розглядаються в подальших розділах.

2.5.2 Перша теорія міцності (теорія найбільших розтягувальних напружень)

Ця теорія була створена великим ученим середньовіччя **Галілеєм**. Вона вбачає причину руйнування матеріалу в дії нормальних розтягувальних напружень. Згідно з нею небезпечний

стан матеріалу (початок руйнування) настає тоді, коли найбільше розтягувальне напруження в точці тіла досягає свого небезпечного значення σ_+^o , тобто

$$\sigma_+^{\max} = \sigma_+^o. \quad (2.66)$$

У загальному випадку напруженого стану (див. пункт 2.4.2):

$$\sigma_+^{\max} = \sigma_1. \quad (2.67)$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні):

$$\sigma_+^o = \sigma_T, \text{ або } \sigma_+^o = \sigma_B^+, \quad (2.68)$$

у залежності від типу матеріалу – пластичний чи крихкий (див. пункт 2.2.3).

Підставивши (2.67) і (2.68) в (2.66), маємо:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_T, \\ \sigma_1 = \sigma_B^+. \end{cases} \text{ або}$$

Умови міцності в цій теорії:

$$\begin{cases} \sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq [\sigma], \\ \sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq [\sigma_+], \end{cases} \quad (2.69)$$

де $[\sigma] = \sigma_T / n_T$, $[\sigma_+] = \sigma_B^+ / n_B$ (див. пункт 2.2.3, формули (2.6), (2.7)).

Таким чином, перша теорія міцності з трьох головних напружень враховує лише одне σ_1 , вважаючи, що два інших не впливають на міцність матеріалу. Експериментальна перевірка показує, що ця теорія міцності не придатна для більшості матеріалів і надає задовільних результатів лише для вельми крихких матеріалів (камінь, цеглина, кераміка, інструментальна сталь і т. п.). Використання її для визначення розмірів деталей при складному напруженому стані надає завищених результатів. Тому нею уникають користуватися.

Оскільки перша теорія не працює з пластичними матеріалами, перша з умов міцності (2.69) не має практичного застосування.

2.5.3 Друга теорія міцності (теорія найбільших відносних подовжень)

Ця теорія створена французьким ученим **Маріоттом**. Вона, як і перша теорія міцності, базується на уяві про руйнування матеріалу розривом. Згідно з нею небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільша відносна деформація розтягання в точці тіла (див. пункт 2.4.4)

досягає свого небезпечного значення ε_+^o :

$$\varepsilon_+^{\max} = \varepsilon_+^o. \quad (2.70)$$

У загальному випадку напруженого стану:

$$\varepsilon_+^{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (2.71)$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні, коли $\sigma_1 = \sigma_+^o$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$\varepsilon_+^o = \frac{1}{E} \cdot \sigma_+^o. \quad (2.72)$$

З урахуванням (2.71) і (2.72) умова (2.70) після спрощення набуває вигляду

$$\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_+^o.$$

Відповідна умова міцності:

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma],$$

$$\text{або} \quad \sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_B^+]. \quad (2.73)$$

Експериментальна перевірка цієї теорії надає позитивних результатів лише для деяких крихких матеріалів (високоміцні сталі, легований чавун і т. п.). Її застосування неприпустимо для матеріалів, що не підкоряються закону Гука або знаходяться за межами пропорційності. Оскільки друга теорія непридатна для пластичних матеріалів, перша з умов міцності (2.73) на практиці не застосовується.

2.5.4 Третя теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень)

Ця теорія була запропонована англійським ученим **Кулоном**. Вона вбачає причину появи пластичного стану матеріалу в дії дотичних напружень. Згідно з нею пластичний стан матеріалу настає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає свого небезпечного значення:

$$\tau_{\max} = \tau^o \quad (2.74)$$

У загальному випадку напруженого стану (див. пункт 2.4.4, формула (2.55)):

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3).$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні, коли $\sigma_1 = \sigma_+^o$; $\sigma_3 = 0$):

$$\tau^o = \frac{1}{2} \cdot \sigma_+^o \quad (2.75)$$

Підставивши (2.55) і (2.75) в (2.74), після спрощення отримаємо:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_+^o.$$

Відповідна умова міцності має вигляд

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad \text{або} \quad \sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_+]. \quad (2.76)$$

Третя теорія міцності добре підтверджується досвідом стосовно пластичних матеріалів і тому має достатньо широке розповсюдження в машинобудуванні й інших галузях промисловості. Недолік її полягає в тому, що вона не враховує середніх за величиною головних напружень σ_2 і тим самим дещо занижує допустиме навантаження конструкції і спричиняє відповідні перевитрати матеріалу.

Ця теорія непридатна для крихких матеріалів. Тому друга із умов міцності (2.76) на практиці не застосовується.

2.5.5 Четверта теорія міцності (енергетична теорія формозмінення)

Ця теорія належить німецькому вченому **Губеру**. Вона більш точно, ніж третя теорія міцності, прогнозує появу в матеріалі пластичних деформацій. Згідно з нею небезпечний стан (пластичність) у точці тіла виникає тоді, коли питома потенційна енергія пружної деформації

$$u_{\Phi} \text{ досягає свого небезпечного значення } u_{\Phi}^o:$$

$$u_{\phi} = u_{\phi}^o \quad (2.77)$$

У загальному випадку напруженого стану (див. пункт 2.4,4, формула (2.65)):

$$u_{\phi} = \frac{(1 + \mu)}{6E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2].$$

При лінійному напруженому стані (при простому розтяганні, коли $\sigma_1 = \sigma_+^o$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) маємо:

$$u_{\phi}^o = \frac{(1 + \mu)}{3E} \cdot (\sigma_+^o)^2 \quad (2.78)$$

Підставивши (2.65) і (2.78) у (2.77), отримаємо:

$$\frac{(1 + \mu)}{6E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] = \frac{(1 + \mu)}{3E} \cdot (\sigma_+^o)^2,$$

або після перетворень:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sigma_+^o.$$

Умова міцності за IV теорією:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma_+]. \quad (2.79)$$

Досліди добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів. Згідно з цією теорією текучість настає в цілому при більших навантаженнях конструкцій, ніж за третьою, що є позитивним чинником. Вважається, що перевищення несучої спроможності конструкцій від застосування четвертої теорії замість третьої може сягати 15,5 %.

Четверта теорія придатна тільки для пластичних матеріалів. Тому при користуванні нею в практичних розрахунках слід замінити в умові (2.79) загальну величину $[\sigma_+]$ на $[\sigma]$.

2.5.6 Теорія міцності Мора

З наведеного огляду першої – четвертої теорій міцності, які відносяться до класичних, видно, що ні одна з них не спроможна прогнозувати втрату міцності одночасно і крихких, і пластичних матеріалів.

Так, перша і друга теорії міцності задовільно прогнозують (з певними обмеженнями) умови руйнування крихких матеріалів, тоді як третя і четверта в цілому непогано визначають появу залишкових деформацій у пластичних матеріалів. Тому є потреба у створенні надійних універсальних теорій міцності, які б були придатними до широкого спектра матеріалів. Відомі роботи різних авторів у цьому напрямку. Однією з таких теорій, яку відносять до класичних, є теорія міцності, що запропонована Мором.

Ця теорія виходить з припущення, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить, головним чином, від комбінації величин і знаків найбільшого σ_1 і найменшого σ_3 головних напружень. Середнє ж за величиною головне напруження σ_2 слабо впливає на міцність матеріалу.

Детальне викладення теорії міцності Мора виходить за рамки даного курсу з причини громіздкості її обґрунтування.

Умова міцності за цією теорією має вигляд

$$\sigma_{екв}^M = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+] \quad (2.80)$$

Якщо $[\sigma_+] = [\sigma_-]$, що притаманно пластичним матеріалам, умова міцності (2.80) збігається з умовою (2.76) за третьою теорією. Тому теорію міцності Мора можна вважати такою, що поширює застосування третьої теорії на крихкі матеріали. У цьому її безперечна перевага. Основним недоліком теорії міцності Мора, який залишився від третьої теорії, є неврахування дії σ_2 , а також те, що вона обґрунтована лише для напружених станів, у яких $\sigma_1 \geq 0$, а $\sigma_3 \leq 0$. У зв'язку з цим ця теорія має обмежене застосування в практиці інженерних розрахунків.

2.6 Плоске згинання прямих стрижнів

2.6.1 Основні поняття і визначення

Під згинанням розуміють такий вид навантаження стрижня, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти.

Згинання буває плоским і просторовим (складним). При плоскому згинанні всі сили, що діють на стрижень, лежать в одній площині, яка проходить через одну з головних центральних осей перерізу u або v (див. пункт 2.3.5).

При просторовому згинанні сили, що діють на стрижень, лежать у різних площинах, які проходять через подовжню вісь стрижня (z). Складне згинання призводить до двох плоских згинань у площинах uz і vz . Надалі буде розглядатись лише плоске згинання, при якому площина дії всіх сил, прикладених до стрижня (так звана силова площина), буде позначатись uz і вважатись вертикальною (рис. 2.53). У цьому разі в поперечних перерізах стрижня діятимуть згинальні моменти M_x , а разом з ними (що не є обов'язковим) і поперечні сили Q_y , які для спрощення будуть позначатись просто M і Q .

У випадку, коли в перерізах стрижня діють обоє зазначених силових фактора, плоске згинання називають поперечним, а коли тільки один згинальний момент – чистим.

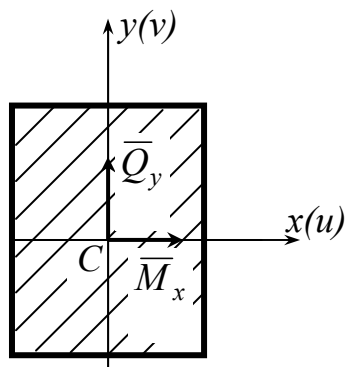


Рисунок 2.53

Стрижні, які працюють на згинання, зуться балками. Статично визначувані балки (тобто такі, у яких кількість опорних реакцій не перевищує кількості рівнянь статичної рівноваги) бувають двох видів – одноопорні (рис. 2.54, а) і двоопорні (рис. 2.54, б).

Ділянки балок, які виступають за опори, називають *консолями*, а ті, що лежать між опорами, – *прогонами*.



а)

б)

Рисунок 2.54

Оскільки одноопорна балка вся виступає за опору (див. рис. 2.54, а), вона зветься *консольною*, а її опора – *жорстким зацмленням* (або *затисненням*).

Двоопорні балки мають різні комбінації опор. Найчастіше одна з опор – шарнірна нерухома (див. ліву опору на рис. 2.54, б), друга – шарнірна рухома (див. праву опору на рис. 2.54, б). Така комбінація опор дозволяє зафіксувати положення балки на фундаменті, а разом з цим надати їй змоги спокійно реагувати на температурні подовження або скорочення і тим самим запобігти руйнуванням фундаменту і самої балки. Інші комбінації опор виконують такі самі функції. Аналогами шарнірної нерухомої опори є опори у вигляді двоопорних невагомих стрижнів (рис. 2.55, а, б), а шарнірної рухомої – у вигляді одного опорного стрижня (рис. 2.55, в, г).

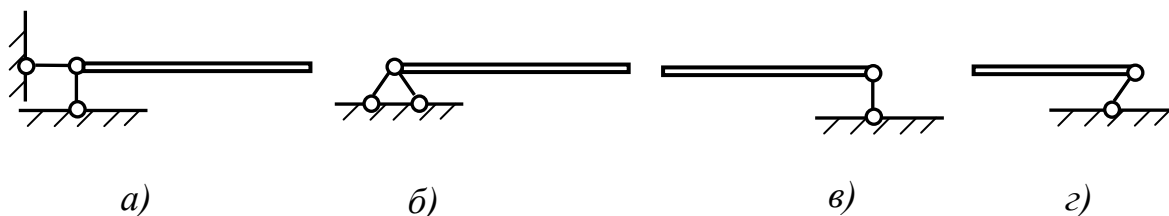


Рисунок 2.55

У загальному випадку на балку можуть діяти як поперечні, так і поздовжні навантаження. У цьому разі реакції шарнірної нерухомої опори і її аналогів будуть мати вертикальні й горизонтальні складові (рис. 2.56, а), а жорсткого защемлення – складатися із двох сил і реактивного моменту

(рис. 2.56, б). Реакції ж шарнірної рухомої опори і її аналогів завжди складаються із однієї сили (рис. 2.56, в, г, д).

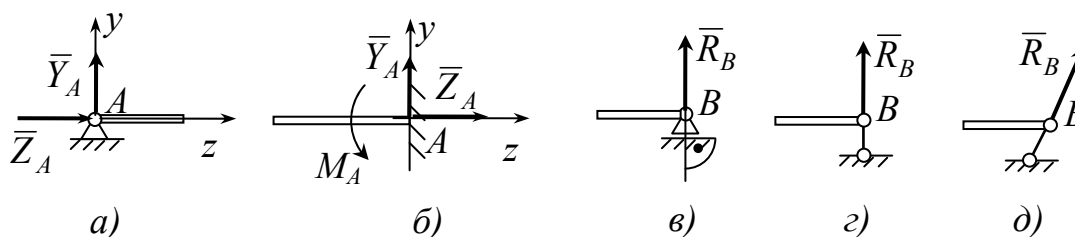


Рисунок 2.56

У випадках, коли поздовжні навантаження у балок відсутні й реакції шарнірних рухомих опор і їх аналогів вертикальні (див. рис. 2.56, в, г), горизонтальні складові реакцій шарнірних нерухомих опор, як і їх аналогів, також жорстких защемлень (див. рис. 2.56, а, б) дорівнюють нулю. Саме такі балки будуть розглядатись надалі. У всіх цих балок по дві невідомі реакції, для визначення яких треба скласти по два незалежних рівняння статичної рівноваги і розв'язати їх.

2.6.2 Побудова епюр внутрішніх зусиль балок

При розрахунках балок на міцність треба попередньо визначити їх небезпечні перерізи, тобто такі, в яких діють найбільші напруження.

У наступних розділах показано, що найбільш нормальні напруження діють у перерізі балки з максимальним згинальним моментом M_{\max} а найбільші дотичні – у перерізі з максимальною поперечною силою Q_{\max} . Для пошуку таких перерізів використовують епюри поперечних сил і згинальних моментів, які є графічними побудовами, що демонструють характер зміни величин Q і M за довжиною балки. Побудова цих епюр є необхідною також при визначенні деформацій балок і в деяких інших випадках. Таким чином, процедура побудови вказаних епюр потребує детального розгляду.

Правила побудови епюр Q і M , що наводяться далі, базуються на методі перерізів (див. пункт 2.1.3), правилах знаків означених величин і, так званих, диференціальних залежностях при згинанні.

Поперечна сила Q вважається додатною, коли вона намагається повернути обидві частини розсіченої балки за ходом годинникової стрілки (рис. 2.57, а). При повороті у протилежному напрямку вона вважається від'ємною (рис. 2.57, б).

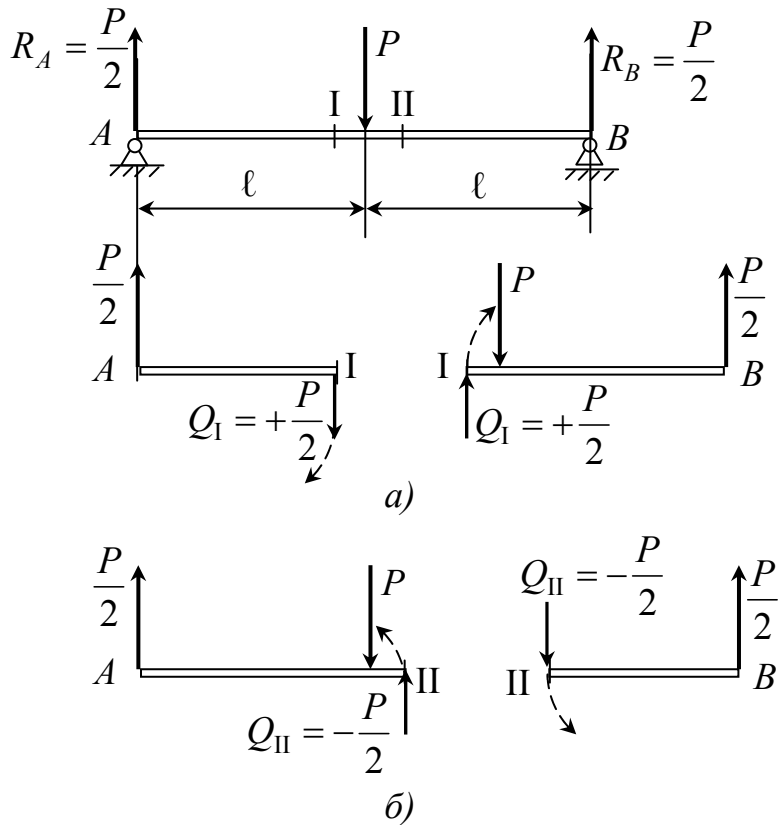
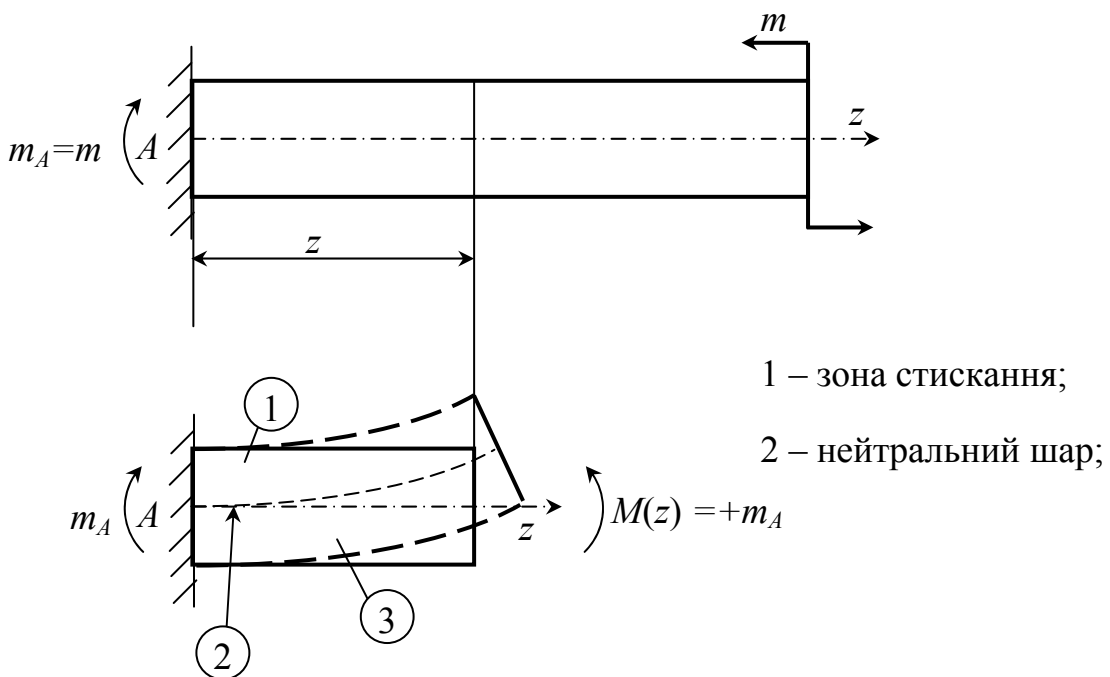


Рисунок 2.57

Знак згинального моменту M залежить від того, які волокна балки він стискає: верхні чи нижні. Якщо цей момент у тому чи іншому перерізі балки викликає стискання волокон у верхній половині перерізу, він вважається додатним. При стисканні ж волокон у нижній половині він вважається від'ємним. Слід зауважити, що границею зон стискання і розтягання є, так званий, нейтральний шар, у якому волокна балки не стиснуті і не розтягнені (рис. 2.58). Зазвичай на зону стискання вказує дугова стрілка згинального моменту в перерізі балки, а величина і напрямок цього моменту визначаються із умов рівноваги відсіченої частини балки.



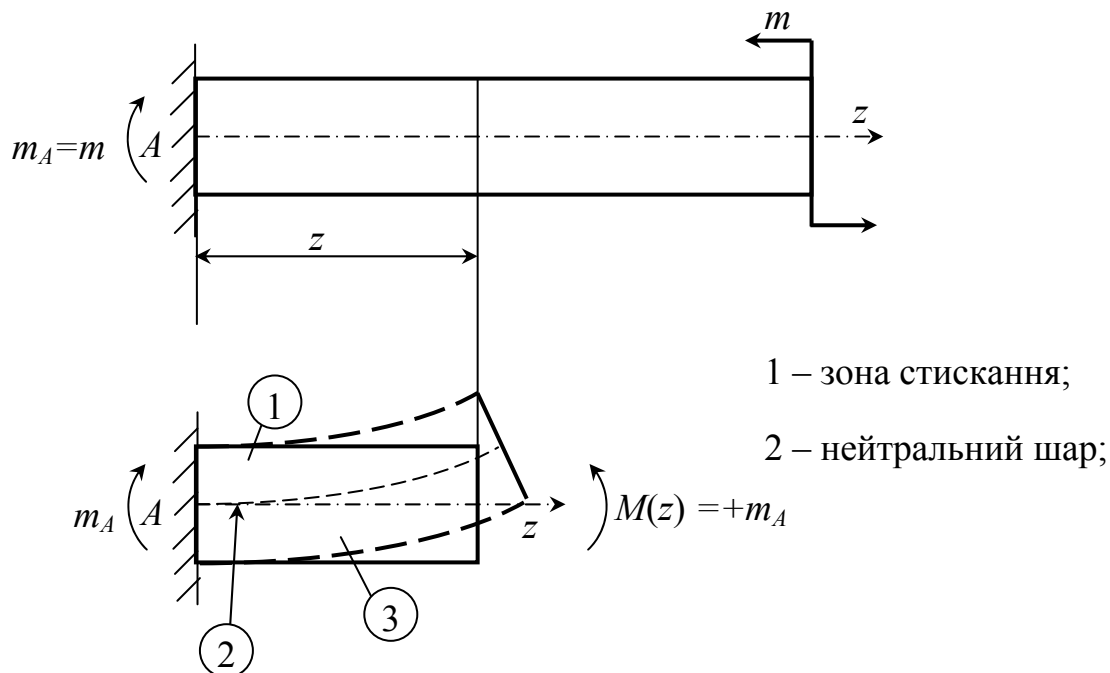


Рисунок 2.58

Епюри Q і M будуються у такій послідовності.

1. Визначаються так звані характерні перерізи балки, до яких відносять перерізи, які розташовані у безпосередній близькості до зосереджених сил і моментів, діючих на балку, також перерізи на початку і в кінці ділянок з розподіленим навантаженням. Указані перерізи нумерують.

2. У кожному з характерних перерізів визначається величина (зі знаком) поперечної сили згідно з таким правилом: поперечна сила у тому чи іншому перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на залишену частину балки, при чому сили, що намагаються повернути цю частину за ходом годинникової стрілки, беруться зі знаком плюс, а проти ходу – зі знаком мінус. Визначені величини Q_i відкладаються в певному масштабі у вигляді точок від бази (нульової лінії) цієї епюри.

3. Подібним чином визначаються і наносяться на заготовку своєї епюри величини згинальних моментів M_i . При цьому величина згинального моменту в кожному з характерних перерізів балки визначається як алгебраїчна сума моментів відносно центра перерізу від зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини балки, при чому моменти, що стискають верхні волокна балки, беруться зі знаком плюс, а нижні – зі знаком мінус.

4. Точки на обох епюрах з'єднуються між собою суцільними лініями, характер яких витікає із так званих диференціальних залежностей при згинанні, що встановлюють зв'язок між інтенсивністю розподіленого навантаження q , поперечною силою Q і згинальним моментом M . Щоб отримати ці залежності, розглянемо балку, на яку діє розподілене навантаження довільної інтенсивності $q = q(z)$ (рис. 2.59).

Прийнятий напрямок для q , співпадаючий з віссю y , вважатимемо додатним.

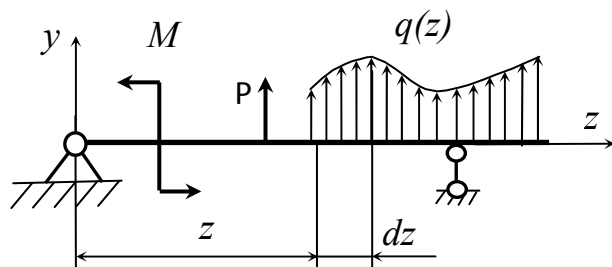


Рисунок 2.59

Виділимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів, малий відрізок O_1O_2 довжиною dz (рис. 2.60). Він знаходиться в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, а також поперечних сил і згинальних моментів, прикладених в перерізах O_1 і O_2 .

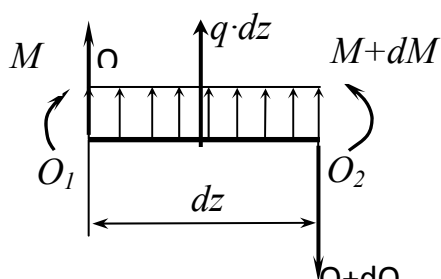


Рисунок 2.60

Оскільки в загальному випадку внутрішні зусилля міняються уздовж осі балки, то в перерізі O_1 візьмемо їх такими, що дорівнюють Q і M , а в перерізі O_2 декілька більшими: $Q+dQ$, $M+dM$. Внутрішні зусилля, як завжди, зобразимо в позитивному напрямку. У межах малого відрізка dz вважатимемо навантаження q розподіленим рівномірно.

Складемо рівняння рівноваги елемента dz :

$$\sum P_y = 0; \quad Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0; \quad (2.81)$$

$$\sum m_{O_2} = 0; \quad -Q \cdot dz - M - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + (M + dM) = 0 \quad (2.82)$$

З рівняння (2.81) одержимо:

$$q = \frac{dQ}{dz} \quad (2.83)$$

З рівняння (2.82), нехтуючи членом

$q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2}$ як малою величиною другого порядку , знайдемо:

$$Q = \frac{dM}{dz} \quad (2.84)$$

Підставивши (2.84) в (2.83), одержимо:

$$q = \frac{d^2M}{dz^2} \quad (2.85)$$

Таким чином, інтенсивність розподіленого навантаження q є першою похідною за довжиною балки від поперечної сили Q і другою похідною від згинального моменту M . Поперечна ж сила Q є першою похідною за довжиною балки від згинального моменту M .

Із співвідношень (2.83)...(2.85) можна зробити деякі загальні висновки про характер епюр Q і M .
1. Розглянемо випадок, коли $q=0$, тобто на цій ділянці балки відсутнє розподілене навантаження.

Тоді згідно з формулами (2.83) і (2.84) одержуємо $Q = const = C_1$, а $M = C_1 \cdot z + C_2$.

Отже, на ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q=0$), епюри Q є прямими, паралельними базовій лінії, а епюри M – прямими, тангенси кутів нахилу яких до осі Z дорівнюють Q (рис. 2.61).

Якщо на деякій ділянці $Q > 0$, тобто $tg \alpha > 0$, то епюра моментів M зростає при побудові її уздовж позитивного напрямку осі Z (див. рис. 2.61, а). Якщо ж $Q < 0$, тобто $tg \alpha < 0$, то епюра моментів M убиває (див. рис. 2.61, б).

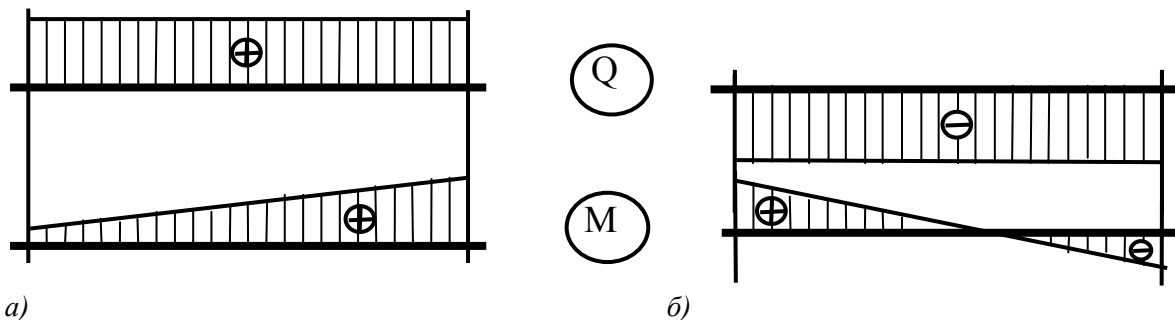


Рисунок 2.61

2. На ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження $q = const = C < 0$ (рис. 2.62, а), епюра поперечної сили Q згідно з формулою (2.83) є похилою прямою

$$Q = C \cdot z + C_1,$$

а епюра згинальних моментів – квадратичною параболою

$$M = C \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2$$

з опуклістю, спрямованою назустріч дії розподіленого навантаження q (так зване, правило «парасольки»).

Коли ж $q = const = C > 0$, вигляд обох епюр змінюється на протилежний (рис. 2.62, б).

3. У перерізах, де епюра Q перетинає базу, значення M – екстремальні, тобто є максимальними (див. рис. 2.62, а), або мінімальними (див. рис. 2.62, б).

При побудові епюр Q і M слід також звернути увагу на їх особливості в місцях прикладання до балки зосереджених сил і моментів.

1. У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили, на епюрі Q будуть стрибки на величину цих сил (рис. 2.63), причому в разі побудови цієї епюрі зліва направо напрямки стрибків такі самі, як і напрямки зосереджених сил. На епюрі M будуть злами, вістря яких спрямовані проти напрямку зосереджених сил (рис. 2.63).

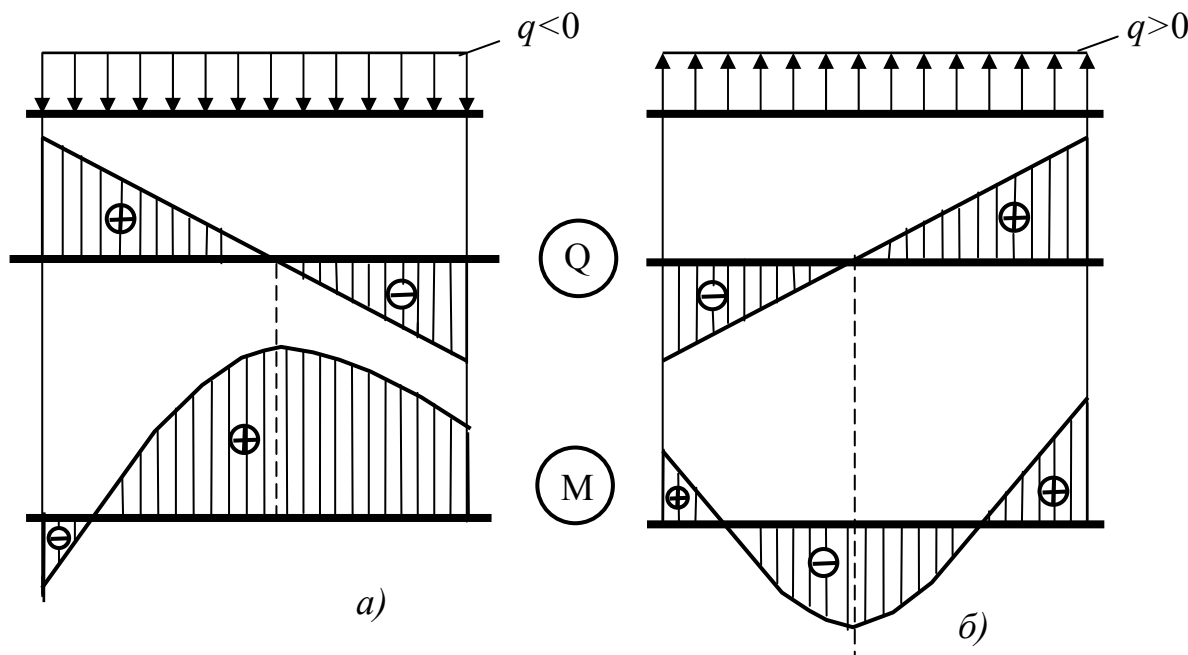


Рисунок 2.62

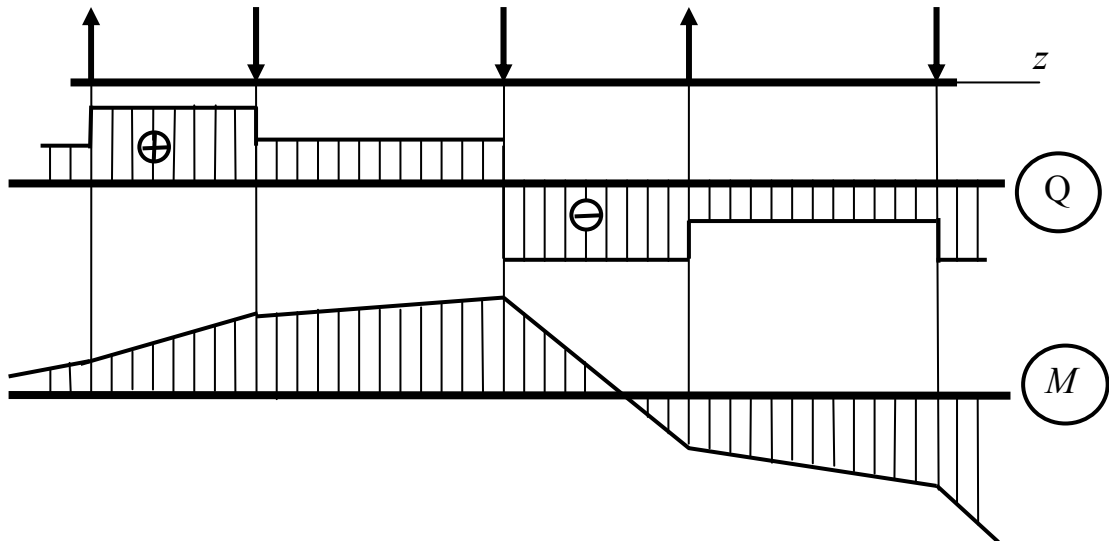


Рисунок 2.63

2. У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти (рис. 2.64), на епюрі M будуть стрибки на величину цих моментів відповідних напрямків, а на епюрі Q змін не буде. Якщо епюра M прямолінійна, її лінії до і після стрибка – паралельні, якщо в одному перерізі не прикладені одночасно і сила, і момент (сила викликає злам і порушує паралельність).

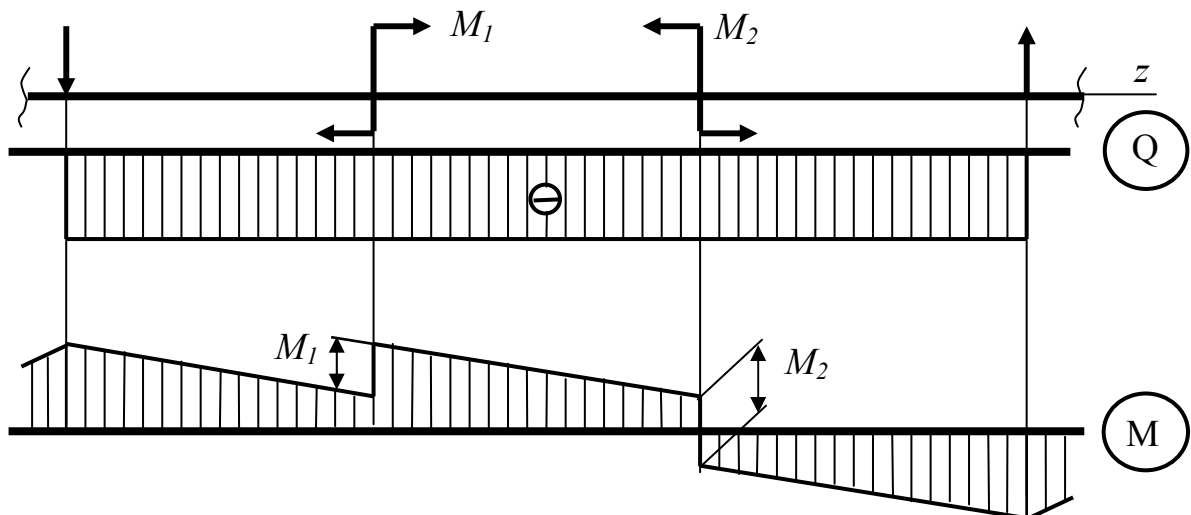


Рисунок 2.64

Перевірка правильності побудови епюри Q і M зводиться до побудови епюри в напрямку, протилежному первинному (наприклад, справа наліво). При цьому слід звернути увагу на напрямки стрибків і нахилів прямих на епюрах Q і M (див. рис. 2.61...2.64).

Розглянемо приклад побудови епюр Q і M для двоопорної балки, зображеної на рисунку 2.65 (приклад 2.10).

Розв'язання

1. Спочатку визначимо реакції опор. Оскільки всі виникаючі сили направлені вертикально, то горизонтальна реакція шарнірно-нерухомої опори буде дорівнювати нулю.

Для визначення R_A і R_B складемо рівняння рівноваги у вигляді суми моментів всіх сил щодо точок B і A :

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot 6 + P \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 4 + M = 0$$

Звідки

$$R_A = \frac{P \cdot 5 + q \cdot 2 \cdot 4 + M}{6} = \frac{30 \cdot 5 + 18 \cdot 2 \cdot 4 + 12}{6} = 51 \text{ кН.}$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_B \cdot 6 + M - q \cdot 2 \cdot 2 - P \cdot 1 = 0$$

Одержуємо:

$$R_B = \frac{-M + q \cdot 2 \cdot 2 + P \cdot 1}{6} = \frac{-12 + 18 \cdot 2 \cdot 2 + 30 \cdot 1}{6} = 15 \text{ кН.}$$

Здійснюємо перевірку знайдених реакцій:

$$\sum P_y = R_A - P - q \cdot 2 + R_B = 51 - 30 - 18 \cdot 2 + 15 = 0.$$

Таким чином, реакції R_A і R_B знайдені вірно.

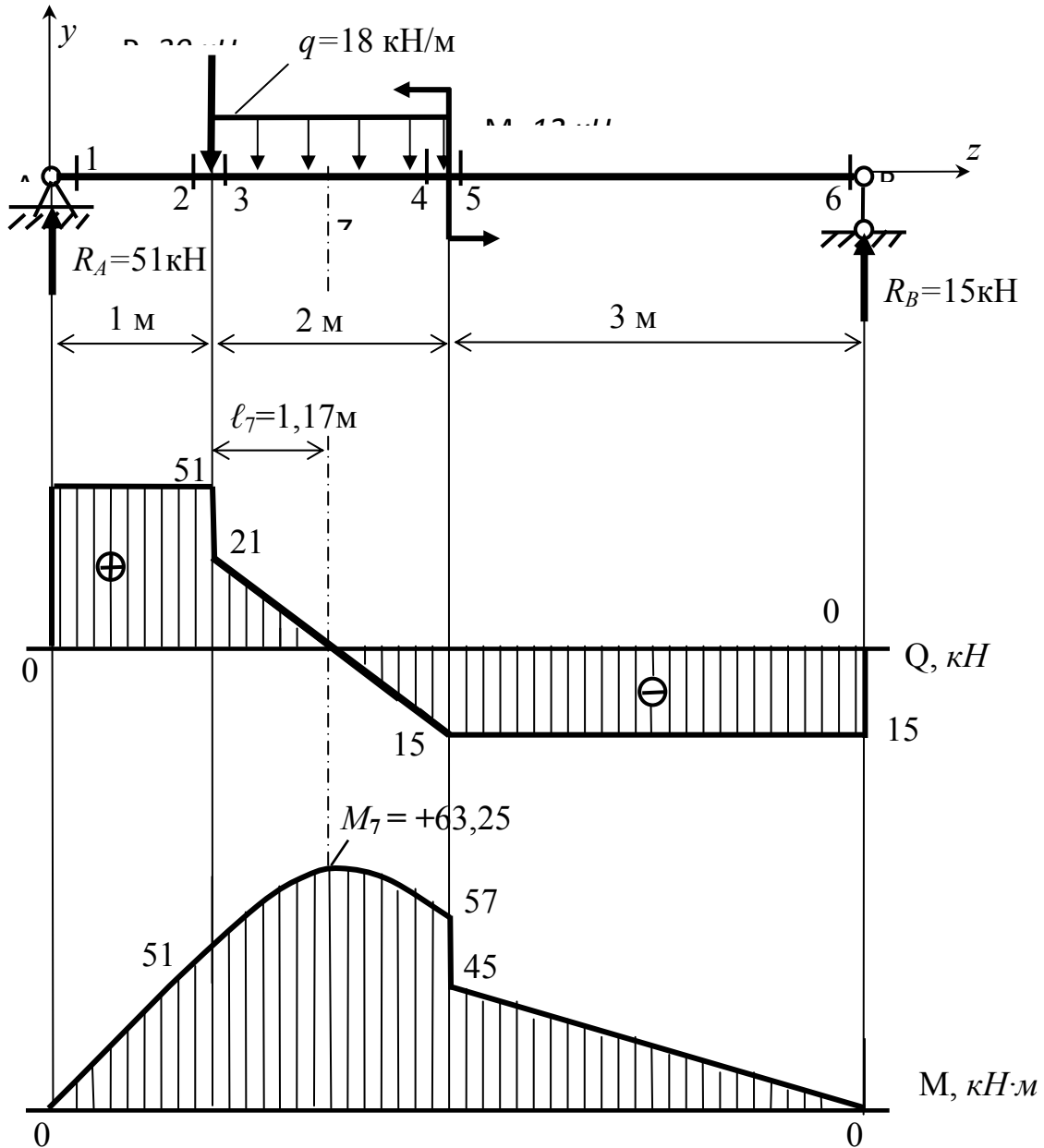


Рисунок 2.65

2. Позначаємо арабськими цифрами шість характерних перерізів (див. рис. 2.65).

3. Будуємо епюри Q і M у напрямку зліва направо.

Епюра Q : $Q_1 = +R_A = +51 \text{ кН}$; $Q_2 = Q_1 = +51 \text{ кН}$; $Q_3 = Q_2 - P = +51 - 30 = +21 \text{ кН}$; $Q_4 = Q_3 - q \cdot 2 = +21 - 36 = -15 \text{ кН}$; $Q_5 = Q_4 = -15 \text{ кН}$; $Q_6 = Q_5 = -15 \text{ кН}$.

У перерізі 7 епюра Q перетинає базу. Визначимо відстань цього перерізу від перерізу 3 за умови:

$$Q_7 = Q_3 - q \cdot l_7 = 0. \text{ Звідсіть: } l_7 = \frac{Q_3}{q} = \frac{21}{18} = 1,17 \text{ м.}$$

Епюра M : $M_1 = 0$; $M_2 = +R_A \cdot 1 = +51 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_3 = M_2 = +51 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_4 = +R_A \cdot 3 - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = +51 \cdot 3 - 30 \cdot 2 - 18 \cdot 2 \cdot 1 = +57 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_5 = M_4 - M = +57 - 12 = +45 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_6 = 0$.

У перерізі 7 епюра M має максимум:

$$M_7 = +R_A \cdot (1 + \ell_7) - P \cdot \ell_7 - q \cdot \ell_7 \cdot \frac{\ell_7}{2} = +51 \cdot 2,17 - 30 \cdot 1,17 - 18 \cdot 1,17 \cdot \frac{1,17}{2} = +63,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Виконуємо перевірку правильності побудови епюр. Цього разу будуємо обидві епюри у протилежному напрямку – справа наліво.

Епюра Q : $Q_6 = Q_5 = Q_4 = -R_B = -15 \text{ кН}$; $Q_3 = Q_4 + q \cdot 2 = -15 + 18 \cdot 2 = +21 \text{ кН}$; $Q_2 = Q_3 + P = +21 + 30 = +51 \text{ кН}$; $Q_1 = Q_2 = +51 \text{ кН}$.

Епюра M : $M_6 = 0$; $M_5 = +R_B \cdot 3 = +15 \cdot 3 = +45 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_4 = M_5 + M = +45 + 12 = +57 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_3 = M_2 = +R_B \cdot 5 + M - q \cdot 2 \cdot 1 = +15 \cdot 5 + 12 - 18 \cdot 2 \cdot 1 = +51 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_1 =$

$$M_7 = +R_B \cdot [3 + (2 - \ell_7)] + M - q \cdot (2 - \ell_7) \cdot \frac{(2 - \ell_7)}{2} = 0;$$

$$= +15 \cdot 3,83 + 12 - 18 \cdot 0,83 \cdot 0,415 = 63,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Як бачимо, епюри побудовані вірно.

Наведемо ще один приклад побудови епюр (**приклад 2.11**), цього разу для консольної балки, зображеної на рисунку 2.66.

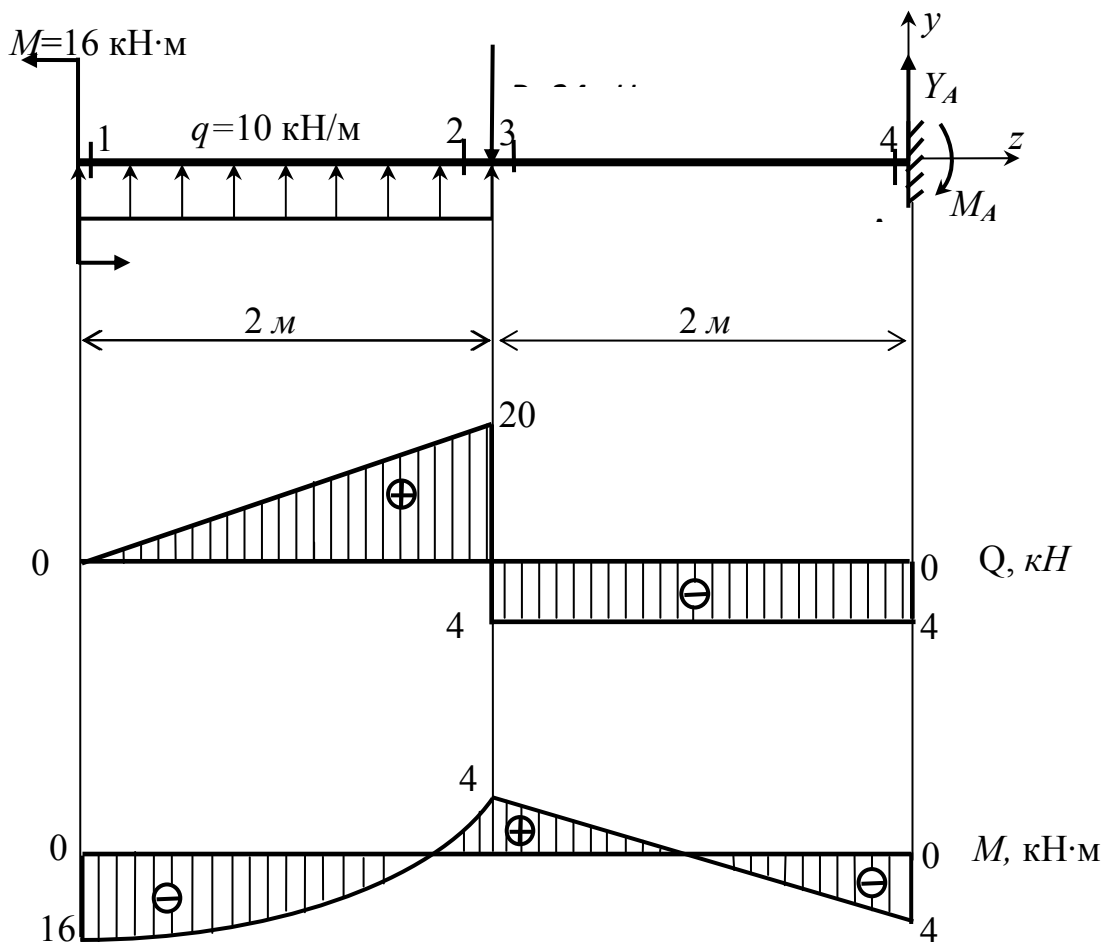


Рисунок 2.66

Розв'язання

Цього разу, як і в попередньому прикладі, є можливість будувати епюри в обох напрямках. Але напрямок руху від вільного кінця балки до жорсткого защемлення, тобто зліва направо, тут є більш привабливим, бо не потребує визначення опорних реакцій. Тому будемо рухатись саме у цьому напрямку.

1. Позначаємо характерні перерізи балки: 1...4.

2. Будуємо епюру поперечних сил:

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = +q \cdot 2 = +20 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_2 - P = +20 - 24 = -4 \text{ кН};$$

$$Q_4 = Q_3 = -4 \text{ кН}.$$

3. Будуємо епюру згинальних моментів:

$$M_1 = -M = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = -M + q \cdot 2 \cdot 1 = -16 + 20 = +4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = M_2 = +4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_4 = -M + q \cdot 2 \cdot 3 - P \cdot 2 = -16 + 60 - 48 = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Звернемо увагу, що на ділянці дії розподіленого навантаження екстремуму M нема, бо епюра Q тут базу не перетинає. Мінімальне значення згинального моменту на цій ділянці (16 кН·м) – в першому перерізі, де $Q=0$.

4. Для перевірки правильності епюр визначимо опорні реакції балки (Y_A і M_A) та побудуємо епюру у зворотному напрямку:

$$\sum P_y = q \cdot 2 - P + Y_A = 0;$$

$$Y_A = -q \cdot 2 + P = -20 + 24 = +4 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = +M - q \cdot 2 \cdot 3 + P \cdot 2 - M_A = 0;$$

$$M_A = +M - q \cdot 2 \cdot 3 + P \cdot 2 = +16 - 60 + 48 = +4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знаки плюс у знайдених величин Y_A і M_A підтверджують напрямки цих величин, зображених на рисунку 2.66.

$Q_4 = -Y_A = -4$ кН (бо вона намагається повернути залишену частину балки, що лежить правіше перерізу 4, проти ходу годинникової стрілки);

$$Q_3 = Q_4 = -4 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_3 + P = -4 + 24 = +20 \text{ кН}; \quad Q_1 = Q_2 - q \cdot 2 = +20 - 10 \cdot 2 = 0.$$

$M_4 = -M_A = -4$ кН·м (бо він, маючи протилежний напрямок до M_A , спричиняє стиск волокон у нижній половині залишеної частини балки);

$$M_3 = M_4 + Y_A \cdot 2 = -4 + 4 \cdot 2 = +4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = M_3 = +4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_1 = M_2 + q \cdot 2 \cdot 1 = +4 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = +24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Оскільки отримані при перевірці значення Q і M повністю ідентичні тим, що були визначені раніше, обидві епюри побудовані правильно.

2.6.3 Визначення нормальних напружень у балках

Розглянемо випадок чистого згинання, при якому в усій балці (рис. 2.67, а), або на її частині (рис. 2.67, б) діє тільки згинальний момент постійної величини ($M = const$), а поперечна сила відсутня ($Q = 0$). У цьому разі в точках балки виникають тільки нормальні напруження σ , пов'язані зі згинальним моментом M .

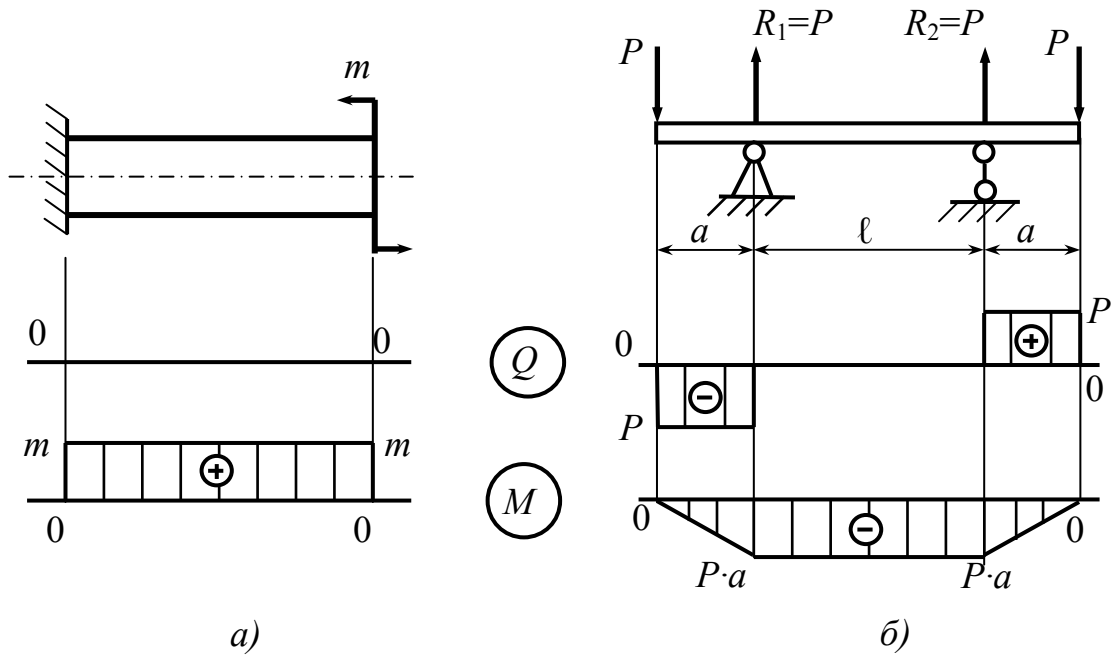


Рисунок 2.67

Перед встановленням зв'язку між величинами σ і M введемо деякі нові поняття.

Сукупність волокон, що не міняють своєї довжини при згинанні балки, називається *нейтральним шаром*. Волокна, що належать нейтральному шару, до деформації лежать в одній площині, а в деформованому стані утворюють деяку неплоску поверхню. Кожен поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром за прямою, яка називається *нейтральною лінією перерізу (н. л.)*. Площина дії зовнішнього навантаження зветься *силовою площиною*, а лінія її перетину з поперечним перерізом балки – *силовою лінією (с.л.)*. Нейтральна і силова лінії перпендикулярні одна до одної.

На рисунку 2.68 зображений відокремлений елемент балки довільної довжини, до якого не прикладені зовнішні сили, з усіма необхідними позначеннями. Силова лінія на ньому (вісь y) є віссю симетрії перерізу. Положення ж нейтральної лінії (осі x) за висотою перерізу поки що невідоме і потребує свого визначення.

Виділимо навколо довільної точки перерізу з координатами x і y (див. рис. 2.68) елементарну площадку dF і позначимо діючу на неї силу: $dN = \sigma dF$.

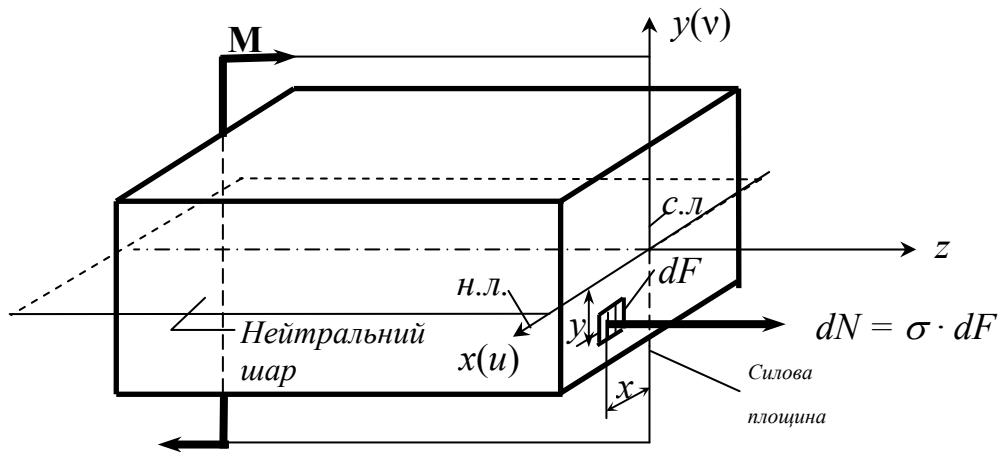


Рисунок 2.68

Зазначений елемент балки знаходиться в рівновазі під дією двох рівних і протилежно направлених згинальних моментів M , прикладених до його торцевих поверхонь, тому що $M = const$. Один з цих моментів зображено на рисунку 2.68, другий (не показаний) створюють розподілені сили dN .

Запишемо рівняння рівноваги вказаного елемента:

$$\sum m_x = -M + \int_F y \cdot dF = 0; \quad (2.86)$$

$$\sum m_y = \int_F x \cdot \sigma \cdot dF = 0; \quad (2.144)$$

$$\sum P_z = \int_F \sigma \cdot dF = 0. \quad (2.87)$$

Розглянемо тепер, виходячи з гіпотези плоских перерізів, деформацію елемента балки, обмежену двома суміжними поперечними перерізами $m-m$ і $n-n$, які розташовані один від одного на відстані dz (рис. 2.69, а).

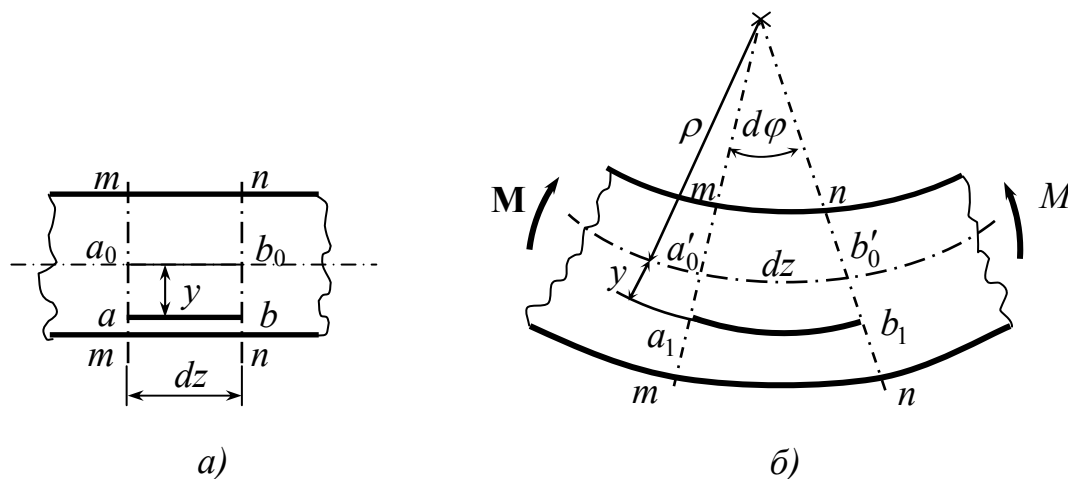


Рисунок 2.69

На рисунку 2.69, б видно, що перерізи $m-m$ і $n-n$ у деформованому елементі залишаються плоскими і повертаються на кут $d\varphi$. Прямолінійний елемент a_0b_0 нейтрального шару перетворюється на дугу кола такої самої довжини з радіусом ρ , а волокно a_1b_1 , що знаходиться на відстані y від нейтрального шару, – на дугу кола з радіусом кривизни $(\rho + y)$. Відносне подовження цього волокна дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}.$$

Підставляємо у формулу для ε вирази довжин $a_1b_1 = (\rho + y) \cdot d\varphi$; $ab = \rho \cdot d\varphi$, отримуємо:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Кожне волокно балки отримує деформацію розтягування або стиснення. Отже, за законом Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho}. \quad (2.88)$$

Підставимо вираз (2.88) у рівняння (2.87), отримаємо:

$$\int_F \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot dF, \quad \text{або} \quad \frac{E}{\rho} \cdot \int_F y \cdot dF = 0.$$

$$\int_F y \cdot dF = 0.$$

Звідки

Цей інтеграл є статичним моментом перерізу відносно осі x . Оскільки він дорівнює нулю, *вісь x (нейтральна лінія) проходить через центр ваги перерізу і є центральною*. Також є центральною і вісь y як вісь симетрії перерізу (див. рис. 2.68).

Підставимо вираз (2.88) у рівняння (2.95), отримаємо:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0, \quad \text{або}$$

$$\int_F x \cdot y \cdot dF = J_{xy} = 0,$$

тобто осі x і y одночасно є головними і центральними (u і v).

Таким чином, якщо силова площина співпадає з однією з головних центральних осей перерізу, то згинання буде плоским, і нейтральний шар перерізу співпадає з іншою головною центральною віссю.

Підставимо вираз (2.88) у рівняння (2.86), отримаємо:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_F y^2 \cdot dF = M.$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x}, \quad (2.89)$$

Звідки:

$$J_x = \int_F y^2 \cdot dF$$

де J_x – момент інерції перерізу щодо нейтральної лінії.

Формула (2.89) у наведеному розрахунку була допоміжною, проте вона має і велике самостійне значення. Її можна трактувати як *закон Гука при згинанні*, оскільки вона пов'язує деформацію (кривизну нейтрального шару $1/\rho$) з діючим у перерізі згинаючим моментом. Добуток $E \cdot J_x$ носить назву *жорсткості перерізу при згинанні*, ($\text{Н} \cdot \text{м}^2$). З формули (2.89) видно, що якщо балка виготовлена з однорідного матеріалу ($E = \text{const}$) і має постійний переріз ($J_x = \text{const}$), то при чистому згинанні ($M = \text{const}$) вісь балки стає дугою кола ($1/\rho = \text{const}$, і, значить $\rho = \text{const}$).

Підставимо вираз (2.89) у рівняння (2.88) і одержимо формулу для визначення величини нормальних напружень в довільній точці перерізу:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}. \quad (2.90)$$

Вираз (2.90) показує, що *нормальні напруження при згинанні міняються за висотою перерізу за лінійним законом*. При цьому вони постійні за шириною перерізу. Окрім цього, з формули (2.90) виходить, що напруження в точках нейтральної лінії дорівнюють нулю. Отже, епюра для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, завжди матиме вигляд, показаний на рисунку 2.70.

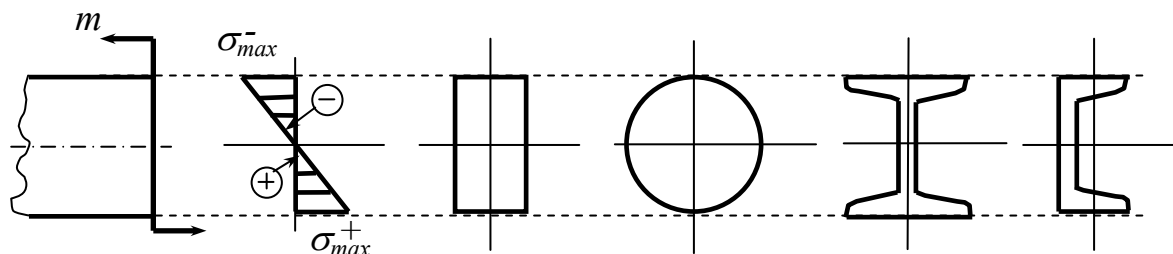


Рисунок 2.70

У наведених перерізах максимальні за модулем нормальні напруження у зонах розтягання (+) і стискування (-) однакові:

$$\sigma_{\max}^+ = \left| \sigma_{\max}^- \right| = \sigma_{\max} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{\max} \quad (2.91)$$

де величини M і y_{\max} беруть без урахування знаків.

У випадках, коли вісь x не є віссю симетрії, наприклад, в разі таврового перерізу (рис. 2.71), максимальні напруження в зонах розтягання і стискування різні. Тоді за σ_{\max} приймають більше за

модулем з означених напружень – σ_{\max}^+ або $\left| \sigma_{\max}^- \right|$, а за y_{\max} – відстань від осі x до шару волокон з $\sigma = \sigma_{\max}$.

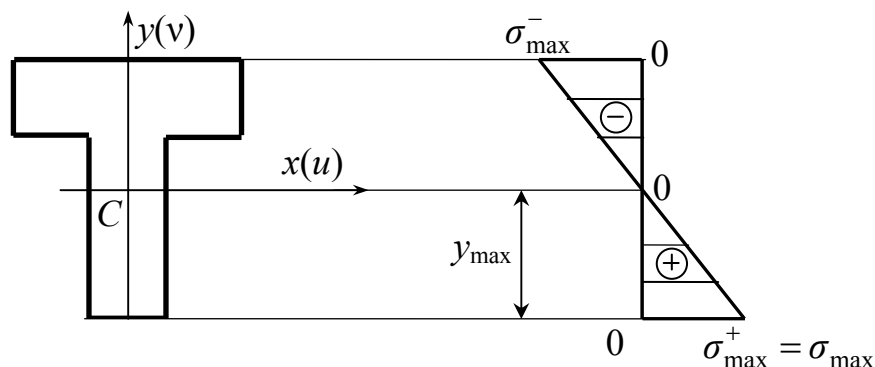


Рисунок 2.71

Вираз (2.91) для σ_{\max} зазвичай перетворюють таким чином:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_x} \quad (2.92)$$

де W_x – осьовий момент опору,

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \quad (2.93)$$

Найбільш економічними є такі форми поперечних перерізів балок, у яких з найменшою витратою матеріалу є найбільшою величина осьового моменту опору W_x . Очевидно, що для раціонально працюючої балки необхідно, по можливості, розмістити масивні частини поперечних перерізів подалі від нейтральної осі. Так виникли двотаври, швелери й інші тонкостінні профілі. При згинанні у вертикальній площині (відносно осі x) такі профілі дають істотний вигравш у вазі в порівнянні з ранніми формами поперечного перерізу – колом і прямокутником.

Моменти опору стандартних профілів прокату наведені в таблицях сортаменту (див. додаток А). Для простих фігур (прямокутник, коло, кільце) формули для визначення осевих моментів опору наводяться далі.

Прямокутник (рис. 2.72) :

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{1}{6} b \cdot h^2$$

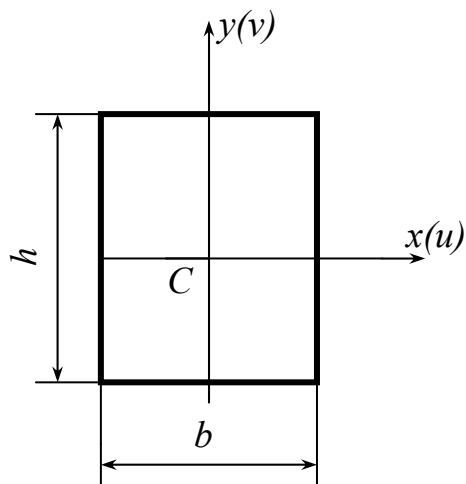


Рисунок 2.72

Коло (рис. 2.73) :

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad (2.94)$$

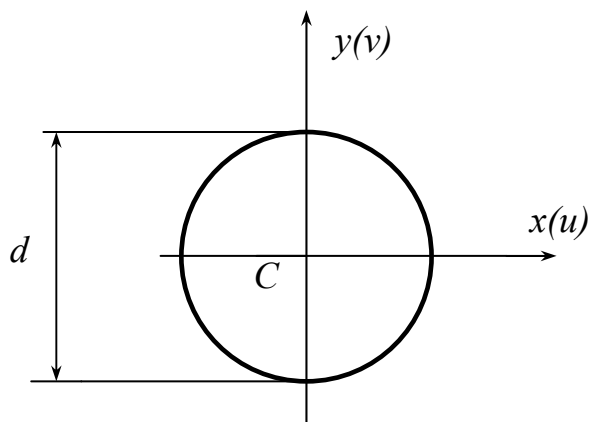


Рисунок 2.73

Кільце (рис. 2.74) :

$$W_x = \frac{\pi \cdot (d^4 - d_0^4)}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \cdot (1 - c^4), \quad (2.95)$$

де

$$c = d_0 / d \quad (2.96)$$

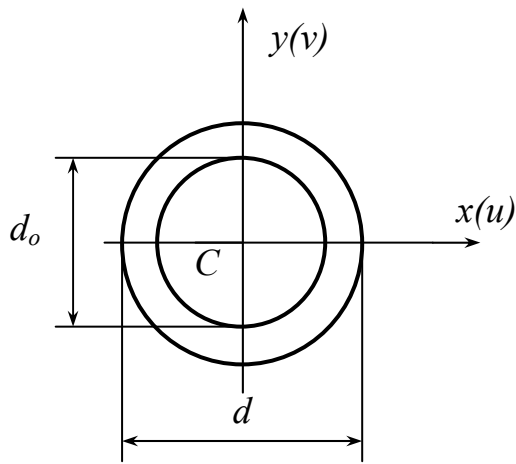


Рисунок 2.74

Із формул (2.92) і (2.93) витікають умови міцності балок при чистому згинанні. У разі, коли балка виготовлена з пластичного матеріалу (наприклад, із маловуглецевої сталі), умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.97)$$

де σ_{\max} – максимальне за модулем нормальне напруження в балці,

M_{\max} – максимальний за модулем згинальний момент у балці.

$[\sigma]$ – допустиме напруження для матеріалу балки на розтягання і стискання (див. пункт 2.2.3).

Переважає кількість балок у техніці виготовляється із пластичних матеріалів, бо крихкі матеріали (наприклад, чавуни) для виготовлення балок вкрай небажані: вони погано опираються розтягання, яке при згинанні є неминучим.

Коли балку все ж виготовляють із крихкого матеріалу, і до того ж вона має несиметричний профіль, умови міцності для розтягувальних і стискаючих напружень різні:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max}^+}{J_x} \cdot y_{\max}^+ \leq [\sigma_+], \\ |\sigma_{\max}^-| = \frac{M_{\max}^-}{J_x} \cdot y_{\max}^- \leq [\sigma_-], \end{cases} \quad (2.98)$$

де M_{\max}^+ – максимальний за модулем згинальний момент, що розтягує волокна балки;

M_{\max}^- – максимальний за модулем згинальний момент, що стискає волокна балки;

y_{\max}^+ – відстань від нейтральної лінії до шару волокон з максимальним розтягуючим напруженням у перерізі дії M_{\max}^+ ;

y_{\max}^- – відстань від нейтральної лінії до шару волокон з максимальним стискаючим напруженням у перерізі дії M_{\max}^- ;

$[\sigma_+]$ і $[\sigma_-]$ – допустимі напруження для матеріалу балки відповідно при розтяганні і стисканні (див. пункт 2.2.3).

Коли ж профіль балки із крихкого матеріалу симетричний, $y_{\max}^+ = y_{\max}^- = y_{\max}$ і умови міцності набувають вигляду

$$\begin{cases} \sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max}^+}{W_x} \leq [\sigma_+], \\ |\sigma_{\max}^-| = \frac{M_{\max}^-}{W_x} \leq [\sigma_-]. \end{cases} \quad (2.99)$$

Значення M_{\max}^+ і M_{\max}^- беруться (без урахування знаків) з епюр згинальних моментів.

2.6.4 Визначення дотичних напружень

При чистому згинанні в поперечних перерізах стрижнів виникають лише згинальні моменти M , які викликають нормальні напруження σ . У разі поперечного згинання в перерізах стрижнів виникають не тільки згинальні моменти, але і поперечні сили Q , котрі є причиною появи дотичних напружень τ (рис. 2.75).

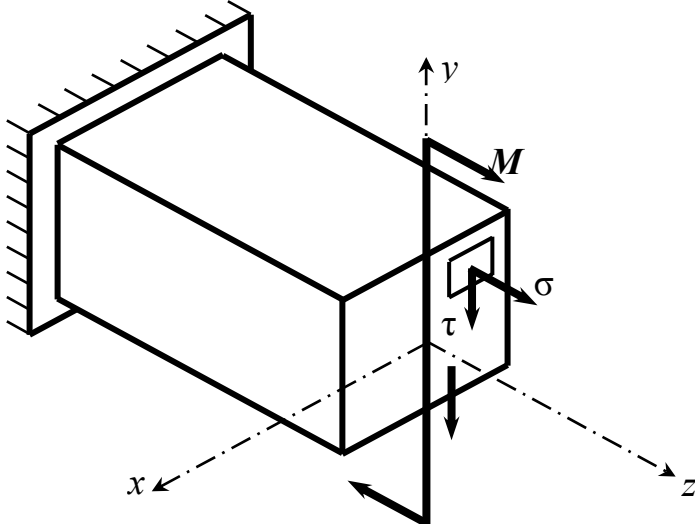


Рисунок 2.75

При чистому згинанні напружений стан стрижня – лінійний, а при поперечному – плоский. Зрозуміло, що поява дотичних напружень впливає на величини нормальних напружень і для визначення останніх потрібні дещо інші формули, аніж ті, які були отримані для чистого згинання. Однак, як свідчить практика силового розрахунку балок, застосування отриманих формул (див. пункт 2.6.3) і в разі поперечного згинання є припустимим, оскільки величини τ зазвичай в рази менші, ніж величини σ , і тому суттєво не впливають на показники міцності й жорсткості.

Цей факт, як основне припущення, було покладено в основу формули для визначення дотичних напружень при плоскому згинанні, запропонованої **Д. І. Журавським** (1821–1891) і якою до теперішнього часу користуються в інженерних розрахунках.

Друге припущення, на якому базується формула Журавського, – про незмінність τ за шириною перерізу балки – також має емпіричне походження. У дійсності на одному й тому самому горизонтальному рівні дотичні напруження збільшуються в напрямку від периферії до центра перерізу, але це збільшення, як правило, невелике і їм нехтують. Так, в разі прямокутного перерізу при відношенні його висоти до ширини ≥ 1 відхил значень τ від їх середніх значень складає лише декілька відсотків.

Процедуру виводу формули Журавського розглянемо на прикладі двоопорної балки (рис. 2.76).

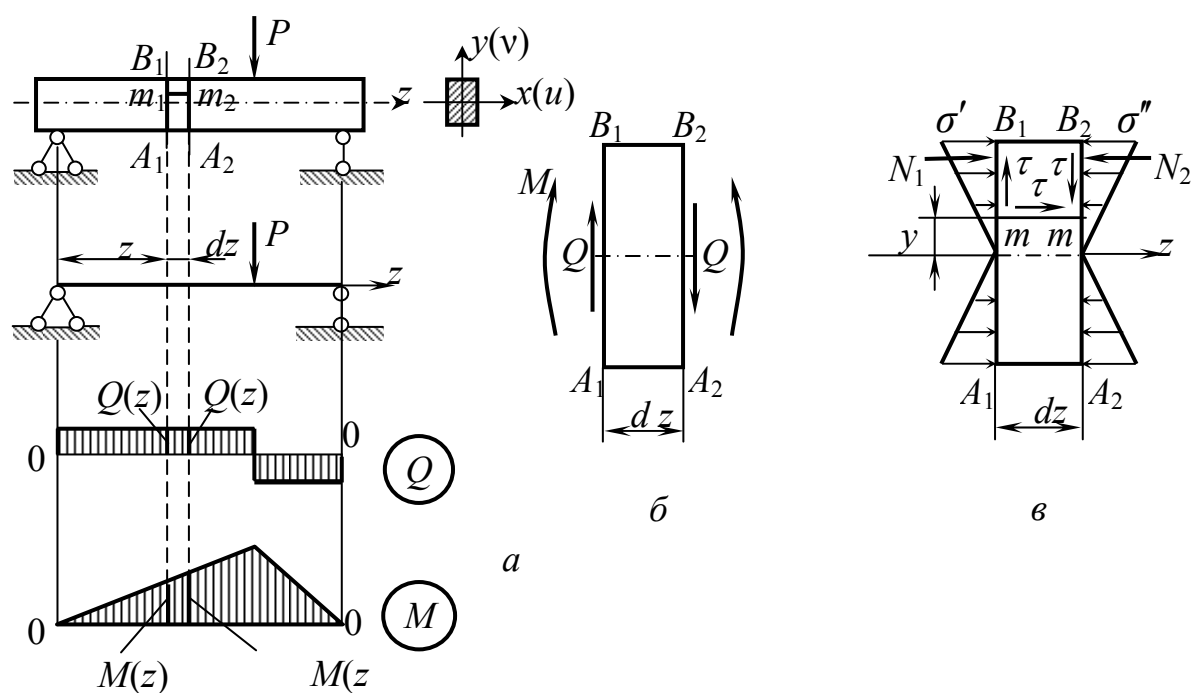


Рисунок 2.76

Двома близькими поперечними перерізами A_1B_1 і A_2B_2 виділимо елемент балки довжиною dz (рис. 2.76, а). Як видно з наведених епюр Q і M , поперечні сили в обох цих перерізах однакові, а згинальні моменти різні: в перерізі A_2B_2 згинальний момент більше, ніж у перерізі A_1B_1 , на величину dM . Напрямки дії поперечних сил і згинальних моментів у перерізах A_1B_1 і A_2B_2 показані на рисунку 2.76, б.

Подовжнім горизонтальним перерізом, проведеним на відстані y від нейтрального шару (див. рис. 2.76, в), поділимо елемент на дві частини і розглянемо умови рівноваги верхньої частини (рис. 2.77).

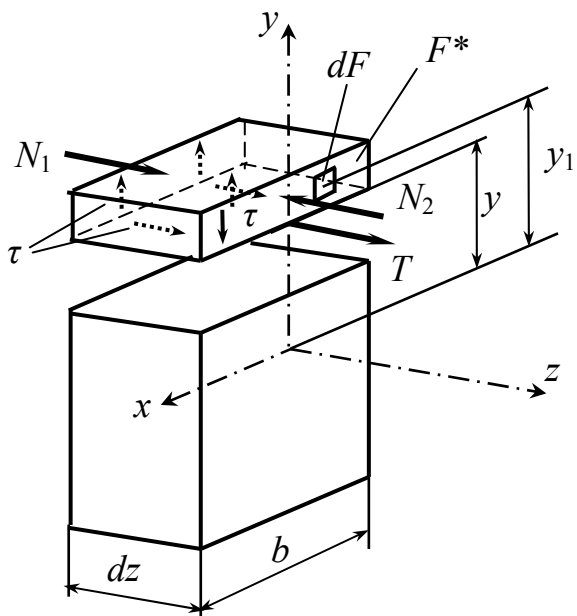


Рисунок 2.77

Рівнодіюча нормальних сил, що діють на ліву грань виділеного паралелепіпеда, дорівнює

$$N_1 = \int_{F^*} \sigma \cdot dF, \quad (2.100)$$

де F^* – площа частини поперечного перерізу від рівня y до верхніх волокон балки.

Підставимо у формулу (2.100) відповідний вираз для σ :

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y_1,$$

де y_1 – поточна ордината площадки dF (див. рис. 2.77);

J_x – момент інерції всього перерізу відносно осі x .

Зважаючи, що величини M і J_x у цьому разі є постійними, одержимо:

$$N_1 = \frac{M}{J_x} \cdot \int_{F^*} y_1 \cdot dF \quad (2.101)$$

Інтеграл у виразі (2.101) – статичний момент відносно осі x площі F^* , яка лежить вище за рівень y і яку зазвичай називають відсіченою частиною перерізу. Позначимо цей вираз через S_x^* :

$$S_x^* = \int_{F^*} y_1 \cdot dF. \quad (2.102)$$

З урахуванням (2.102) формула (2.101) набуває вигляду

$$N_1 = \frac{M \cdot S_x^*}{J_x}.$$

Аналогічно знайдемо рівнодійну нормальних сил, що діють на праву грань виділеного паралелепіпеда:

$$N_2 = \frac{(M + dM)}{J_x} \cdot \int_{F^*} y_1 \cdot dF = \frac{(M + dM) \cdot S_x^*}{J_x}.$$

Різниця між цими силами:

$$N_2 - N_1 = \frac{dM \cdot S_x^*}{J_x}. \quad (2.103)$$

Вона повинна врівноважуватися дотичними силами на нижній грані паралелепіпеда (див. рис. 2.77). Вважаючи, що дотичні напруження розподілені за шириною перерізу рівномірно, маємо такий вираз для рівнодійної дотичних зусиль:

$$T = \tau \cdot b \cdot dz. \quad (2.104)$$

Проектуючи на вісь z усі сили, що діють на паралелепіпед, одержимо:

$$\sum P_z = N_1 + T - N_2 = 0 \quad (2.105)$$

Підставивши в умову рівноваги (2.105) формули (2.103) і (2.104), знаходимо:

$$N_2 - N_1 = T,$$

$$\frac{dM \cdot S_x^*}{J_x} = \tau \cdot b \cdot dz,$$

або

звідки дотичні напруження:

$$\tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^*}{b \cdot J_x}. \quad (2.106)$$

Враховуючи, що згідно з залежністю (2.84)

$$\frac{dM}{dz} = Q,$$

остаточно знаходимо із (2.106):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{b \cdot J_x}. \quad (2.107)$$

Вираз (2.107) і є **формулою Журавського**, яка дозволяє визначити величину дотичних напружень, що виникають не тільки в поперечних, але і в подовжніх перерізах балки, бо перші і другі однакові як парні.

Залежність τ від y визначається через статичний момент S_x^* . У крайніх за висотою перерізу шарах волокон $S_x^* = 0$, тому $\tau = 0$. При наближенні до нейтрального шару величина S_x^* зростає, а разом з нею зростають і величини τ .

Встановимо закони зміни дотичних напружень за висотою найбільш поширених перерізів балок.

Почнемо з прямокутника (рис. 2.78).

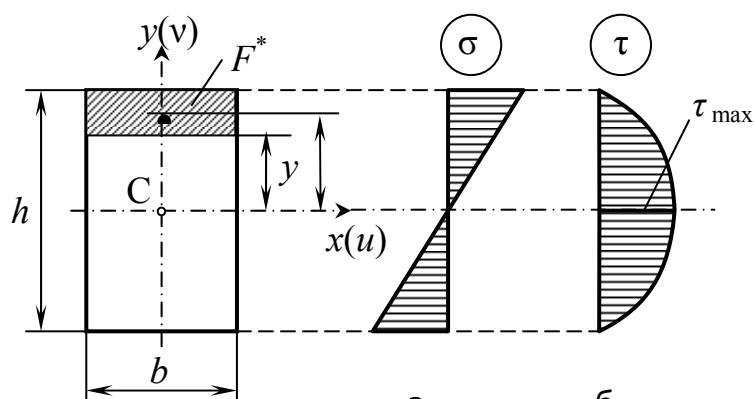


Рисунок 2.78

Статичний момент відсіченої площі:

$$S_x^* = F^* \cdot y_c^*$$

$$F^* = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

де F^* – площа відсіченої частини:

y_c^* – координата центра ваги відсіченої площі,

$$y_c^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

Тоді

$$S_x^* = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right).$$

$$S_x^* = S_{\max} = \frac{b \cdot h^2}{8}.$$

При $y = 0$ одержуємо:

Момент інерції прямокутника (див. формулу (2.23)):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Отже, дотичні напруження на рівні y становлять:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{b \cdot J_x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right), \quad (2.108)$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F},$$

а при $y = 0$:

де F – площа всього прямокутника.

$$(2.109)$$

Для круглого перерізу (рис. 2.79) формули для τ і τ_{\max} , які одержані подібним чином, мають вигляд

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right), \quad (2.110)$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (2.111)$$

а при $y=0$:

Як видно з формул (2.108) і (2.110), залежності τ від y в обох випадках – квадратичні, тобто мають вигляд парабол другого ступеня (див. рис. 2.78, б і 2.79, б), тоді як залежності σ від y є прямолінійними (див. рис. 2.78, а і 2.79, а).

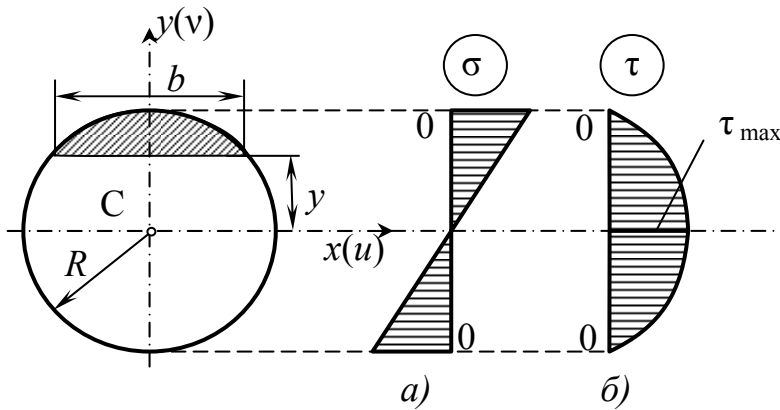


Рисунок 2.79

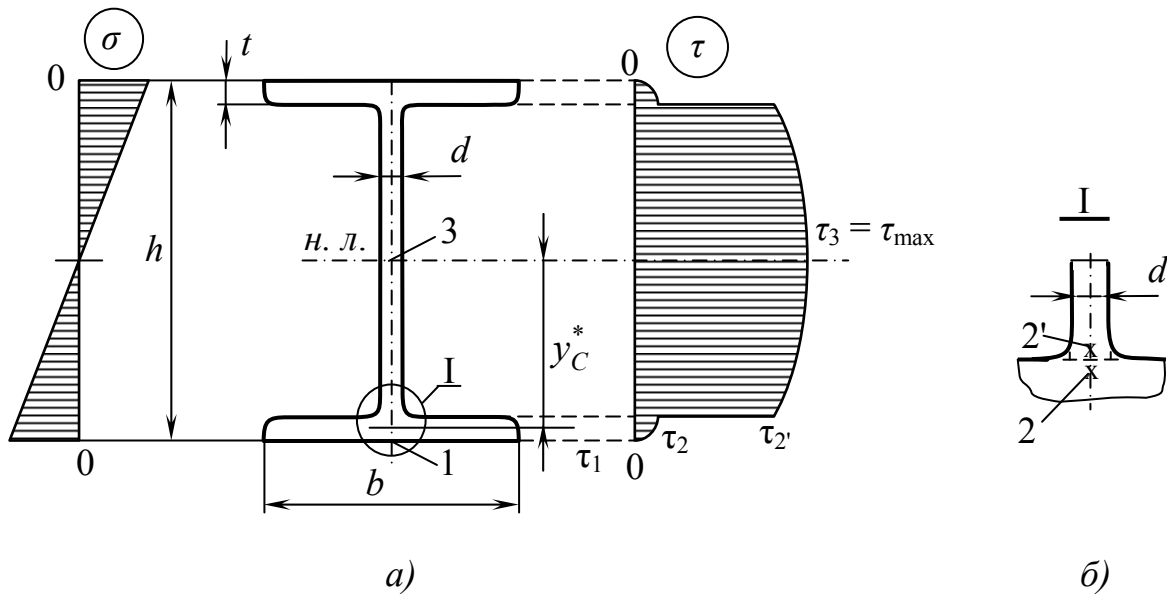


Рисунок 2.80

Розглянемо тепер двотавровий переріз, який спрощено можна вважати складеним з трьох прямокутників – двох полиць і стінки (рис. 2.80).

Щоб будувати епюру τ , необхідно визначити дотичні напруження в точках 1, 2, 2', 3 (див. рис. 2.80).

Точка 1 знаходиться на зовнішній поверхні полиці двотавра (див. рис. 2.80, а); для неї:

$$\tau_1 = 0, \text{ оскільки } S_x^* = 0.$$

Точка 2 розташована трохи нижче за лінію переходу від полиці до стінки (див. рис. 2,80, б), тому

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot S_{x(2)}^*}{b \cdot J_x} = \frac{Q \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right]}{b \cdot J_x}.$$

Точка 2' розташована трохи вище за цю лінію (див. рис. 2.80, б); для неї:

$$\tau_{2'} = \frac{Q \cdot S_{x(2')}^*}{d \cdot J_x} = \frac{Q \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \right]}{d \cdot J_x} \gg \tau_2.$$

Точка 3 знаходиться на нейтральній лінії; для неї:

$$\tau_3 = \frac{Q \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \tau_{\max}, \quad (2.112)$$

де S_x – статичний момент відносно осі x половини площі двотавра (таблична величина).

Епюра τ має вигляд, показаний на рисунку 2.80, а. Її особливість – стрибок в місці переходу від полиці до стінки. До і після цього місця τ змінюється за відповідними параболічними законами. Слід зауважити, що всі викладки, наведені для двотаврів, повністю справедливі й для швелерів, які також мають дві полиці й стінку і однакові з двотаврами позначення розмірів і геометричних параметрів.

Формули (2.109), (2.111) і (2.112) дозволяють визначати максимальні дотичні напруження в довільних перерізах балок розглянутих профілів залежно від величин діючих у них поперечних сил. Очевидно, що небезпечними з точки зору дотичних напружень будуть перерізи зазначених балок, у яких поперечні сили найбільші. З урахуванням цього, замінивши в наведених

формулах величини Q на Q_{\max} , отримаємо відповідні вирази для τ_{\max} у всьому об'ємі цих балок:

прямокутник –
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{F},$$

коло –
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{F},$$

двотавр і швелер –
$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x}.$$

двотавр і швелер –

На практиці бувають випадки, коли балки мають інші форми поперечних перерізів. У таких випадках величини τ_{\max} визначають шляхом аналізування, подібного наведеному для двотавра, попередньо визначивши положення осі x (вона завжди проходить через центр ваги перерізу) і

розрахувавши величину J_x .

Умова міцності балки за дотичними напруженнями має вигляд

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (2.113)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, яке визначається в долях від допустимого нормального напруження – $[\sigma]$ за третьою або четвертою теоріям міцності:

$$[\tau]_{III} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot [\sigma] = 0,5 \cdot [\sigma], \quad (2.114)$$

$$[\tau]_{IV} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [\sigma] \approx 0,6 \cdot [\sigma] \quad (2.115)$$

Обґрунтування залежностей (2.114) і (2.115) надається в пункті 2.7.3.

2.6.5 Сумісна дія нормальних і дотичних напружень. Повна перевірка міцності балок

Як видно на рисунках 2.78...2.80, місця дії максимальних нормальних і максимальних дотичних напружень у межах одного перерізу балки не співпадають. Найбільші за модулем нормальні напруження діють в крайніх і нижніх шарах волокон, саме там, де дотичні напруження відсутні. Максимальні ж дотичні напруження діють у нейтральних шарах наведених перерізів, де нормальні напруження дорівнюють нулю.

У проміжних шарах волокон одночасно діють і нормальні, і дотичні напруження. Їх сумісна дія може бути більш небезпечною, аніж дія σ_{\max} або τ_{\max} . Для оцінювання сумісної дії σ і τ в перерізах балок використовують зазвичай третю або четверту теорію міцності (див. пункти 2.5.4 і 2.5.5), підраховуючи відповідні еквівалентні напруження через головні напруження σ_1, σ_2 і σ_3 .

Значення σ_2 у точках балок завжди дорівнюють нулю. Величини ж σ_1 і σ_3 залежать не тільки від величин згинального моменту M і поперечної сили Q , що діють у тому чи іншому перерізі, але й від комбінації знаків цих фактів. Взагалі таких комбінацій чотири: $M > 0, Q > 0$; $M > 0, Q < 0$; $M < 0, Q > 0$; $M < 0, Q < 0$. Зважаючи на те, що в кожній з означених комбінацій знаків M і Q формули для підрахунку величин σ_1 і σ_3 в зонах розтягання і стискання різні, маємо вісім варіантів напружених станів балок при плоскому згинанні.

Розглянемо детально варіанти напружених станів у зонах стискання і розтягання балки, в перерізах якої $M > 0$ і $Q > 0$ (рис. 2.81).

Для визначення σ_1 і σ_3 в зонах стискання і розтягання побудуємо відповідні кола Мора (рис. 2.82).

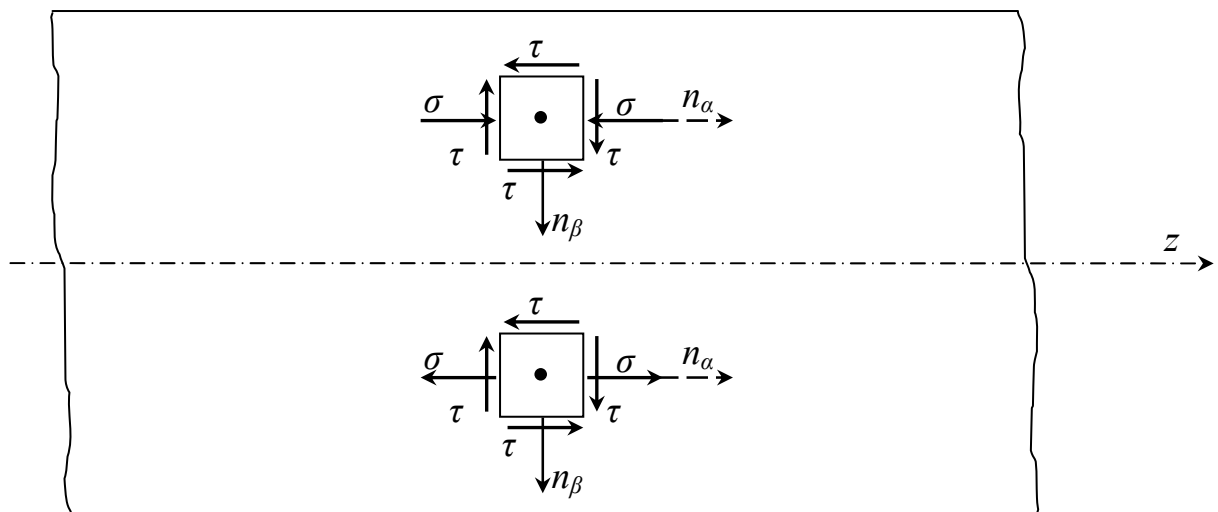


Рисунок 2.81

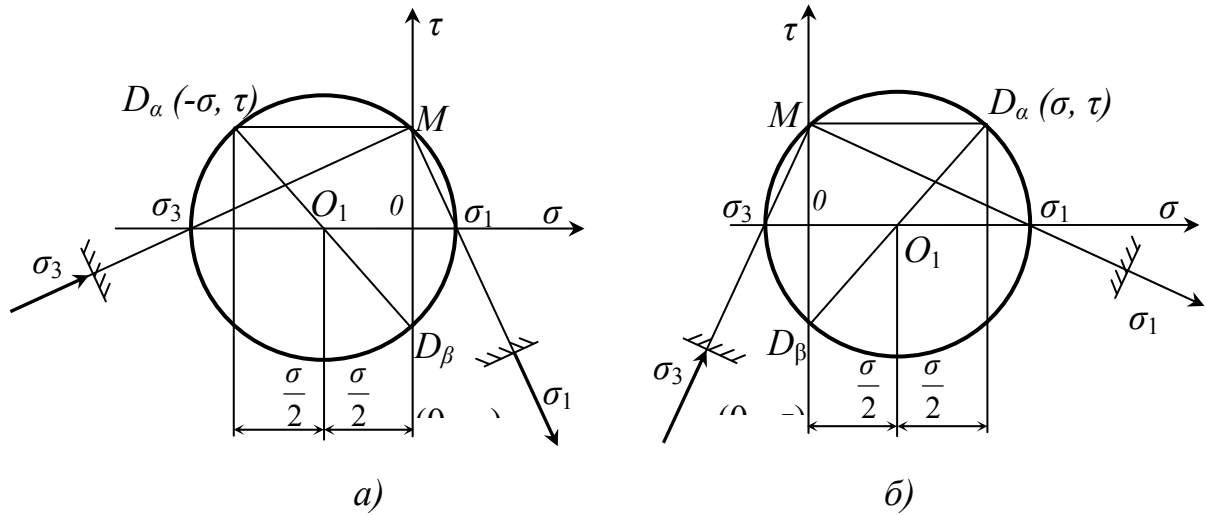


Рисунок 2.82

У зоні стискання (див. рис. 2.82, а):

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + R$$

$$\sigma_3 = -\frac{\sigma}{2} - R$$

де R – радіус кола Мора,

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

У зоні розтягання (див. рис. 2.82, б):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + R$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - R$$

Значення R таке ж, як і у зоні стискання. В обох випадках $\sigma_2 = 0$.

Еквівалентні напруження в зоні стискання за третьою теорією міцності (див. формулу (2.76)):

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{\sigma}{2} + R + \frac{\sigma}{2} + R = 2R = 2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.116)$$

Ці напруження за четвертою теорією міцності (див. формулу (2.79)):

$$\begin{aligned}
\sigma_{екв}^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(-\frac{\sigma}{2} + R \right)^2 + \left(\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} + R \right)^2 \right]} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\sigma^2}{4} - \sigma \cdot R + R^2 \right) + (\sigma^2 + 4\tau^2) + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \sigma \cdot R + R^2 \right) \right]} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3\sigma^2}{2} + 2R^2 + 4\tau^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{3\sigma^2}{2} + 2 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) + 4\tau^2 \right]} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [2\sigma^2 + 6\tau^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.
\end{aligned}
\tag{2.117}$$

Підраховавши аналогічно значення $\sigma_{екв}^{III}$ і $\sigma_{екв}^{IV}$ для зони розтягання, отримаємо такі самі результати, як і для зони стискання. Слід зауважити, що вирази (2.116) і (2.117) справедливі для всіх можливих комбінацій знаків σ і τ .

Для зручності подальших викладок об'єднаємо формули (2.116) і (2.117):

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha \cdot \tau^2}, \tag{2.118}$$

де $\alpha = 3$ – при підрахунку за четвертою теорією міцності,

$\alpha = 4$ – при використанні третьої теорії міцності.

Умова міцності за еквівалентними напруженнями має вигляд

$$\sigma_{екв}^{\max} \leq [\sigma], \tag{2.119}$$

де $\sigma_{екв}^{max}$ – найбільше у всій балці еквівалентне напруження, визначене за допомогою формули (2.118).

Умова (2.119) разом з умовами міцності за нормальними (2.97)...(2.99) і дотичними (2.113)...(2.115) напруженнями створює комплекс умов для повної перевірки міцності балок.

Зрозуміло, що перевірка міцності за еквівалентними напруженнями потребує чіткої уяви про характер розподілу цих напружень за висотою перерізів балок. Зважаючи на те, що в загальному плані це питання не є достатньо вивченим, звернемось до результатів досліджень за цією темою, проведених і опублікованих кафедрою технічної механіки ДДМА. Вони стосувались найбільше поширених профілів балок – прямокутного, круглого і двотаврового.

Указані дослідження показали, що в прямокутному і круглому перерізах максимальні еквівалентні напруження можуть виникати в нейтральному шарі ($y=0$), в крайніх за висотою

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \text{або} \quad y = \pm R$$

шарах волокон (), також в обох названих місцях одночасно. У

першому випадку (коли $\tau_{max} \cdot \sqrt{\alpha} > \sigma_{max}$) вони дорівнюють $\sigma_{екв}^{max} = \tau_{max} \cdot \sqrt{\alpha}$, у

другому (коли $\sigma_{max} > \tau_{max} \cdot \sqrt{\alpha}$) – $\sigma_{екв}^{max} = \sigma_{max}$, у третьому (коли $\sigma_{max} = \tau_{max} \cdot \sqrt{\alpha}$) –

$\sigma_{екв}^{max} = \sigma_{max} = \tau_{max} \cdot \sqrt{\alpha}$. У проміжних же шарах волокон еквівалентні напруження не можуть бути більшими за їх максимальні значення.

Отримані результати надали підстави стверджувати, що при виконанні умов міцності за нормальними і дотичними напруженнями в прямокутному або круглому перерізах у них автоматично виконується і умова міцності за еквівалентними напруженнями, тому перевірка міцності балок за цими напруженнями є зайвою.

Дійсно, якщо в перерізі $\sigma_{екв}^{max} = \sqrt{\alpha} \cdot \tau_{max}$, то при виконанні умови міцності за дотичними

напруженнями (2.113) $\tau_{max} \leq [\tau]$ маємо: $\sigma_{екв}^{max} \leq \alpha \cdot [\tau]$, або виконання умови міцності

за еквівалентними напруженнями (2.119): $\sigma_{екв}^{max} \leq [\sigma]$, тому, що $\alpha \cdot [\tau] = [\sigma]$ (див.

формули (2.114), (2.115) і (2.118). Якщо ж у перерізі $\sigma_{екв}^{max} = \sigma_{max}$, то при виконанні умови

міцності за нормальними напруженнями (2.97) $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ знову отримуємо виконання

умови (2.53): $\sigma_{екв}^{max} \leq [\sigma]$.

Подібні дослідження, проведенні відносно двотаврових балок, підтвердили існуючу точку зору, згідно з якою небезпечними місцями профілю з точки зору еквівалентних напружень є місця стику полиць і стінки (на рис. 2.83 вони позначені як точки K), у яких величини σ і τ хоча і не максимальні в перерізі, але достатньо великі одночасно. Разом з тим така точка зору в ході досліджень була суттєво доповнена.

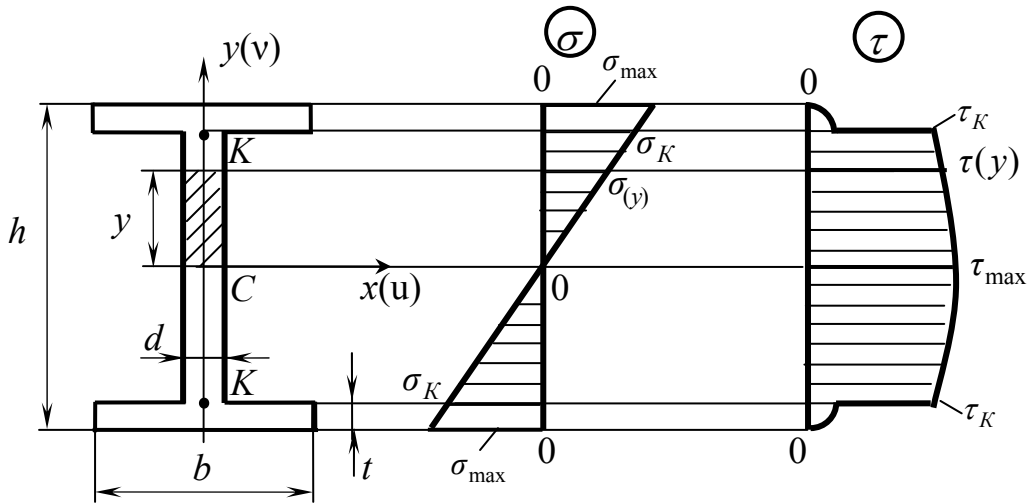


Рисунок 2.83

Дослідження базувались на залежності $\sigma_{екв}$ у межах стінки двотавра від координати y (див. рис. 2.83). Ця залежність на підставі формул (2.118), (2.90), (2.107) і сортаменту двотаврів (див. додаток А) має вигляд

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha \cdot \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} \cdot y\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y^2\right)\right]^2}, \quad (2.120)$$

де M і Q – відповідно згинальний момент і поперечна сила, що діють в перерізі;

J_x – момент інерції перерізу відносно осі x ;

S_x – статичний момент половини перерізу відносно осі x ;

$$\frac{1}{2} \cdot d \cdot y^2 = d \cdot y \cdot \frac{1}{2} y$$

– статичний момент відносно осі x заштрихованої частини

стінки (див. формулу (2.14));

d – товщина стінки двотавра.

Дослідження залежності (2.120) на екстремум і низка подальших перетворень дозволили визначити, так зване, граничне відношення величин M і Q , при якому небезпечними за еквівалентними напруженнями є одночасно шари волокон двотавра на рівнях $y = 0$ та $y = y_K$ (див. рис. 2.83):

$$\left(\frac{M}{Q}\right)_{гр} = \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_K} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)^2}, \quad (2.121)$$

$$y_K = \frac{h}{2} - t$$

де

$$\frac{M}{Q} < \left(\frac{M}{Q} \right)_{\text{гр}}$$

При $\frac{M}{Q} < \left(\frac{M}{Q} \right)_{\text{гр}}$ небезпечним є нульовий рівень ($y=0$). У цьому разі при виконанні в перерізі умови міцності за дотичними напруженнями умова міцності за еквівалентними напруженнями виконується автоматично (як і в прямокутному або круглому перерізах).

$$\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q} \right)_{\text{гр}}$$

При $\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q} \right)_{\text{гр}}$ небезпечним є рівень точки K ($y = y_K$), при якому вираз (2.120) набуває вигляду

$$\sigma_{\text{екв}}^K = \sqrt{\left(\frac{M \cdot y_K}{J_x} \right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2} \quad (2.122)$$

Якщо прирівняти $\sigma_{\text{екв}}^K$ до $[\sigma]$, то, дещо перетворивши вираз (2.122), можна знайти границю виконання в точці K умови міцності за еквівалентними напруженнями:

$$[\sigma] \cdot \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2} = [\sigma]$$

$$\sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2} = 1$$

або (2.123)

Рівність одиниці радикала у виразі (2.123) тягне за собою рівність одиниці його підкореневого виразу:

$$M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2 = 1 \quad (2.124)$$

Не важко побачити, що рівняння (2.124) є рівнянням еліпса з півосями β і γ :

$$\frac{M^2}{\beta^2} + \frac{Q^2}{\gamma^2} = 1$$

$$\beta = \frac{J_x \cdot [\sigma]}{y_K} \quad (2.125)$$

де

$$\gamma = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{\sqrt{\alpha} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right)} \quad (2.126)$$

(2.127)

Отриманий результат дозволяє створити більш зручний, ніж традиційний (тобто аналітичний), спосіб повної перевірки на міцність двотаврових балок, який передбачає використання, так званого, безпечного факторного простору в площині $M - Q$, обмеженого осями координат, дугою AB еліпса (2.125), також відрізками прямих $M = [M]$ і $Q = [Q]$ (рис. 2.84), де $[M]$ і $[Q]$ – допустимі значення згинального моменту і поперечної сили, що витікають з умов міцності за нормальними і дотичними напруженнями:

$$[M] = W_x \cdot [\sigma] \quad (2.128)$$

$$[Q] = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{S_x \cdot \sqrt{\alpha}} \quad (2.129)$$

Щоб скористуватись безпечним факторним простором, побудованим для того чи іншого номера двотавра, слід відмітити на ньому всі точки, координатами яких є пари значень M і Q (без урахування їх знаків) в кожному з характерних перерізів балки, що беруться з епюр згинальних моментів і поперечних сил.

Якщо всі відмічені точки не виходять за межі безпечного факторного простору, міцність балки є повністю забезпеченою. У разі ж, коли хоча б одна точка лежить поза його межами, якась умова міцності не виконується і цей номер двотавра не є прийнятним. Так, наприклад, у перерізі 1 (див. точку 1 на рис. 2.84) не виконується умова міцності за нормальними напруженнями, в перерізі 2 – за дотичними, в перерізі 3 – за еквівалентними. У перерізах 4, 5 і 6 виконуються всі умови міцності.

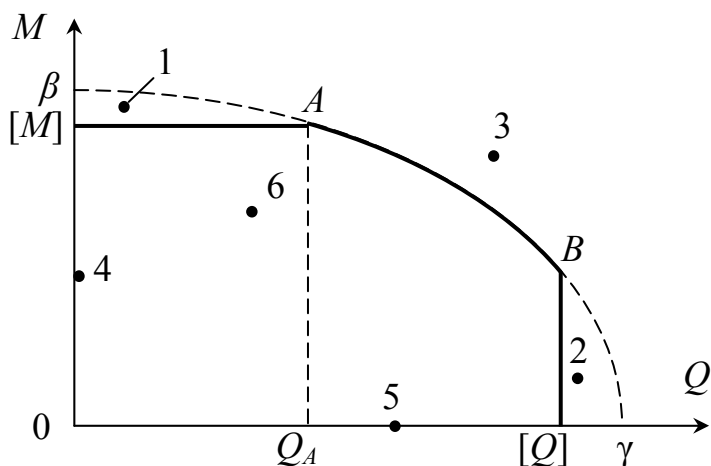
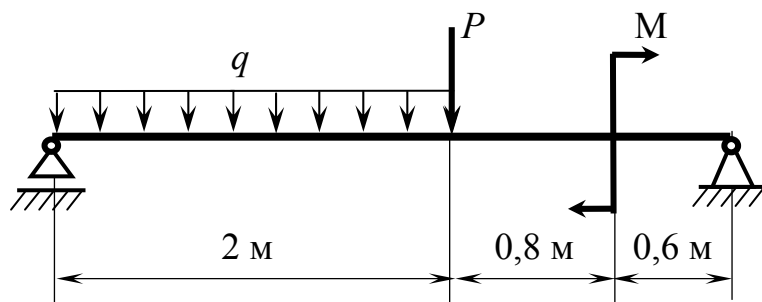


Рисунок 2.84

Слід звернути увагу на те, що площа безпечного факторного простору за третьою теорією міцності менша, ніж за четвертою, бо величини γ і $[Q]$, як це виходить з виразів (2.127) і (2.129), у своїх знаменниках мають величину α , яка більша за третьою теорією (див. вираз (2.118)). Цей факт є підставою для використання саме третьої теорії, як більш надійної, при перевірці міцності двотаврів.

Запропонований спосіб назвемо для стислості графічним. Розглянемо його в дії на прикладі балки, зображеної на рисунку 2.85.



Приклад 2.12. Для заданої балки (див. рис. 2.85) визначити потрібний номер двотавра і виконати повну перевірку його міцності, якщо $q = 50$ кН/м; $P = 55$ кН; $M = 45$ кН·м; $[\sigma] = 160$ МПа. Задачу розв'язати аналітичним і графічним способами, використовуючи III теорію міцності.

Розв'язання**Аналітичний спосіб**

1. Визначаємо опорні реакції балки і позначаємо її характерні перерізи (рис. 2.86, а):

$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2 + M) = \frac{1}{3,4} \cdot (100 + 110 + 45) = 75 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = -R_A \cdot 3,4 + q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M) = \frac{1}{3,4} \cdot (240 + 77 - 45) = 80 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = P_A - q \cdot 2 - P + R_B = 80 - 100 - 55 + 75 = -155 + 155 = 0, \text{ тобто розрахунок виконано вірно.}$$

2. Будуємо епюру поперечних сил (рис. 2.86, б):

$$Q_1 = R_A = 80 \text{ кН}; Q_2 = Q_1 - q \cdot 2 = 80 - 100 = -20 \text{ кН}; Q_3 = Q_2 - P = -20 - 55 = -75 \text{ кН}; Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_3 = -75 \text{ кН}; z_7 = Q_1 : q = 80 : 50 = 1,6 \text{ м.}$$

3. Будуємо епюру згинальних моментів (рис. 2.86, в):

$$M_1 = 0; M_2 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 160 - 100 = 60 \text{ кН·м}; M_3 = M_2 = 60 \text{ кН·м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 2,8 - q \cdot 2 \cdot 1,8 - P \cdot 0,8 = 224 - 180 - 44 = 0; M_5 = M_4 + M = 0 + 45 =$$

$$M_7 = R_A \cdot z_7 - q \cdot z_7 \cdot \frac{z_7}{2} = 128 - 64 = 64 \text{ кН·м}; M_6 = 0;$$

4. З умови міцності за нормальними напруженнями визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{64 \cdot 10^3}{160} = 400 \text{ см}^3.$$

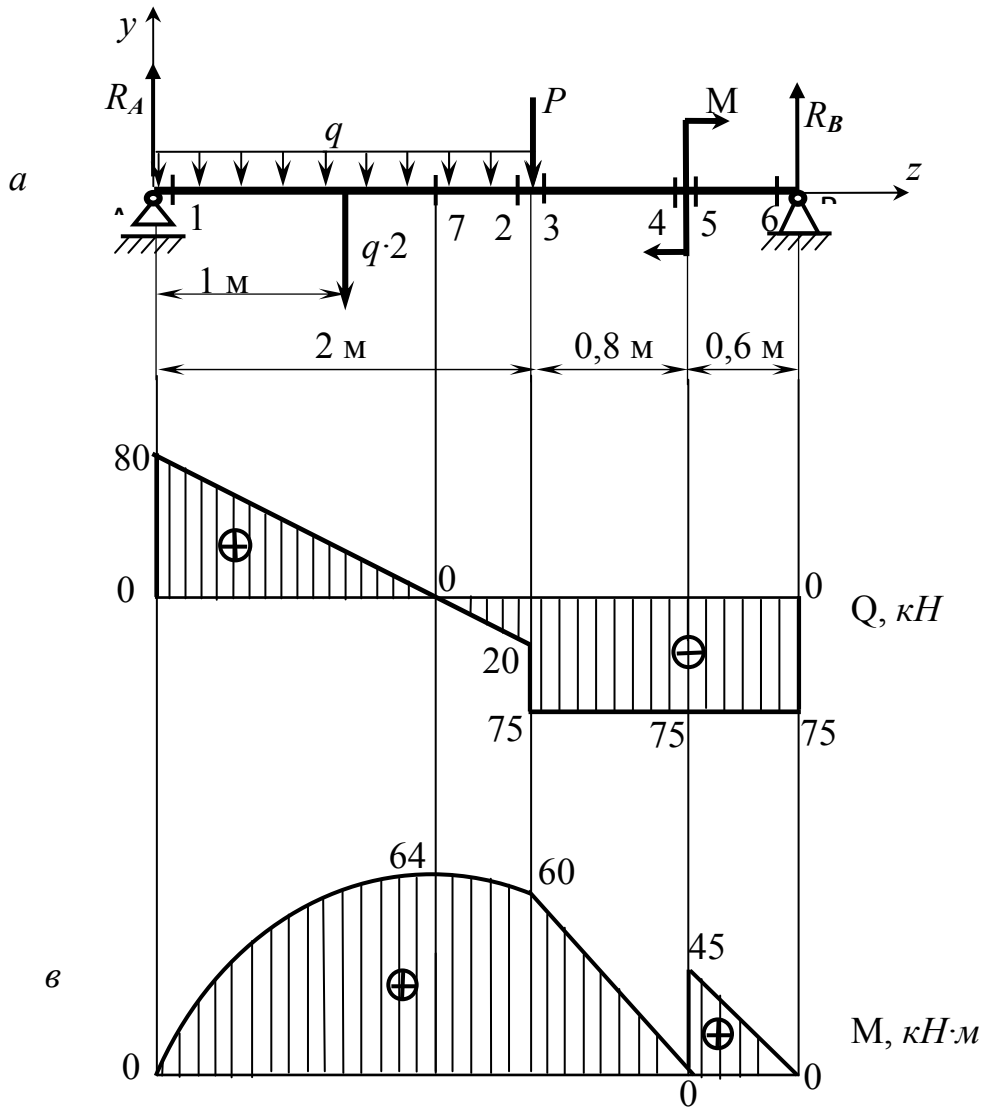


Рисунок 2.86

5. З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) визначаємо потрібний номер двотавра і його основні параметри (див. рис. 2.83).

Приймаємо двотавр 27а, у якого $W_x = 407 \text{ см}^3$; $J_x = 5\,500 \text{ см}^4$; $S_x = 229 \text{ см}^3$; $h = 270 \text{ мм}$; $b = 135 \text{ мм}$; $d = 6,0 \text{ мм}$; $t = 10,2 \text{ мм}$.

6. Перевіряємо міцність балки за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{64 \cdot 10^6}{407 \cdot 10^3} = 157,248 \text{ МПа} < [\sigma],$$

тож міцність за нормальними напруженнями забезпечена.

Слід зауважити, що в цій задачі номер профілю балки було визначено саме з цієї умови міцності, тому ця перевірка не є обов'язковою. Вона обов'язкова, коли номер профілю відомий (тобто заданий).

7. Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 229 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} = 55,515 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{III} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} < [\tau],$$

тобто міцність балки і за дотичними напруженнями забезпечена.

8. Визначаємо місце дії в балці максимальних еквівалентних напружень.

Аналізування побудованих епюр дозволяє вважати небезпечним з точки зору еквівалентних напружень переріз 3, у якому величини Q і M мають хоча і не максимальні, але близькі до них значення: $Q = 75 \text{ кН}$, $M = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Відношення M/Q в цьому перерізі становить:

$$\frac{M}{Q} = \frac{60 \cdot 10^6}{75 \cdot 10^3} = 800 \text{ мм.}$$

У балці означеного профілю (двотавр 27а) граничне значення M/Q (див. формулу (2.121)) становить:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{гр}} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_K} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{4}}{6,0 \cdot 124,8} \cdot \sqrt{(229 \cdot 10^3)^2 - \left(229 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 124,8^2\right)^2} = 370,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

$$\text{Тут } y_K = \frac{h}{2} - t = \frac{270}{2} - 10,2 = 124,8 \text{ мм.}$$

$$\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q} \right)_{гр}$$

Оскільки $\left(\frac{M}{Q} \right)_{гр}$, найбільші еквівалентні напруження в небезпечному перерізі будуть діяти на рівні $y = y_K$: $\sigma_{екв}^{max} = \sigma_{екв}^K$.

Слід зауважити, що в менш очевидному випадку визначення небезпечного перерізу слід взяти до уваги всі потенційно небезпечні перерізи балки і по кожному з них застосувати наведену вище процедуру.

9. З урахуванням місця дії максимальних еквівалентних напружень визначимо їх величину і перевіримо відповідну умову міцності:

$$\sigma_K = \frac{M}{J_x} \cdot y_K = \frac{60 \cdot 10^6}{5500 \cdot 10^4} \cdot 124,8 = 136,145 \text{ МПа;}$$

$$\tau_K = \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) = \frac{75 \cdot 10^3}{6,0 \cdot 5500 \cdot 10^4} \cdot \left(229 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,0 \cdot 124,8^2 \right) = 41,426 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_K^{екв} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4 \cdot \tau_K^2} = \sqrt{136,145^2 + 4 \cdot 41,426^2} = 159,374 \text{ МПа} < [\sigma]$$

тож і за еквівалентними напруженнями міцність балки є забезпеченою.

Слід зауважити, що при невиконанні хоча б однієї з умов міцності треба взяти наступний (більший) номер двотавра і перевірку повторити.

Графічний спосіб

При цьому способі розв'язання задачі перші три дії аналітичного способу (1...3) повторюються. Потім, з огляду на максимальне значення згинального моменту $M_{max} = 64 \text{ кН}\cdot\text{м}$, визначаємо потрібний номер двотавра, тобто такий, у якого значення $[M]$ максимально наближене до M_{max} :

$$[M] \geq M_{max}$$

У додатку Б наведені параметри безпечних факторних просторів для всіх номерів двотаврів, що є в сортаменті (див. додаток А). Вони визначені за формулами (2.126)...(2.129) для третьої теорії міцності й $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

З цих матеріалів видно, що найближчим до значення M_{max} є двотавр 27а, у якого $[M] = 65,110 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Зображення його безпечного факторного простору, побудоване в комп'ютерній системі *Mathcad*, з нанесеними на нього точками 1...7, координати яких дорівнюють значенням Q і M у відповідних перерізах балки, показано на рисунку 2.87.

Двотавр № 27а

$\beta=70,513 \text{ кНм}$, $\gamma=144,836 \text{ кН}$, $[M]=65,110 \text{ кНм}$, $[Q]=115,284 \text{ кН}$.

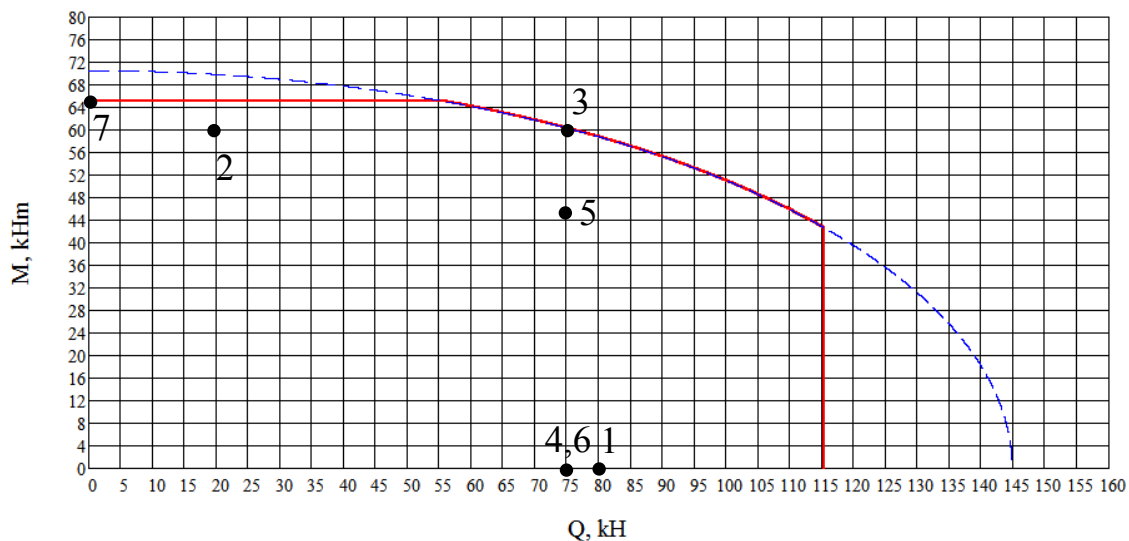


Рисунок 2.87

Як видно на цьому рисунку 2.87, ні одна з нанесених точок не виходить за межі безпечного факторного простору. Це означає, що у всіх позначених перерізах балки виконуються всі умови міцності – за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями, тобто що вибір двотавра 27а є правильним.

Щоб пересвідчитись у тому, що вибраний двотавр не є більшим за потрібний, достатньо перевірити на міцність за означеною процедурою його попередника у розмірному ряду – двотавр 27. Результат такої перевірки – негативний (рис. 2.88). Це свідчить про те, що двотавр 27а є найменшим із двотаврів, які задовольняють усі умови міцності балки.

Двотавр № 27

$\beta=64,026$ кНм, $\gamma=147,557$ кН, $[M]=59,360$ кНм, $[Q]=114,515$ кН.

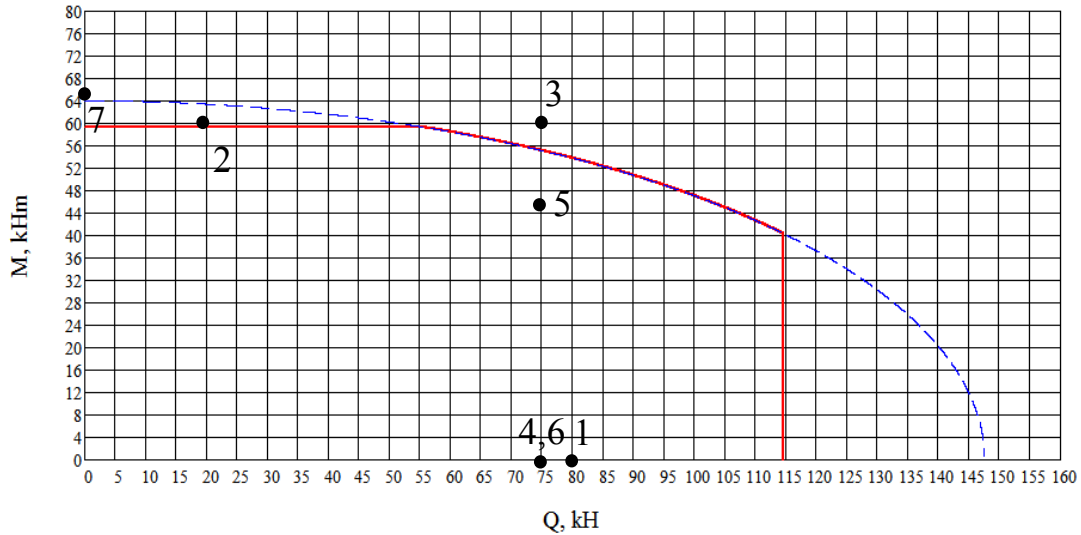


Рисунок 2.88

2.7 Зсув

2.7.1 Чистий зсув, його особливості та напружений стан

Зсувом називається такий вид навантаження, при якому в перерізі стрижня виникають тільки поперечні сили Q .

Деформацію зсуву з достатнім ступенем наближення можна одержати практично, приклавши перпендикулярно до стрижня з протилежних боків дві рівні й протилежно направлені сили. Прикладом такої дії сил може бути різання механічними ножицями металевих смуг або прутів (рис. 2.89).

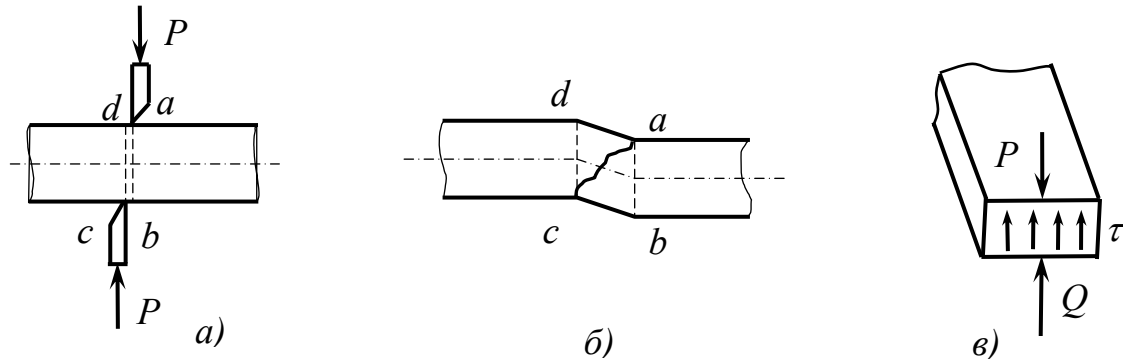


Рисунок 2.89

Ліва частина смуги, яку ріжуть ножицями (див. рис. 2.89, а), відділяється від правої двома ножами, до яких прикладені сили P достатньої величини. Верхній ніж намагається розділити смугу в площині ab , нижній – у площині cd . При нормальній побудові процесу ці площини не співпадають: відстань між ними є технологічним прозором. Розділення смуги відбувається після входження ножів у матеріал шляхом появи тріщин у площині ac (див. рис. 2.89,б). Наявність прозору визиває деяке викривлення зони зсуву і відповідну появу в ній поряд з поперечною силою Q додаткових зусиль інших напрямків. Таким чином, у цьому прикладі зсув є дещо спотвореним. Це спотворення зникає лише в разі відсутності прозору, тобто при збіжності площин ab і cd .

У цьому випадку, використовуючи метод перерізів (рис. 2.89, в), знаходимо, що поперечна сила Q в перерізі ab (або cd) площею F дорівнює зовнішній силі P і викликає появу в точках перерізу відповідних дотичних напружень τ :

$$Q = P = \int_F \tau \cdot dF$$

Вважаючи дотичні напруження τ розподіленими по площі F рівномірно, матимемо:

$$Q = P = F \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (2.130)$$

звідки

Цією формулою і користуються в розрахунках на міцність при зсуві.

Умова міцності в цьому разі має вигляд

$$\tau \leq [\tau], \quad (2.131)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження при зсуві.

Визначення величин $[\tau]$ для різних матеріалів шляхом механічних випробувань є доволі складним і дорогим. Тому ці величини зазвичай встановлюють у долях від допустимих нормальних напружень, використовуючи ті чи інші теорії міцності.

Для реалізації такого підходу, також для інших теоретичних потреб проаналізуємо напружений стан матеріалу при зсуві.

Розглянемо окремий випадок плоского напруженого стану, при якому на всіх гранях виділеного елемента (рис. 2.90, а) виникають тільки дотичні напруження. Такий напружений стан називається чистим зсувом.

Знайдемо величини і напрямки головних напружень при чистому зсуві. Це – обернена задача теорії плоского напруженого стану (див. пункт 2.4.3).

Для розв'язання цієї задачі побудуємо відповідний круг Мора (рис. 2.90, б). Його центр – у

точці O , тому, що $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$.

Будемо вважати, що $\tau_\alpha = -\tau$, $\tau_\beta = \tau$. Тоді з кола Мора знаходимо:

$$R = \tau_\beta = \tau, \quad \sigma_1 = R = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -R = -\tau, \quad (2.132)$$

а головні площадки нахилені до граней елемента під кутом 45° (див. рис. 2.90, б).

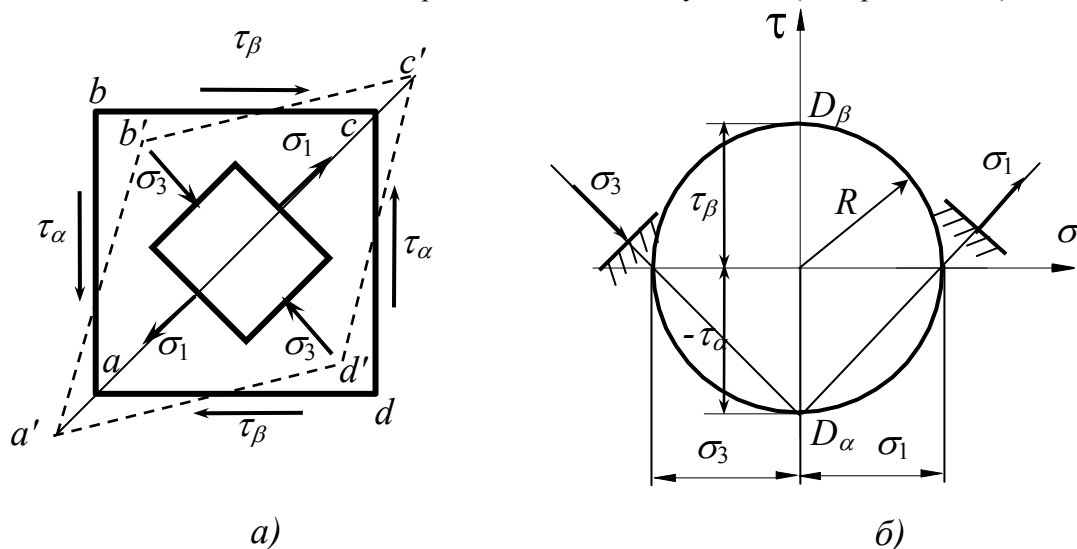


Рисунок 2.90

2.7.2 Деформація і закон Гука при чистому зсуві

Розглянемо деформацію елемента $abcd$, що перебуває в умовах чистого зсуву (див. рис. 2.90, а). Оскільки по гранях цього елемента немає нормальних напружень, то уздовж граней немає і лінійних деформацій. Водночас діагональ ac , що співпадає з напрямком σ_1 , подовжується, а діагональ bd , яка співпадає з напрямком σ_3 , скорочується. У результаті квадрат $abcd$ перетворюється на ромб $a'b'c'd'$. Таким чином, деформація чистого зсуву характеризується тільки зміною прямих кутів виділеного елемента. Розглянемо більш детально деформацію цього елемента (рис. 2.91).

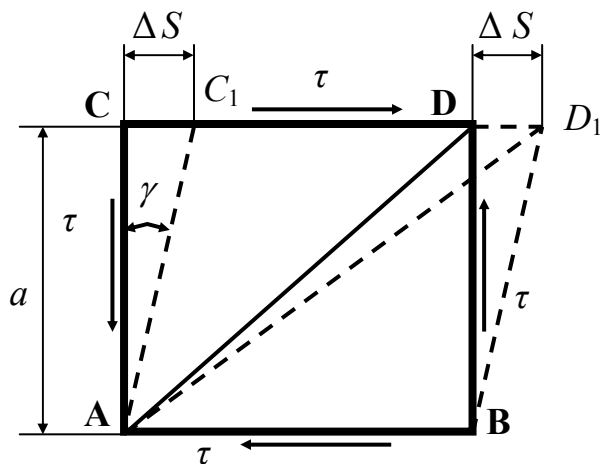


Рисунок 2.91

Якщо грань AB закріпити нерухомо, то під дією дотичних напружень грань CD зрушиться паралельно AB на деяку величину $DD_1=CC_1=\Delta S$, яка зветься абсолютним зсувом. Елемент $ABCD$ перекосить, прямі кути перетворяться на гострі або тупі, змінившись на кут γ , що називається відносним зсувом або кутом зсуву. Він служить мірою зміни кутів прямокутника. Оскільки ми маємо справу з пружними деформаціями, то цей кут буде вельми малим. Тоді

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (2.133)$$

Залежність величини γ від τ встановлює закон Гука при зсуві у відносній формі:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{або} \quad \tau = G \cdot \gamma, \quad (2.134)$$

де G – так званий модуль пружності II роду (або модуль пружності при зсуві).

Величина G не є новою фізичною характеристикою матеріалу, бо вона пов'язана з модулем пружності I роду (E) і коефіцієнтом Пуассона (μ):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}.$$

Для сталі: $E \approx 2 \times 10^5$ МПа; $\mu \approx 0,3$. Тоді

$$G \approx \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} \approx 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Розв'язуючи разом рівняння (2.130), (2.133) і (2.134), одержуємо:

$$\Delta S = \frac{P \cdot a}{G \cdot F}, \quad (2.135)$$

де P – сила, що спричиняє зсув (див. рис. 2.89),

F – площа зсуву,

a – розмір елемента (див. рис. 2.91).

Формулу (2.135) часто називають законом Гука при зсуві в абсолютній формі.

2.7.3 Розрахунки на міцність при зсуві

Елементи багатьох з'єднань, які працюють в умовах зсуву (заклепувальних, шпонкових, зварних та ін.) розраховують на зріз. У ряді випадків їх доповнюють розрахунками на зминання і розрив.

Умова міцності на зріз базується на формулах (2.130) і (2.131) і має вигляд

$$\tau = \frac{P_{зр}}{F_{зр}} \leq [\tau], \quad (2.136)$$

де τ – дотичне напруження в елементі з'єднання,

$P_{зр}$ – сила, що створює це напруження;

$F_{зр}$ – площа зрізу;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження.

Визначимо величину $[\tau]$ для пластичних матеріалів, з яких зазвичай виготовлюються деталі з'єднань. Використаємо при цьому третю і четверту теорії міцності (див. пункти 2.5.3 і 2.5.4), а також вирази для головних напружень при чистому зсуві (див. формули (2.132)).

При чистому зсуві у граничному стані (поява пластичних деформацій) маємо:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_{zp}, \\ \sigma_3 &= -\sigma_1 = -\tau_{zp}, \\ \sigma_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

У граничному стані при використанні третьої теорії міцності :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{zp}, \quad (2.138)$$

де σ_{zp} – граничне нормальне напруження ($\sigma_{zp} = \sigma_T$ при розтяганні або стисканні).

Підставивши вирази (2.137) у формулу (2.138), після перетворень одержимо:

$$\tau_{zp} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{zp}. \quad (2.139)$$

Поділивши ліву і праву частини (2.139) на коефіцієнт запасу міцності (n), остаточно отримаємо:

$$[\tau]_{III} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]. \quad (2.140)$$

У граничному стані при використанні четвертої теорії міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sigma_{zp}. \quad (2.141)$$

Після підстановки у (2.141) значень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ із (2.137) і подальших перетворень, остаточно отримаємо:

$$[\tau]_{IV} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [\sigma] \approx 0,6 \cdot [\sigma]. \quad (2.142)$$

У розрахунках на міцність умова (2.136) є основною при визначенні основних параметрів з'єднань, що працюють на зріз. Так, використовуючи її, можна визначити потрібну площу зрізу:

$$F_{zp} \geq \frac{P_{zp}}{[\tau]}.$$

Розрахунки на зминання і розрив проводять як перевірочні, коли є загроза руйнування з'єднання з цих причин. Відповідні умови міцності мають вигляд

$$\sigma_{зм} = \frac{P_{зм}}{F_{зм}} \leq [\sigma_{зм}] \quad (2.143)$$

$$\sigma_{роз} = \frac{P_{роз}}{F_{роз}} \leq [\sigma] \quad (2.144)$$

де $P_{зм}$, $P_{роз}$ – відповідно зусилля зминання і розриву;

$F_{зм}$, $F_{роз}$ – відповідно площі зминання і розриву;

$[\sigma_{зм}]$ – допустиме напруження при зминанні:

$$[\sigma_{зм}] = (2,0 \dots 2,5) \cdot [\sigma]$$

$[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження (див. пункт 2.2.3).

Процедуру зазначених розрахунків проілюструємо таким прикладом.

Приклад 2.13. Металеві смуги з'єднані між собою за допомогою двох металевих заклепок (рис. 2.92). Треба визначити потрібний діаметр заклепок і всебічно перевірити надійність з'єднання, якщо $P = 40$ кН, $a = 30$ мм, $b = 60$ мм, $\delta = 8$ мм, допустиме напруження для матеріалу заклепок $[\sigma]_з = 200$ МПа, для матеріалу смуг – $[\sigma]_с = 160$ МПа, прийнята теорія міцності – третя.

Розв'язання

1. Зовнішні сили P розтягують смуги. Заклепки є своєрідними в'язями з реакціями $R_1 \dots R_4$ (див. рис. 2.92).

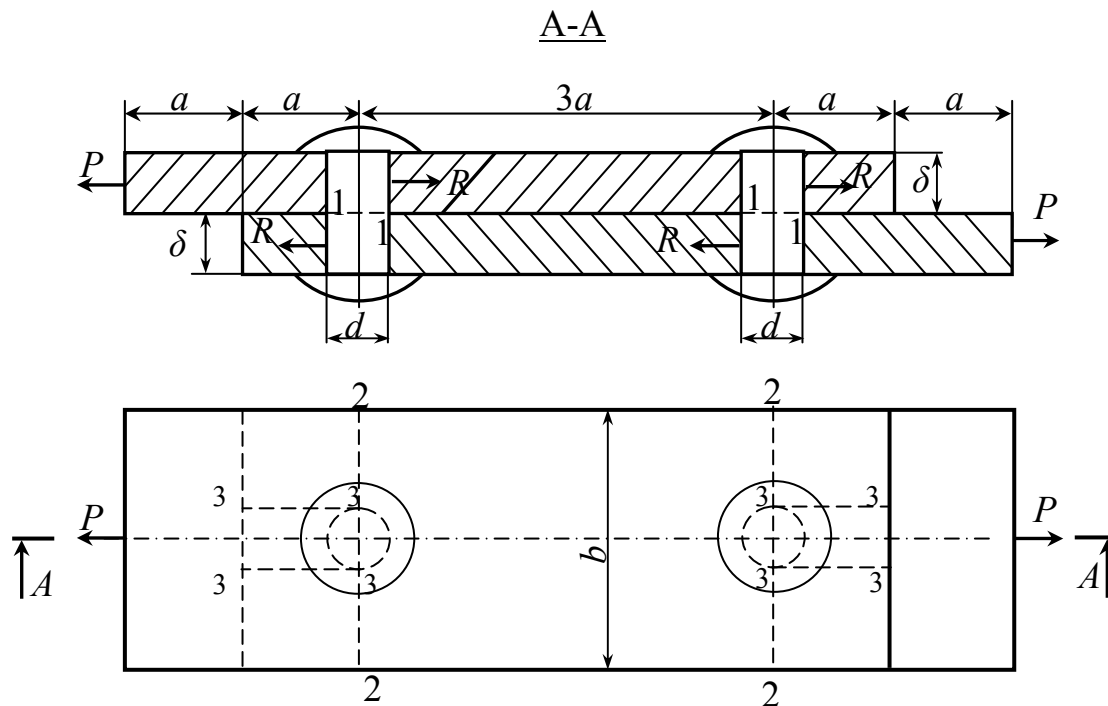


Рисунок 2.92

Ці реакції однакові і попарно врівноважують сили P , тому
 $R_1=R_2=R_3=R_4=R=P/2=20\text{ кН}$. (2.145)

З урахуванням (2.145) епюра подовжніх сил для верхньої смуги має вигляд, зображений на рисунку 2.93. Для нижньої смуги вона аналогічна.

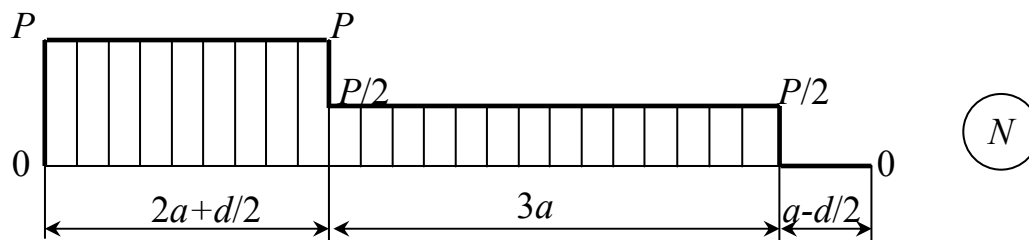


Рисунок 2.93

2. Причиною вірогідного руйнування заклепок є зріз по поверхням 1–1 (див. рис. 2.92). Зусилля зрізу кожної заклепки дорівнює:

$$P_{\text{зр}} = R = 20 \text{ кН.}$$

Площа поверхні зрізу однієї заклепки:

$$F_{\text{зр}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,25 \cdot \pi \cdot d^2$$

Допустиме дотичне напруження матеріалу заклепок:

$$[\tau]_3 = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]_3 = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100 \text{ МПа.}$$

Тоді з урахуванням умови (2.136) маємо:

$$F_{\text{зр}} = 0,5 \pi \cdot d^2 \geq \frac{P_{\text{зр}}}{[\tau]_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{100} = 200 \text{ мм}^2,$$

$$d \geq \sqrt{\frac{200}{0,5 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{200}{0,5 \cdot 3,14}} = 15,96 \text{ мм.}$$

З нормального ряду (див. додаток А) приймаємо $d = 16$ мм.

2. Оскільки $[\sigma]_c < [\sigma]_3$, змінання можливе у смуг у місцях їх контакту з боковими поверхнями заклепок. При цьому в кожному місці контакту умовна площа змінання (рис. 2.94) становить:

$$F_{\text{зм}} = d \cdot \delta = 16 \cdot 8 = 128 \text{ мм}^2,$$

а зусилля змінання – $P_{\text{зм}} = R = 20$ кН.

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{P_{\text{зм}}}{F_{\text{зм}}} = \frac{20 \cdot 10^3}{128} = 156,25$$

Тоді

Допустиме напруження при змінанні матеріалу смуг:

$$[\sigma_{\text{зм}}] = 2 \cdot [\sigma]_c = 2 \cdot 160 = 320 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\sigma_{\text{зм}} < [\sigma_{\text{зм}}]$, умова міцності (2.143) виконується.

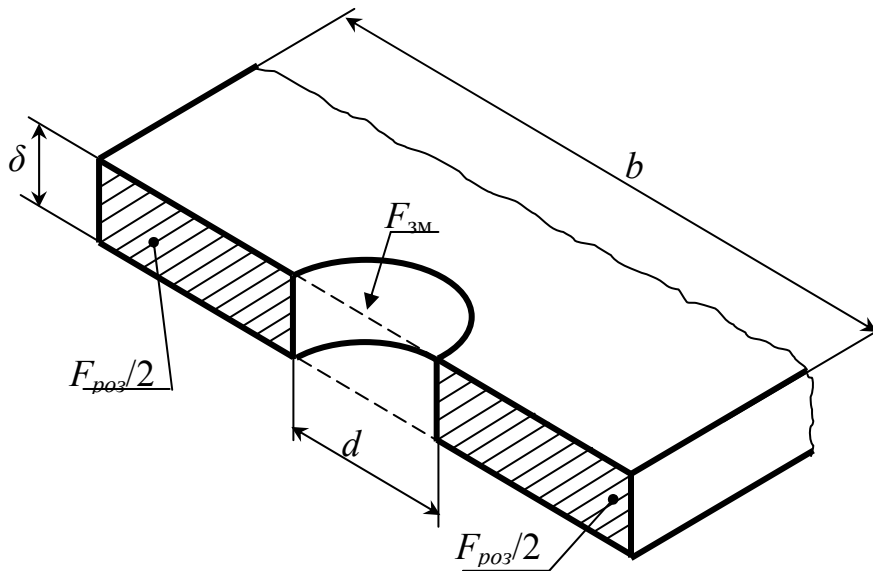


Рисунок 2.94

3. Вірогідний розрив смуг слід очікувати по поверхнях 2–2, розташованим ближче до точок прикладення сил P (див. рис. 2.92), тобто там, де подовжня сила найбільша (див. рис. 2.93).

Тоді

$$P_{роз} = N_{\max} = P = 40 \text{ кН.}$$

Кожна з цих поверхонь має площу (див. рис. 2.94):

$$F_{роз} = (b - d) \cdot \delta = (60 - 16) \cdot 8 = 352 \text{ мм}^2.$$

Розривне напруження при цьому становить:

$$\sigma_{роз} = \frac{P_{роз}}{F_{роз}} = \frac{40 \cdot 10^3}{352} = 113,64 \text{ МПа.}$$

Як бачимо, $\sigma_{роз} < [\sigma]_c$, тому умова (2.144) також виконується.

4. Руйнування смуг можливе також шляхом виривання матеріалу з їх кінців, найбільш віддалених від точок прикладення сил P , тобто шляхом зрізу заклепками об'ємів матеріалу між площинами 3–3 (див. рис. 2.92).

У цьому разі сумарна площа зрізу у однієї смуги становить:

$$F'_{зр} = 2 \cdot a \cdot \delta = 2 \cdot 30 \cdot 8 = 480 \text{ мм}^2,$$

а дотичні напруження на поверхнях зрізу становлять:

$$\tau' = \frac{P'_{зр}}{F'_{зр}} = \frac{R}{F'_{зр}} = \frac{20 \cdot 10^3}{480} = 41,67 \text{ МПа.}$$

Допустиме дотичне напруження для матеріалу смуг:

$$[\tau]_c = \frac{1}{2} \cdot [\sigma]_c = \frac{1}{2} \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

Оскільки $\tau' < [\tau]_c$, то небезпека виривання матеріалу з кінців смуг відсутня.

Таким чином, розглянуте заклепувальне з'єднання є цілком надійним, оскільки забезпечує виконання всіх умов міцності.

Наведений приклад стосується лише одного з багатьох варіантів з'єднань, що працюють в умовах зсуву. Особливості розрахунку інших розглядаються в курсі деталей машин.

2.8 Кручення

2.8.1 Загальні положення. Побудова епюр крутних моментів

Крученням називають такий варіант навантаження стрижня, при якому в його поперечних перерізах виникають лише крутні моменти – $M_{кр}$, а інші внутрішні силові фактори відсутні.

Стрижні, які передають крутний момент, у техніці зветься валами. Вони мають, як правило, круглу форму поперечного перерізу: суцільну або кільцеву (див. рис. 2.74).

У загальному випадку навантаження вала крутний момент у будь-якому з його перерізів дорівнює сумі моментів відносно осі вала (z) від зовнішніх сил, прикладених до його залишеної частини:

$$M_{кр} = \sum m_z(\bar{P}_k).$$

У випадку обертання вала з постійною частотою (n) крутний момент можна визначити за формулою

$$M_{кр} = \frac{K}{\omega} = K \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{30 \cdot K}{\pi \cdot n}, \quad (2.146)$$

де K – потужність, що передається валом;

ω – кутова швидкість обертання вала;

n – кількість обертів вала за 1 хвилину.

Слід зауважити, що потужності у кіловатах ($\kappa Bт$) відповідає крутний момент у $\kappa H \cdot м$. У разі ж, коли потужність у формулі (2.146) вимірюється у ватах (Вт), крутний момент має розмірність $H \cdot м$.

Для визначення небезпечних перерізів валів будують епюри крутних моментів, вводячи таке правило знаків: крутний момент вважається додатним, коли спостерігач, який дивиться на переріз, бачить момент $M_{кр}$ направленим за ходом годинникової стрілки. При протилежному напрямку крутний момент вважається від’ємним. На рисунку 2.95 у перерізі A крутний момент зображений додатним.

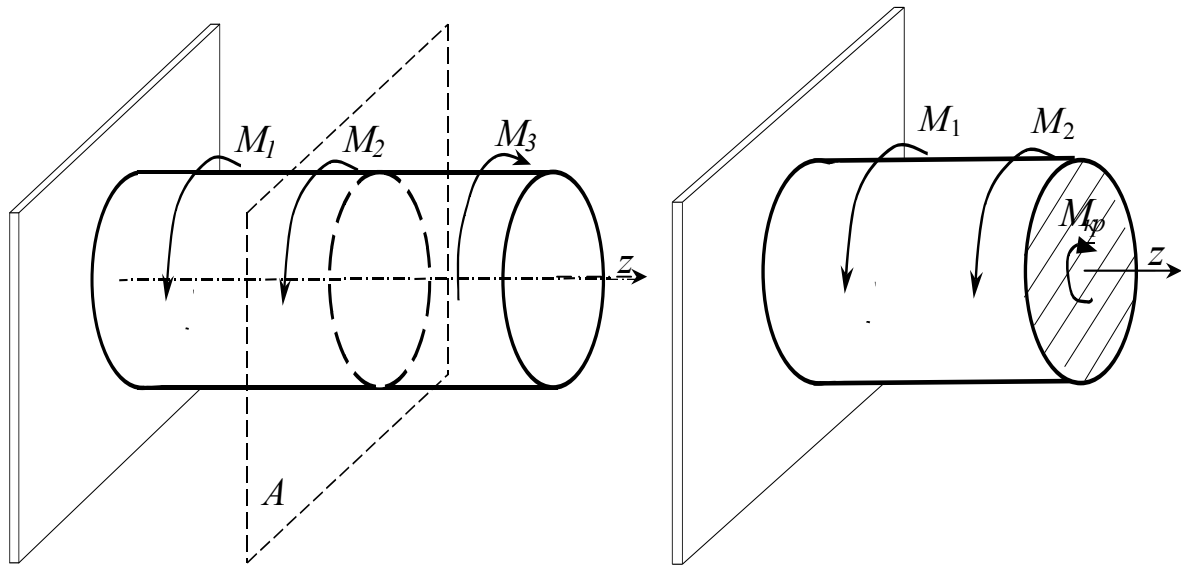


Рисунок 2.95

Зазначене правило знаків для крутних моментів узгоджене з класичним правилом теоретичної механіки, згідно з яким моменти сил відносно осі вважаються додатними, якщо, дивлячись з додатного напрямку цієї осі, можна побачити їх спрямованими проти ходу годинникової стрілки. Тож, крутні моменти мають такі самі знаки, як і моменти зовнішніх сил, яким вони дорівнюють. Так, на рисунку 2.95 моменти зовнішніх сил M_1 та M_2 , як і $M_{кр}$, зображені додатними, а M_3 – від’ємним.

Побудуємо епюру крутних моментів для вала, зображеного на рисунку 2.96 (приклад 2.14).

Розв’язання

1. Нехай величини зовнішніх моментів, прикладених до вала, дорівнюють за модулем: $M_1 = 50 \kappa H \cdot м$, $M_2 = 350 \kappa H \cdot м$, $M_3 = 300 \kappa H \cdot м$, $M_4 = 400 \kappa H \cdot м$, $M_5 = 200 \kappa H \cdot м$. Згідно з вказаним правилом моменти M_1, M_4 і M_5 є додатними, а моменти M_2 і M_3 – від’ємними.

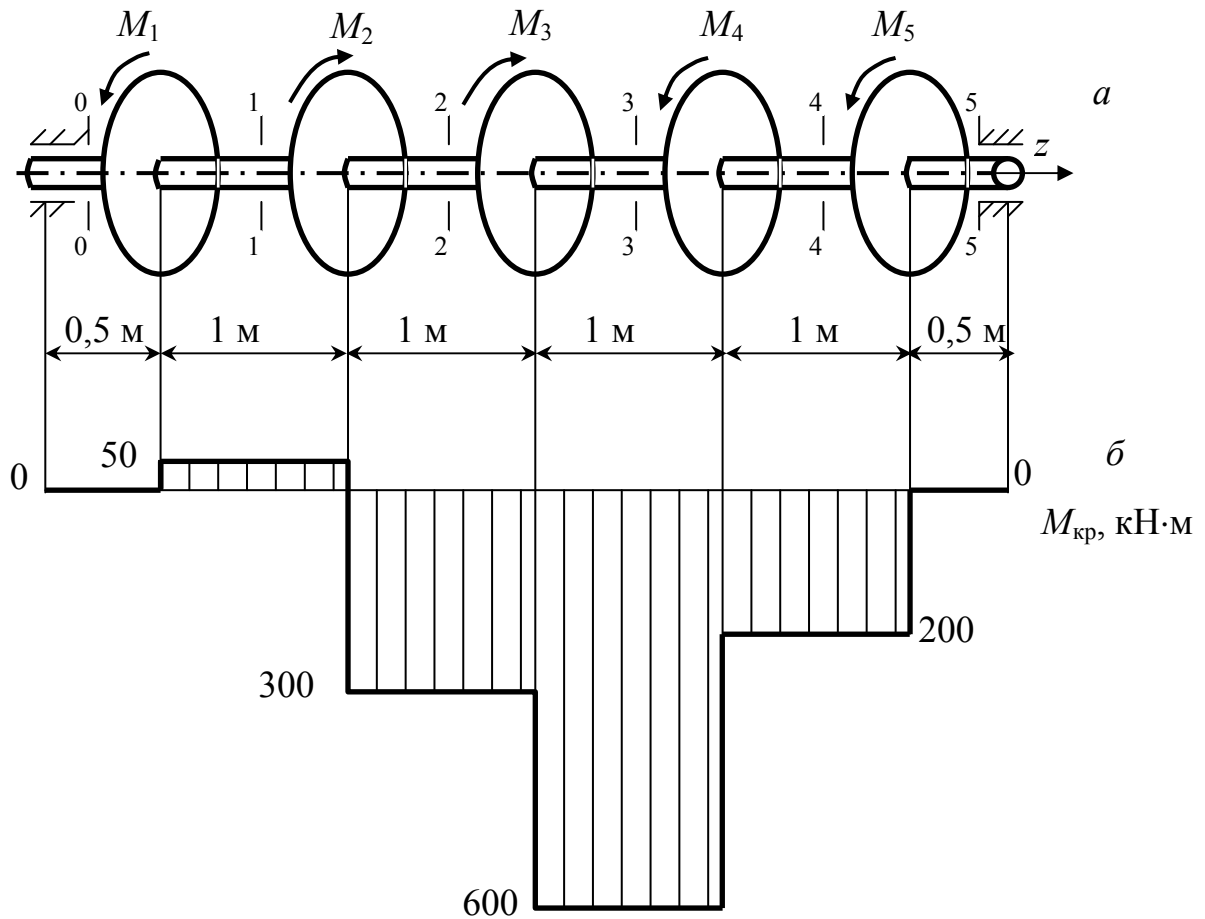


Рисунок 2.96

Розв'язання

2. Вал має шість ділянок з різними значеннями крутних моментів. Визначимо їх величини у довільних перерізах кожної з ділянок (див. рис. 2.96, а), тобто в перерізах 0–0, 1–1, 2–2, 3–3, 4–4 і 5–5:

$$M_{кр}^{0-0} = 0 ;$$

$$M_{кр}^{1-1} = M_1 = +50 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр}^{2-2} = M_1 - M_2 = +50 - 350 = -300 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр}^{3-3} = M_1 - M_2 - M_3 = +50 - 350 - 300 = -600 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр}^{4-4} = M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = +50 - 350 - 300 + 400 = -200 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр}^{5-5} = M_1 - M_2 - M_3 + M_4 + M_5 = +50 - 350 - 300 + 400 + 200 = 0 .$$

3. Зважаючи на те, що вказані перерізи вала є довільними, значення крутних моментів у цих перерізах розповсюдимо на всю довжину відповідних ділянок. Тоді вся епюра згинальних моментів буде складатись з горизонтальних прямолінійних ділянок. Побудована таким чином епюра крутних моментів зображена на рисунку 2.96,б. Порівнюючи її з епюрою подовжніх сил (див. рис.2.11), бачимо повну їх зовнішню схожість. Схожими є і процедури побудови цих епюр.

2.8.2 Напруження і деформації при крученні вала

При розрахунку вала на кручення вирішують дві основні задачі: визначають напруження, що виникають у його перерізах, і знаходять кутові переміщення залежно від зовнішніх моментів. Розв'язання цих задач істотно залежить від форми перерізу і являє велику складність для широкого класу тонкостінних стрижнів.

Зазначений розрахунок базується на *гіпотезі плоских перерізів*, в основу якої покладено припущення, що плоскі поперечні перерізи вала залишаються такими ж і при крученні, повертаючись один щодо іншого як жорстке ціле.

Досліди показують, що при скручуванні вала зовнішнім моментом M (рис. 2.97, а) подовжні прямі лінії на його поверхні перетворюються на гвинтові; радіуси на торцевому перерізі не скривлюються; відстані між перерізами практично не міняються, тобто перерізи 1-1 і 2-2 зберігають між собою відстань dz , повертаючись один щодо одного на кут закручування $d\varphi$.

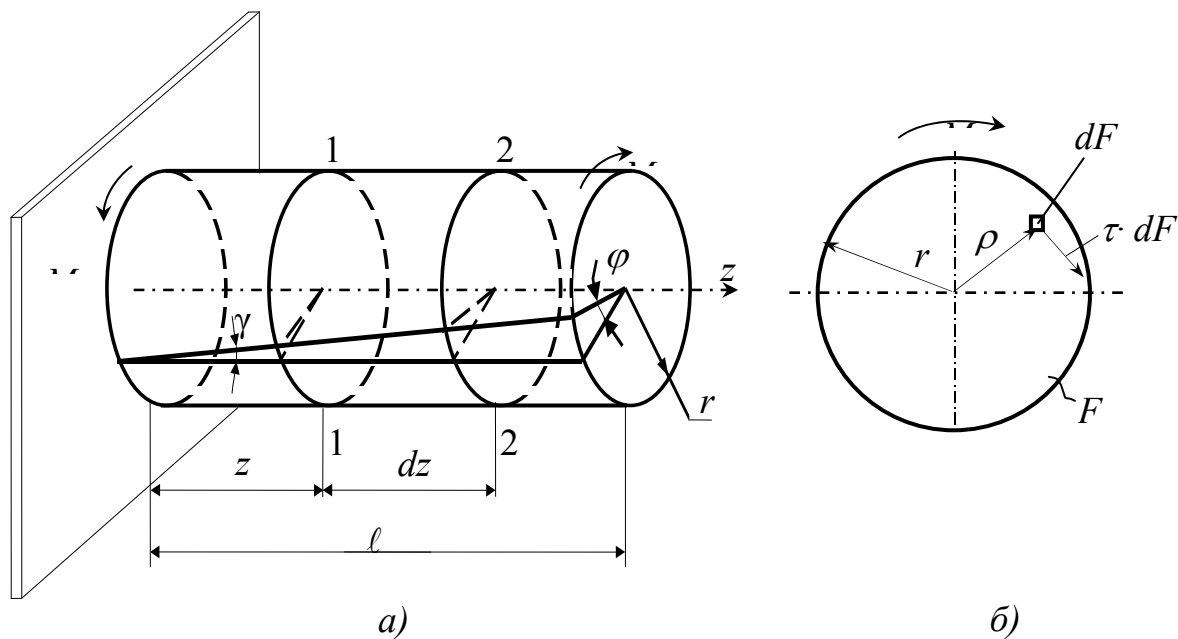


Рисунок 2.97

Крутний момент $M_{кр}$, який дорівнює зовнішньому моменту M , пов'язаний з величинами дотичних напружень τ у точках перерізу (рис. 2.97, б):

$$M_{кр} = \int_F \rho \cdot \tau \cdot dF \quad (2.147)$$

Для визначення величин τ виділимо з вала двома циліндровими поверхнями з радіусами ρ і $\rho+d\rho$ елементарне кільце довжиною dz (рис. 2.98).

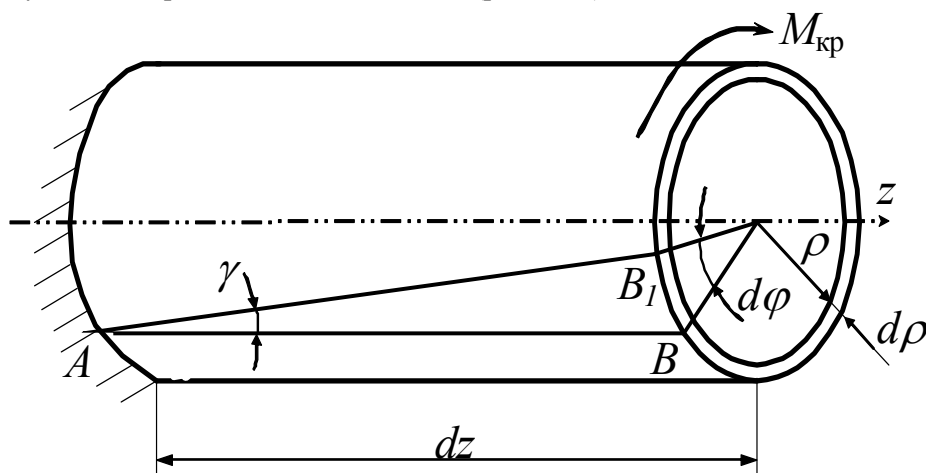


Рисунок 2.98

Правий торцевий переріз кільця (див. рис. 2.98) повертається при крученні відносно лівого на кут $d\varphi$. Пряма AB повертається при цьому на кут γ і, перетворюючись на гвинтову лінію, займає положення AB_1 . Довжина BB_1 дорівнює $\rho \cdot d\varphi$ або $\gamma \cdot dz$.

Отже,

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \quad (2.148)$$

Кут γ є кутом зсуву циліндрової поверхні. Величина $d\varphi / dz$ позначається зазвичай через θ і називається *відносним кутом закручування* або *кутом взаємного повороту двох перерізів*, віднесеним до відстані між ними:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}$$

Пов'яжемо кут γ з величиною τ законом Гука при зсуві (див. формулу (2.134)). Тоді з урахуванням (2.148) отримаємо:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \quad (2.149)$$

Підставивши (2.149) у вираз (2.147), маємо:

$$M_{кр} = \int_F G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho^2 \cdot dF$$

Оскільки величини G і $\frac{d\varphi}{dz}$ цього разу є константами, їх можна винести за знак інтеграла. Тоді

$$M_{кр} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_F \rho^2 \cdot dF = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot J_p \quad (2.150)$$

де J_p – полярний момент інерції перерізу вала.
Тепер із (2.150) визначимо величину θ :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \quad (2.151)$$

Підставимо (2.151) у (2.149). Остаточно маємо:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \cdot \rho.$$

Таким чином, дотичні напруження в поперечних перерізах вала розподілені уздовж радіуса за лінійним законом і мають найбільші значення на поверхні вала (при $\rho = r = d/2$):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{кр}}{W_p},$$

де

$$W_p = \frac{2 \cdot J_p}{d}$$

зветься *полярним моментом опору перерізу* вала.

Оскільки полярні моменти інерції J_p у кола і кільця вдвічі більші за осьові моменти інерції – J_x і J_y (див. пункт 2.3.3), то і полярні їх моменти опору в два рази більше за осьові (див. формули (2.94), 2.95)).

Для суцільного перерізу (див. рис. 2.73):

$$W_p = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot d^3, \quad (2.152)$$

для кільцевого перерізу (див. рис. 2.74):

$$W_p = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot (1 - c^4),$$

де $c = d_0 / d$ (див. формулу (2.96)).

Епюри дотичних напружень в означених перерізах зображені на рисунках 2.99, а і 2.99, б.

Звернемо увагу на те, що максимальні дотичні напруження діють також у подовжніх перерізах вала, які проходять через його вісь, бо це витікає із закону парності дотичних напружень (див. пункт 2.4.3). Взагалі, на поверхні вала має місце напружений стан чистого зсуву (див. пункт 2.7.2), схема якого зображена на рисунку 2.100. Чистий зсув діє і в глибинних шарах вала.

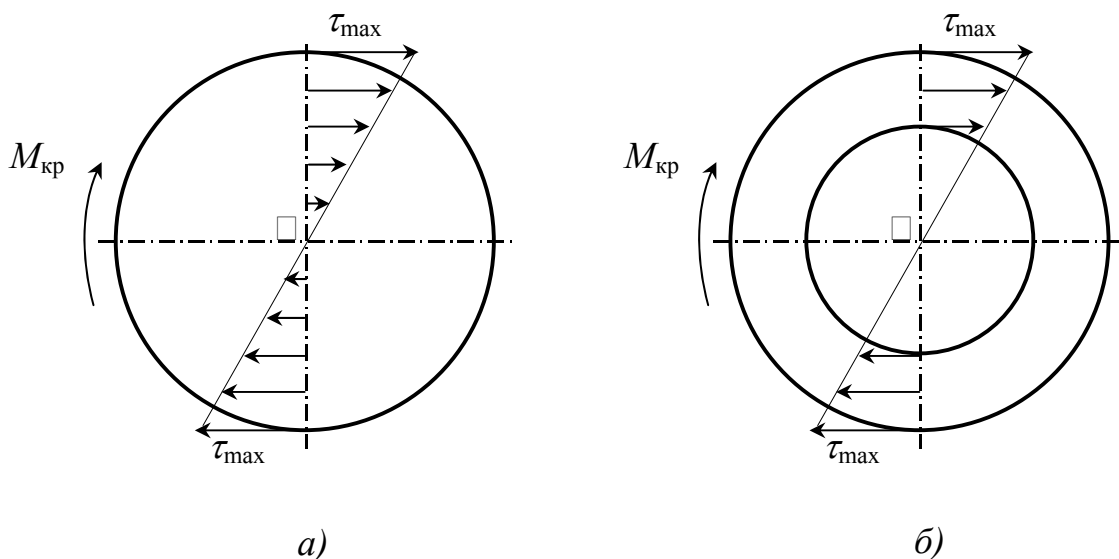


Рисунок 2.99

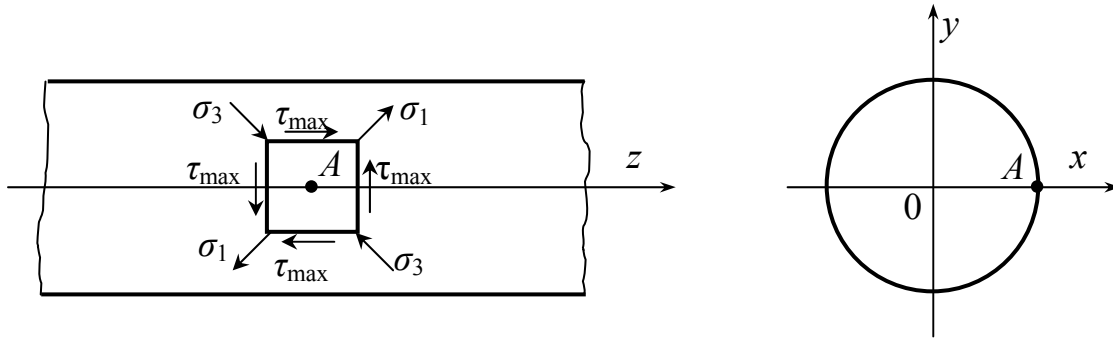


Рисунок 2.100

Повернемо тепер до виразу (2.151). Він дозволяє визначити повний кут закручування вала довжиною ℓ :

$$\varphi = \int_{\ell} \frac{M_{kp}}{G \cdot J_p} \cdot dz . \quad (2.153)$$

У разі, коли $M_{кр}$ за довжиною вала є незмінним (див. рис. 2.95) і коли жорсткість перерізу вала при крученні $G \cdot J_p$ також незмінна, вираз (2.153) спрощується:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{G \cdot J_p} \quad (2.154)$$

У випадку, коли вал має ступінчасту форму і (або) різні значення $M_{кр}$ на окремих ділянках, формулу (2.154) використовують для кожної ділянки, після цього визначені кути закручування підсумовують з урахуванням їх напрямків.

2.8.3 Умови міцності й жорсткості при крученні. Приклади розв'язання задач

Вали, що не несуть поперечних навантажень (наприклад, карданні вали і, так звані, півосі автомобілів, штанги бурових установок, свердла та ін.) розраховують на міцність і жорсткість. Поперечні навантаження, що спричиняються елементами механічних передач, закріпленими на валах, до кручення додають згини у різних площинах і значно ускладнюють розрахунки.

Умова міцності вала має вигляд

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_{кр}}{W_p} \right|_{\max} \leq [\tau] \quad (2.155)$$

де τ_{\max} – найбільше дотичне напруження в об'ємі вала;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження (див. формули (2.140), (2.142)).

Умова жорсткості обмежує відносний кут закручування вала:

$$\theta_{\max} = \left| \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \right|_{\max} \leq [\theta] \quad (2.156)$$

де θ_{\max} – найбільший відносний кут закручування за довжиною вала;

$[\theta]$ – допустимий відносний кут закручування, що залежить від характеру навантаження вала..

Вважається прийнятним при статичному навантаженні: $[\theta] \approx 0,005$ рад/м (0,29 град/м), при змінному: $[\theta] \approx 0,004$ рад/м (0,23 град/м), при ударному: $[\theta] \approx 0,003$ рад/м (0,17 град/м).

Практичні розрахунки валів на міцність і жорсткість розглянемо на таких прикладах.

Приклад 2.15. Підібрати діаметр суцільного сталюого вала (див. рис. 2.96, а) і визначити повний кут його закручування, прийнявши:
 $[\tau] = 120 \text{ МПа}$, $[\theta] = 0,005 \text{ рад/м}$, $G = 8 \times 10^4 \text{ МПа}$.

Розв'язання

1. З епюри крутних моментів (див. рис. 2.96,б) знаходимо максимальне за модулем значення

крутного моменту: $M_{кр}^{\max} = 600 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

2. З умови міцності (2.155) і з урахуванням виразу для W_p (2.152) визначаємо потрібний діаметр вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{\frac{1}{16} \pi \cdot d^3} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 120}} = 294 \text{ мм.}$$

3. Оскільки довжини всіх ділянок вала, де $M_{кр} \neq 0$, однакові (див. рис. 2.96, а), бачимо, що відносний кут закручування вала θ буде найбільшим саме на ділянці дії $M_{кр}^{\max}$. З урахуванням цього, використовуючи умову жорсткості (2.156) і враховуючи вирази для J_p (2.22, 2.24) вдруге визначаємо потрібний діаметр вала:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{G \cdot \frac{1}{32} \pi \cdot d^4} \leq [\theta]$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 600 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,005 \cdot 10^{-3}}} = 352 \text{ мм.}$$

4. Як бачимо, потрібне значення діаметра з умови жорсткості виявилось більшим. Тому з відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) остаточно приймаємо $d = 360 \text{ мм}$.

5. Визначаємо повний кут закручування вала.

На рисунку 2.98 видно, що напрям закручування вала співпадає з напрямком крутного моменту, який спричиняє це закручування. Оскільки закручування може відбуватись або за ходом годинникової стрілки, або проти цього ходу, треба в розрахунку розрізняти означені напрямки. Тому будемо вважати кути закручування додатними, якщо вони спричинені додатними крутними моментами (див. пункт 2.8.1), і від'ємними, якщо крутні моменти від'ємні.

Наш вал (див. рис. 2.96, а) має шість характерних ділянок з різними величинами $M_{кр}$. Крайні ліва і права ділянки вала (нульова і п'ята) не мають крутних моментів, тому $\varphi_0 = \varphi_5 = 0$. На ділянці 1 крутний момент додатний, тож і $\varphi_1 > 0$. На ділянках 2, 3 і 4 крутні моменти від'ємні (див. рис. 2.96, б), тому $\varphi_2 < 0$, $\varphi_3 < 0$ і $\varphi_4 < 0$.

Визначимо величини вказаних кутів закручування, використовуючи формулу (2.154), у якій під $M_{кр}$ будемо розуміти крутний момент на тій чи іншій ділянці, а під ℓ – довжину цієї ділянки ($\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 1 \text{ м}$). Таким чином:

$$\varphi_1 = \frac{M_{кр}^{1-1} \cdot \ell_1}{G \cdot J_p} = + \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = +3,790 \cdot 10^{-4} \text{ рад. (+0,02 град);}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{кр}^{2-2} \cdot \ell_2}{G \cdot J_p} = -\frac{300 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = -2,274 \cdot 10^{-3} \text{ рад. } (-0,130 \text{ град});$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{кр}^{3-3} \cdot \ell_3}{G \cdot J_p} = -\frac{600 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = -4,548 \cdot 10^{-3} \text{ рад. } (-0,261 \text{ град});$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{кр}^{4-4} \cdot \ell_4}{G \cdot J_p} = -\frac{200 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{32} \cdot 3,14 \cdot 360^4} = -1,516 \cdot 10^{-3} \text{ рад. } (-0,087 \text{ град}).$$

Повний кут закручування вала визначимо як алгебраїчну суму кутів закручування на всіх його ділянках:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 0 + 3,790 \times 10^{-4} - 2,274 \times 10^{-3} - 4,548 \times 10^{-3} - 1,516 \times 10^{-3} + 0 = -7,955 \times 10^{-3} \text{ рад. } (-0,456 \text{ град}).$$

Отриманий результат свідчить про те, що вал є закрученим проти ходу годинникової стрілки майже на 0,5 градуса.

Приклад 2.16. Бурова штанга, що має форму труби з зовнішнім діаметром $d = 100$ мм і внутрішнім $d_0 = 60$ мм, обертається з частотою $n = 120$ об/хв. Визначити максимально допустиму потужність приводу штанги, якщо $[\tau] = 80$ МПа, $[\theta] = 0,20$ град/м, $G = 8 \times 10^4$ МПа.

Розв'язання

1. Визначимо параметри штанги, потрібні для подальшого розрахунку:

$$c = \frac{d_0}{d} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 100^4 \cdot (1 - 0,6^4)}{32} = 8,541 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$[\theta] = 0,20 \cdot \frac{3,14}{180} = 3,489 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = 3,489 \times 10^{-6} \text{ рад/мм.}$$

2. З умови жорсткості (2.156) визначаємо максимально допустиму величину крутного моменту:

$$M_{кр}^{\max} = [\theta] \cdot G \cdot J_p = 3,489 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 8,541 \cdot 10^6 = 238,396 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{мм}, \text{ або}$$

$$M_{кр}^{\max} = 2,384 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

3. Перевіряємо штангу на міцність:

$$W_p = \frac{J_p}{0,5 \cdot d} = \frac{8,541 \cdot 10^6}{0,5 \cdot 100} = 17,082 \cdot 10^4 \text{ мм}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{W_p} = \frac{2,384 \cdot 10^6}{17,082 \cdot 10^4} = 13,956 \text{ МПа.}$$

Величина τ_{\max} не перевищує $[\tau]$, тож міцність штанги забезпечена.

4. Визначаємо максимально допустиму потужність приводу штанги, використовуючи формулу (2.146):

$$K_{\max} = M_{кр}^{\max} \cdot \frac{1}{30} \cdot \pi \cdot n = 2,384 \cdot \frac{1}{30} \cdot 3,14 \cdot 120 = 29,943 \text{ кВт.}$$

2.9 Переміщення в балках при плоскому згині

2.9.1 Потенційна енергія пружної деформації стрижнів

Розглянувши розтягання-стискання, зсув і кручення, ми отримали достатньо прості формули для визначення відповідних деформацій стрижнів. Для згинання таких формул не існує. У цьому разі переміщення (лінійні та кутові) як в окремому стрижні, так і в стрижневих конструкціях залежать від схеми зовнішнього навантаження і в кожному конкретному випадку визначаються за допомогою універсальних енергетичних методів, в яких мірою пружної деформації є величина потенційної енергії, накопиченої в деформованому тілі.

При навантаженні пружного тіла зовнішніми силами точки прикладення цих сил переміщуються і сили виконують певну роботу. Ліва її частка перетворюється на потенційну енергію пружної деформації, що зберігається в тілі. Решта означеної роботи перетворюється на кінетичну енергію, яку отримують частинки тіла при їх переміщенні, також на теплову енергію, котра розсіюється в просторі.

При повільному (статичному) навантаженні втрати роботи зовнішніх сил незначні й ними зазвичай нехтують, вважаючи, що вся робота цих сил – $A^{(e)}$ перетворюється на потенційну енергію пружної деформації – Π :

$$\Pi = A^{(e)}.$$

Оскільки переміщення точок прикладення зовнішніх сил попередньо не відомі (саме їх і треба визначити), підрахувати величину Π через $A^{(e)}$ неможливо. Тому використовують інший підхід, у основі якого лежить метод перерізів, розглянутий у пункті 2.1.3.

Реалізуючи цей підхід, виділимо із довільно навантаженого стрижня довжиною ℓ на ділянці, де нема зовнішніх сил, подовжній елемент довжиною dz (рис. 2.101).

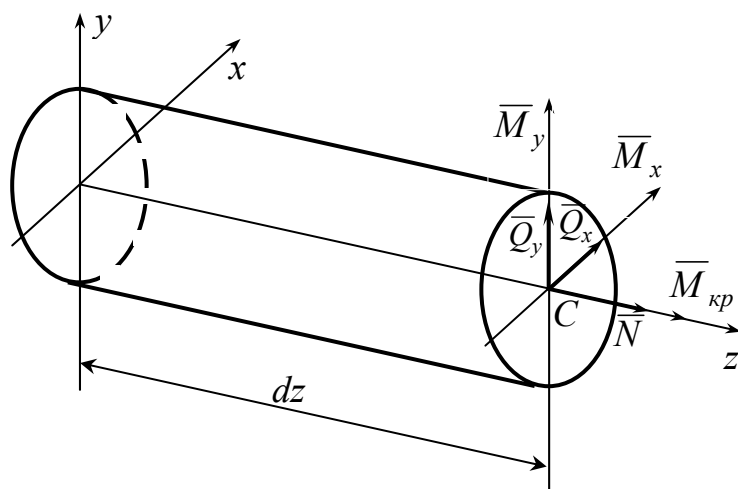


Рисунок 2.101

У правому (видимому) перерізі виділеного елемента згідно з методом перерізів діють три сили – \bar{N} , \bar{Q}_x і \bar{Q}_y і три моменти – \bar{M}_x , \bar{M}_y і $\bar{M}_{кр}$. У лівому (невидимому) перерізі діють такі ж за величиною, але протилежні за напрямком сили фактори (вони на рис. 2.101 не показані). У відношенні до стрижня в цілому вони є внутрішніми, а у відношенні до виділеного елемента – зовнішніми.

У ненавантаженому стані стрижня потенційна енергія пружної деформації елемента $d\Pi$ дорівнює нулю. Разом з нею дорівнюють нулю і означені сили фактори. У процесі навантаження зростає величина $d\Pi$, а разом з нею зростають і усі сили фактори, прикладені до виділеного елемента. Зважаючи на це, будемо умовно вважати, що саме вони деформують виділений елемент. Їх роботу позначимо як dA . Для визначення величини цієї роботи умовно закріпимо лівий переріз елемента. Тоді вся робота з деформування елемента буде результатом дії силових факторів, зображених у його правому перерізі (див. рис. 2.101). Таким чином, потенційна енергія пружної деформації цього елемента дорівнюватиме:

$$d\Pi = dA = dA(\bar{N}) + dA(\bar{Q}_x) + dA(\bar{Q}_y) + dA(\bar{M}_x) + dA(\bar{M}_y) + dA(\bar{M}_{кр}). \quad (2.157)$$

Слід зауважити, що всі означені сили фактори зростають разом із зовнішнім навантаженням від нуля до своїх остаточних значень пропорційно відповідним деформаціям елемента. Тому згідно з вже згаданою **теоремою Клапейрона** (див. пункт 2.4.4) робота кожного із силових факторів буде дорівнювати половині добутку кінцевої величини цього фактора на кінцеве переміщення від його дії.

Для подовжньої сили (рис. 2.102):

$$dA(\bar{N}) = \frac{1}{2} \cdot N \cdot d(dz).$$

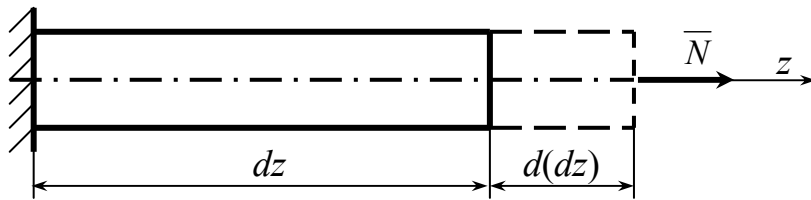


Рисунок 2.102

Величину $d(dz)$ визначимо за аналогією з $\Delta \ell$ для всього стрижня:

$$d(dz) = \frac{N \cdot dz}{E \cdot F}.$$

Тоді

$$dA(\bar{N}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot dz}{E \cdot F}. \quad (2.158)$$

Поперечні сили \bar{Q}_x і \bar{Q}_y визивають появу в перерізі елемента дотичних напружень відповідних напрямків. Якщо вважати розподіл цих напружень по площі перерізу рівномірним, як в разі чистого зсуву, роботу кожної з поперечних сил можна визначити таким чином (рис. 2.103):

$$dA(\bar{Q}) = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot dS.$$

Згідно з законом Гука при зсуві (див. пункт 2.7.2):

$$dS = \frac{Q \cdot dz}{G \cdot F}.$$

Тоді

$$dA(\bar{Q}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 \cdot dz}{G \cdot F}.$$

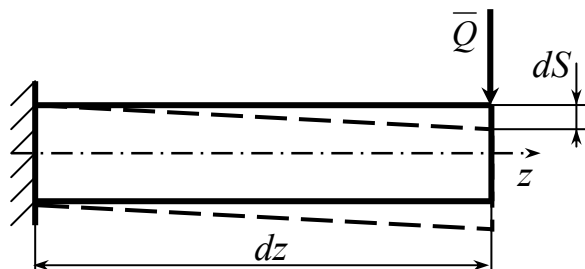


Рисунок 2.103

У дійсності розподіл дотичних напружень по площі перерізу не є рівномірним, тому до виразів для $dA(\bar{Q}_x)$ і $dA(\bar{Q}_y)$ вводять поправкові коефіцієнти k_x і k_y , що враховують форму перерізу. Тоді остаточно:

$$dA(\bar{Q}_x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_x \cdot Q_x^2 \cdot dz}{G \cdot F}, \quad (2.159)$$

$$dA(\bar{Q}_y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_y \cdot Q_y^2 \cdot dz}{G \cdot F}. \quad (2.160)$$

Величини k_x і k_y є табличними, мало відмінними від одиниці. Так, в разі прямокутного перерізу вони дорівнюють 6/5, в разі круглого – 32/27.

Роботу згинальних моментів \bar{M}_x і \bar{M}_y визначимо таким чином (рис. 2.104):

$$dA(\bar{M}) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta.$$

Взаємний кут повороту перерізів $d\theta$ (див. рис. 2.104) знайдемо з умови незмінності довжини нейтрального шару волокон:

$$dz = \rho \cdot d\theta.$$

Звідси

$$d\theta = dz \cdot \frac{1}{\rho} = dz \cdot \frac{M}{E \cdot J_{oc}},$$

де ρ – радіус кривизни нейтрального шару (див. пункт 2.6.3);
 J_{oc} – осьовий момент інерції перерізу елемента.

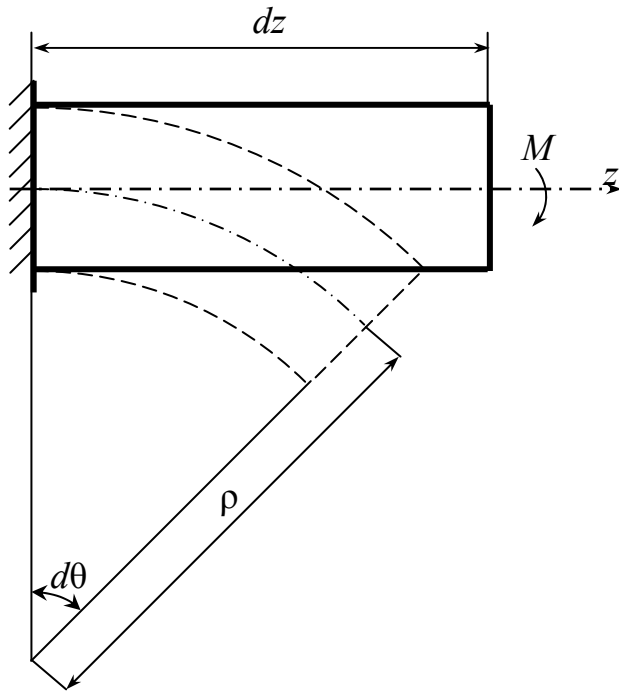


Рисунок 2.104

Остаточно з урахуванням індексів маємо:

$$dA(\bar{M}_x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2 \cdot dz}{E \cdot J_x}, \quad (2.161)$$

$$dA(\bar{M}_y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_y^2 \cdot dz}{E \cdot J_y}. \quad (2.162)$$

Роботу крутного моменту $\bar{M}_{кр}$ визначимо через кут закручування елемента $d\varphi$ (рис. 2.105):

$$dA(\bar{M}_{кр}) = \frac{1}{2} \cdot M_{кр} \cdot d\varphi.$$

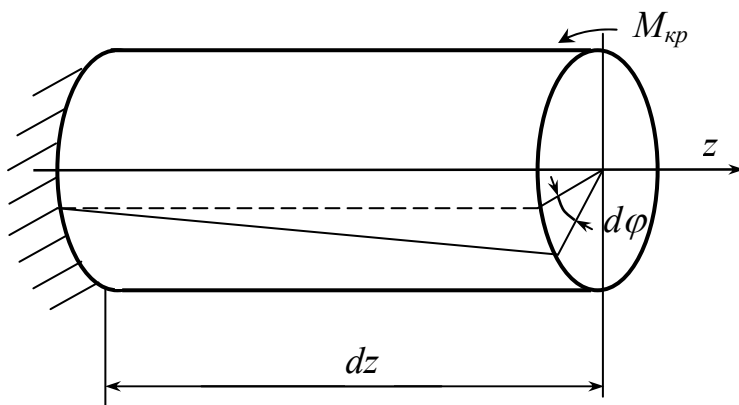


Рисунок 2.105

Величина $d\varphi$ визначається за формулою (2.151):

$$d\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \cdot dz}{G \cdot J_p}.$$

Таким чином,

$$dA(\overline{M}_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{\text{кр}}^2 \cdot dz}{G \cdot J_p}. \quad (2.163)$$

Підставивши вирази (2.158), (2.159), (2.160), (2.161), (2.162) і (2.163) у формулу (2.157), отримаємо:

$$d\Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \cdot dz}{E \cdot F} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k_x \cdot Q_x^2 \cdot dz}{G \cdot F} + \frac{1}{2} \cdot \frac{k_y \cdot Q_y^2 \cdot dz}{G \cdot F} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_y^2 \cdot dz}{E \cdot J_y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{\text{кр}}^2 \cdot dz}{G \cdot J_p}, \quad (2.164)$$

де E і G – відповідно модулі пружності першого і другого роду;

F – площа поперечного перерізу елемента;

J_x, J_y – осеві моменти інерції перерізу;

J_p – полярний момент інерції перерізу.

Проінтегруємо вираз (2.164) за довжиною стрижня ℓ , отримаємо формулу для підрахунку кількості потенційної енергії пружної деформації у всьому стрижні:

$$\Pi = \int_{\ell} d\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{N^2 \cdot dz}{E \cdot F} + \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{k_x \cdot Q_x^2 \cdot dz}{G \cdot F} + \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{k_y \cdot Q_y^2 \cdot dz}{G \cdot F} + \\ + \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{M_x^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} + \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{M_y^2 \cdot dz}{E \cdot J_y} + \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{M_{\text{кр}}^2 \cdot dz}{G \cdot J_p}. \quad (2.165)$$

Якщо конструкція складається з декількох стрижнів, її потенціальна енергія пружної деформації є сумою потенційних енергій усіх стрижнів, підрахованих за формулою (2.165).

Зазначена формула придатна для будь-якого варіанта навантаження стрижня. У ній не всі складові рівнозначні. Так, потенційна енергія від дії подовжньої і поперечних сил істотно менша, ніж від дії згинальних і крутного моментів.

При плоскому згині у вертикальній площині (yz) потенційну енергію балок визначають за

спрощеною формулою, яка не враховує вклад поперечної сили \overline{Q}_y :

$$\Pi = \int_{\ell} \frac{M_x^2 \cdot dz}{E \cdot J_x}. \quad (2.166)$$

Ця формула застосовується і для плоских рам. У фермах, де стрижні працюють на розтягання-стискання, при підрахунку величини Π беруть до уваги першу складову у формулі (2.165).

2.9.2 Теорема Кастільяно

Зв'язок потенційної енергії пружної деформації з переміщеннями в пружних тілах встановлює теорема, сформульована італійським вченим **К. А. Кастільяно** (1847–1884): *частинна похідна від потенційної енергії пружної деформації тіла за узагальненою силою дорівнює переміщенню точки прикладання цієї сили в напрямку її дії*. Тут під узагальненою силою розуміється або звичайна сила (P), або момент пари сил (M), а під переміщенням точки прикладення узагальненої сили – те переміщення (лінійне або кутове), на якому ця сила виконує роботу.

У якості доведення зазначеної теореми наведемо такі міркування.

Умовимося під переміщенням точки прикладення узагальненої сили в напрямку її дії будемо розуміти як проєкцію повного переміщення цієї точки на напрямок зазначеної сили.

Розглянемо балку, навантажену системою зосереджених сил P_1, P_2, \dots, P_n . Під дією цих сил балка прогнеться за кривою I і залишиться в рівновазі (рис. 2.106, а).

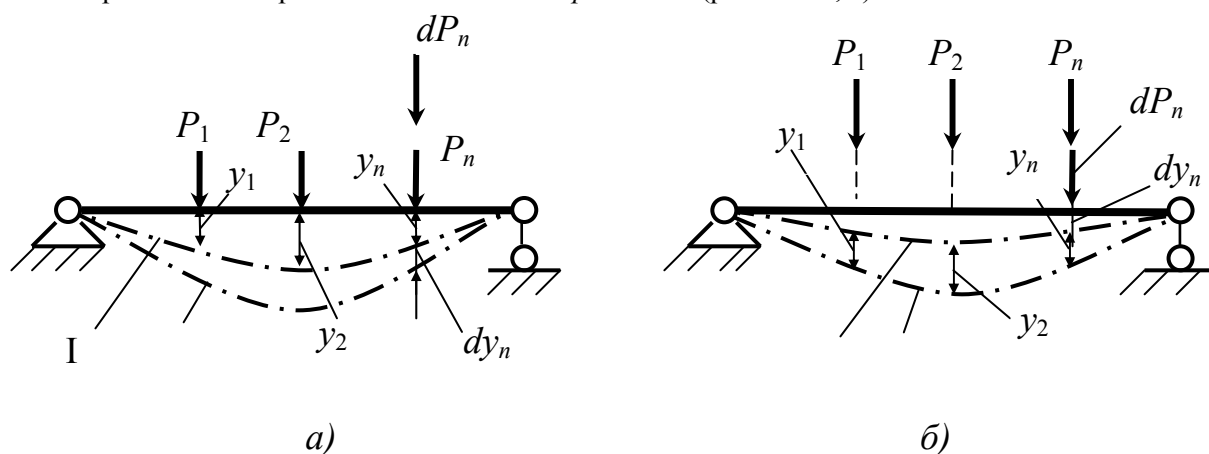


Рисунок 2.106

Необхідно визначити переміщення y_n . Для цього переведемо балку із стану I в стан II шляхом додавання до балки безкінечно малої силової добавки dP_n . Зміна роботи при переході зі стану I в стан II дорівнює зміні потенційної енергії балки:

$$A_{II} - A_I = d\Pi \quad (2.167)$$

Робота в I стані:

$$A_I = \frac{1}{2} P_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot y_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n \cdot y_n$$

Для визначення роботи в II стані спочатку прикладемо до балки силу dP_n , в результаті чого балка небагато прогнеться та обійме стан III (рис. 2.106, б), а потім навантажимо балку статично прикладеними силами P_1, P_2, \dots, P_n . При такій послідовності навантаження до початкових прогинів dy_1, dy_2, \dots, dy_n , спричинених силою dP_n , додадуться прогини y_1, y_2, \dots, y_n від сил P_1, P_2, \dots, P_n . Тоді робота в II стані буде такою:

$$A_{II} = \frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n + \frac{1}{2} P_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot y_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n \cdot y_n + dP_n \cdot y_n \quad (2.168)$$

У виразі (2.168) остання складова узятя без коефіцієнта $\frac{1}{2}$ тому, що при здійсненні роботи силами P_1, P_2, \dots, P_n сила dP_n вже знаходиться на балці і не міняється.

Потенційна енергія балки Π є функцією всіх сил. Але оскільки в цьому випадку змінюється тільки сила P_n , то зміна потенційної енергії $d\Pi$ дорівнює:

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} \cdot dP_n$$

Підставивши A_1 , A_{II} і $d\Pi$ у вираз (2.167), одержимо:

$$\frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n + dP_n \cdot y_n = \frac{\partial \Pi}{\partial P_n} \cdot dP_n$$

$$\frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n$$

Відкидаючи у виразі (2.171) величину $\frac{1}{2} dP_n \cdot dy_n$ як малу другого порядку і скорочуючи обидві частини рівняння на dP_n , остаточно маємо:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_n} = y_n$$

У загальному випадку пружного тіла доцільніше замінити y_n на δ_n , бо напрямок узагальненої сили P_n може бути будь-яким, не обов'язково вертикальним. Цього разу

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_n} = \delta_n$$

де δ_n – переміщення точки прикладення сили P_n у напрямку її дії.

Слід зауважити, що практичне застосування теореми Кастільяно вельми обмежене, бо вона дозволяє визначати переміщення лише в тих точках пружних тіл, де прикладені зосереджені сили або моменти пар сил. Так, зокрема, з її допомогою можна визначити прогин балки (рис. 2.107) в точці A і кут повороту перерізу A (приклад 2.17).

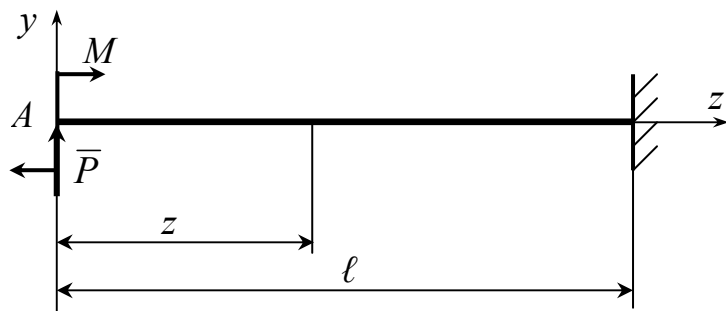


Рисунок 2.107

Розв'язання

У даному випадку згинальний момент у перерізах балки дорівнює:

$$M_x = M + P \cdot z$$

Потенційна енергія пружної деформації балки згідно з формулою (2.166) буде такою:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{M_x^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\ell} \frac{(M + P \cdot z)^2 \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{2E \cdot J_x} \times \\ &\times \int_{\ell} (M^2 + 2 \cdot M \cdot P \cdot z + P^2 \cdot z^2) \cdot dz = \\ &= \frac{1}{2E \cdot J_x} \cdot (M^2 \cdot \ell + M \cdot P \cdot \ell^2 + \frac{1}{3} \cdot P^2 \cdot \ell^3) \end{aligned}$$

Прогин балки в точці A (δ_A) – це переміщення точки прикладення сили \bar{P} у напрямку її дії. Тому

$$\delta_A = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{1}{2E \cdot J_x} \cdot \left(M \cdot \ell^2 + \frac{2}{3} P \cdot \ell^3 \right).$$

Кут повороту перерізу A (θ_A) – це кутове переміщення навколо точки прикладення моменту M . Тому

$$\theta_A = \frac{\partial \Pi}{\partial M} = \frac{1}{2E \cdot J_x} \cdot (2M \cdot \ell + P \cdot \ell^2).$$

Напрямки знайдених переміщень показані на рисунку 2.108.

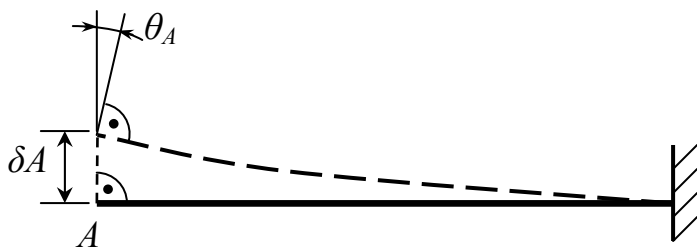


Рисунок 2.108

2.9.3 Метод Мора

Теорема Кастільяно в практиці інженерних розрахунків використовується вкрай рідко, бо не дозволяє визначати переміщення у точках конструкцій, де нема прикладених сил і моментів. Вона є непринятною також на ділянках з поділеним навантаженням. Цей недолік повною мірою виправляє метод, запропонований **О. Х. Мором**, не раз згаданим у попередніх розділах. Розглянемо його логіку. Нехай, наприклад, потрібно визначити вертикальне переміщення балки (рис. 2.109) в точці A , де відсутня зовнішня сила.

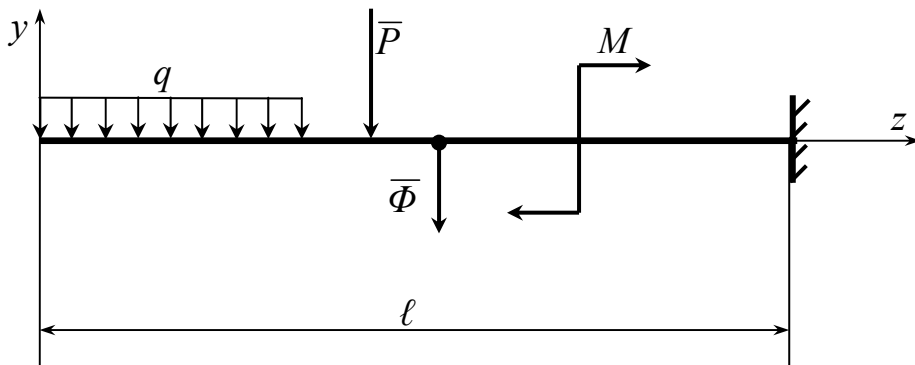


Рисунок 2.109

Згідно з Мором, для застосування в цьому випадку теореми Кастільяно треба прикласти до балки в точці A фіктивну силу $\bar{\Phi}$ вертикального напрямку і на деякий час забути, що цієї сили в дійсності нема ($\Phi = 0$).

Згинальний момент у перерізах балки при цьому буде дорівнювати:

$$M_x = M_p + \bar{M} \cdot \Phi,$$

де M_p – згинальний момент від реального навантаження;

\bar{M} – згинальний момент від одиничної сили $\Phi = 1$.

Вираз для потенціальної енергії пружної деформації балки в цьому випадку буде таким:

$$\Pi = \int_{\ell} \frac{M_x^2 \cdot dz}{2E \cdot J_x} = \int_{\ell} \frac{(M_p + \bar{M} \cdot \Phi)^2 \cdot dz}{2E \cdot J_x}.$$

Застосувавши теорему Кастільяно, маємо:

$$\delta_A = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi} = \int_{\ell} \frac{2 \cdot (M_p + \bar{M} \cdot \Phi) \cdot (0 + \bar{M}) \cdot dz}{2E \cdot J_x}.$$

А тепер згадаємо, що $\Phi = 0$, і остаточно отримаємо:

$$\delta A = \int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x}. \quad (2.169)$$

Вираз (2.169) зветься інтегралом Мора. У довільному випадку навантаження стрижнів подібних інтегралів шість, за кількістю складових у формулі для потенційної енергії пружної деформації (2.165).

Таким чином, суть метода Мора полягає в такому.

Для визначення лінійного переміщення в стрижні, зокрема в балці, що перебуває у стані плоского згину, треба прикласти в заданій точці одиничну силу $P = 1$ заданого напрямку,

визначити залежність згинального моменту від цієї сили – $\bar{M}(z)$, також залежність $M_p(z)$ і підрахувати значення інтеграла (2.169).

У разі, коли треба визначити кутове переміщення в стрижні, замість одиничної сили слід прикласти одиничний момент $M = 1$ і виконати такі самі дії.

Процедуру визначення переміщень методом Мора проілюструємо таким прикладом.

Приклад 2.18. Для консольної балки, зображеної на рисунку 2.110, визначити переміщення точки A і кут повороту перерізу A , якщо відомі значення E, J_x, q, ℓ .

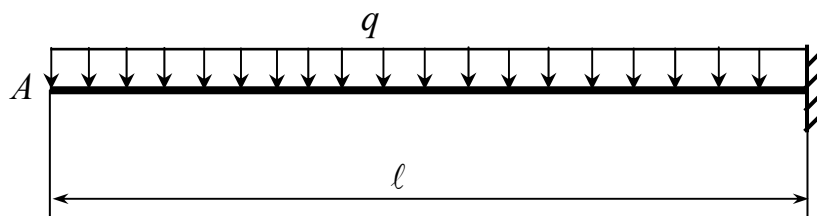


Рисунок 2.110

Розв'язання

1. Будуємо епюри згинальних моментів: від заданого навантаження – M_p , одиничної сили – \bar{M}_1 і одиничного моменту – \bar{M}_2 ; визначаємо залежності цих моментів від координати z (рис. 2.111).

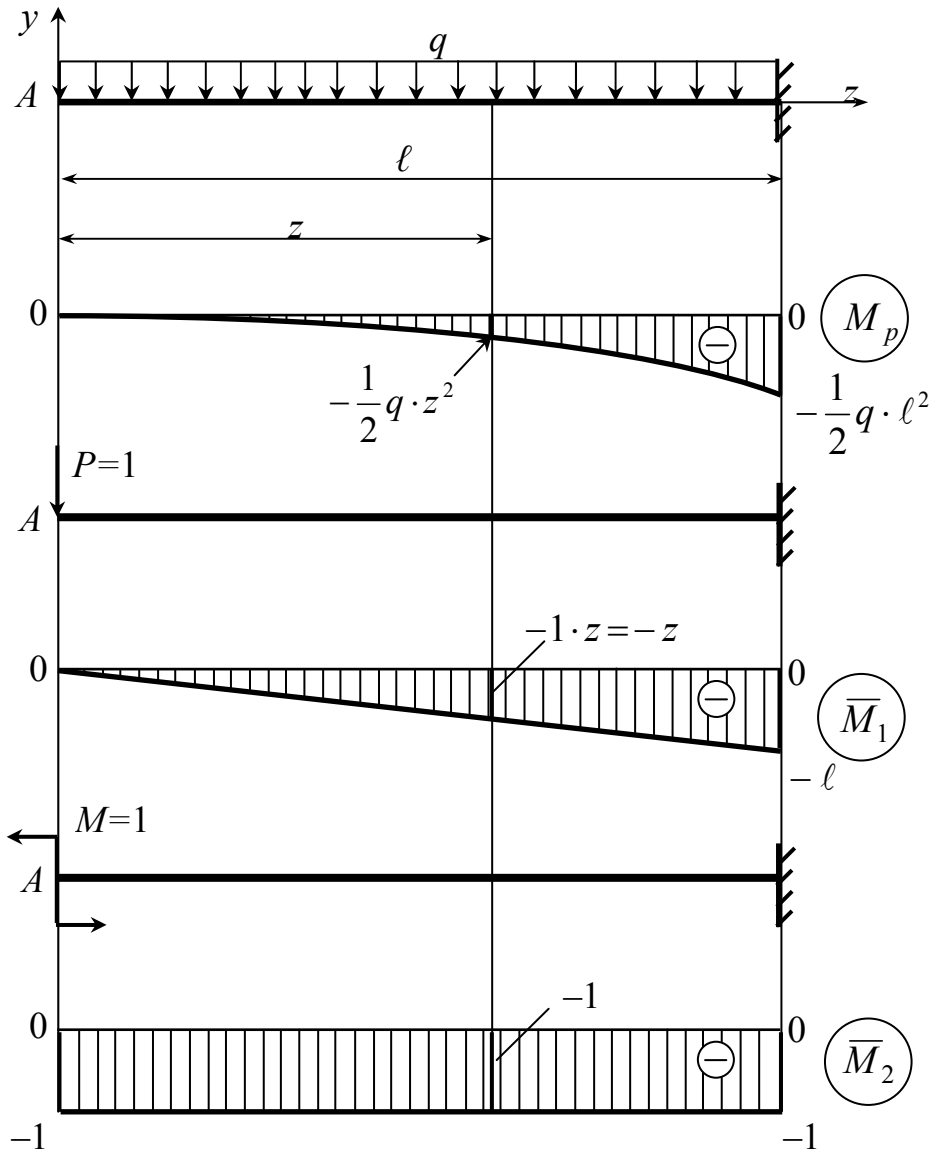


Рисунок 2.111

2. За допомогою відповідного інтеграла Мора визначаємо переміщення точки A балки:

$$\delta A = \int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M}_1 \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_{\ell} \left(-\frac{1}{2} q \cdot z^2\right) \cdot (-z) \cdot dz = \frac{q \cdot \ell^4}{8E \cdot J_x}.$$

3. Аналогічно визначаємо кут повороту перерізу A :

$$\theta_A = \int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M}_z \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_{\ell} \left(-\frac{1}{2} q \cdot z^2\right) \cdot (-1) \cdot dz = \frac{q \cdot \ell^3}{6E \cdot J_x}.$$

Звернемо увагу на те, що величини δA і θ_A є додатними. Це означає, що вказані переміщення спрямовані в напрямку відповідних одиничних силових факторів, а саме: δA – униз, θ_A – проти ходу годинникової стрілки.

Як бачимо, прямий підрахунок інтегралів Мора (за допомогою формул інтегрального числення) не є складним в разі, коли, так звана, вантажна епюра M_p має одну ділянку. У разі, коли цих ділянок декілька, процес підрахунку суттєво ускладнюється і пряме інтегрування замінюється чисельним, тобто застосуванням *правила Верещагіна* і так званої *формули крайніх ординат*.

2.9.4 Правило Верещагіна

На прямолінійних ділянках балок і стрижнів рам з постійною за їх довжиною (ℓ) жорсткістю перерізу ($E \cdot J_x$) епюри згинальних моментів від одиничних силових факторів (\bar{M}) завжди лінійні. Вантажна епюра (M_p) може бути при цьому як лінійною, так і нелінійною.

У зазначеному випадку інтеграл Мора (2.169) може бути підрахованим на кожній з ділянок без застосування прийомів інтегрування:

$$\int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h_2, \quad (2.170)$$

де Ω_1 – площа вантажної епюри (M_p);

h_2 – висота одиничної епюри (\bar{M}) під центром ваги епюри вантажної (рис. 2.112).

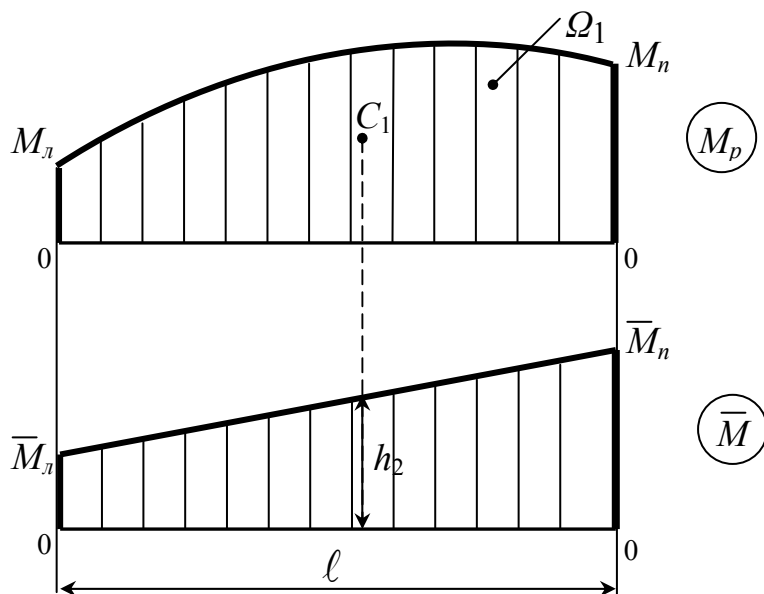


Рисунок 2.112

Означений методичний підхід є наслідком правила, сформульованого в 1925 році тоді ще студентом-залізничником **А. Н. Верещагіним** (1896–1959): *інтеграл добутку двох функцій, хоча б одна з яких лінійна, дорівнює добутку площі епюри першої функції на ординату епюри другої (лінійної) функції, що знаходиться під центром ваги епюри першої функції.*

Пересвідчимося у справедливості зазначеного ствердження.

Нехай, наприклад, необхідно обчислити інтеграл на ділянці довжиною ℓ від добутку $f_1(z) \times f_2(z)$, у якому функція $f_2(z)$ лінійна:

$$f_2(z) = b + k \cdot z,$$

де b і k – постійні коефіцієнти;

z – поточна координата (рис. 2.113).

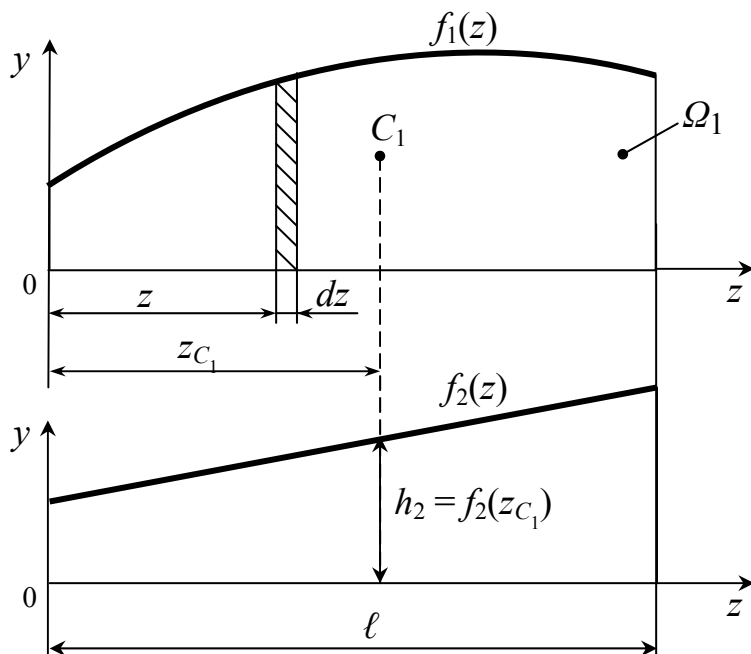


Рисунок 2.113

У цьому випадку:

$$\begin{aligned} \int_{\ell} f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz &= \int_{\ell} f_1(z) \cdot (b + k \cdot z) \cdot dz = b \cdot \int_{\ell} f_1(z) \cdot dz + \\ &+ k \cdot \int_{\ell} f_1(z) \cdot z \cdot dz = b \cdot \Omega_1 + k \cdot S_{1y} = b \cdot \Omega_1 + k \cdot \Omega_1 \cdot z_{C_1} = \\ &= \Omega_1 \cdot (b + k \cdot z_{C_1}) = \Omega_1 \cdot h_2, \end{aligned}$$

де Ω_1 – площа епюри $f_1(z)$ (див. рис. 2.113);

$S_{1y} = \Omega_1 \cdot z_{C_1}$ – статичний момент відносно осі y епюри $f_1(z)$;

z_{C_1} – абсциса центра ваги епюри $f_1(z)$;

h_2 – ордината епюри $f_2(z)$ під центром ваги епюри $f_1(z)$.

Таким чином, справедливості правила Верещагіна доведена.

Слід зауважити, що у випадку, коли обидві епюри лінійні, не важливо, яку з них треба вважати першою, а яку – другою.

Визначення переміщень за формулою (2.170) є достатньо простим, коли вантажна епюра M_p має просту геометричну форму, у якій відомі площа і розташування центра ваги. Деякі з таких форм зображені на рисунках 2.114...2.117.

Прямоуготник

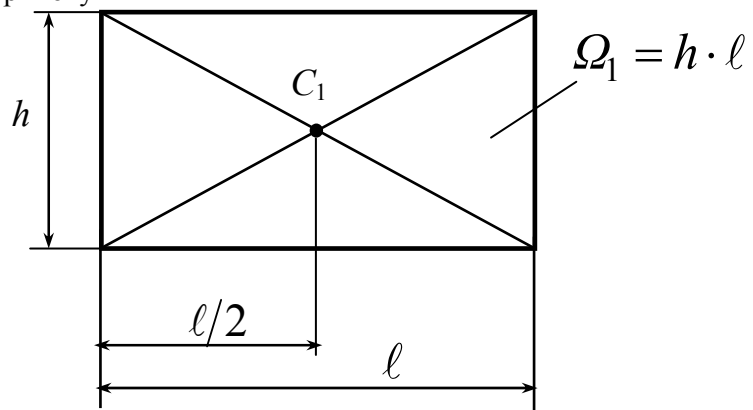


Рисунок 2.114

Трикутник прямокутний

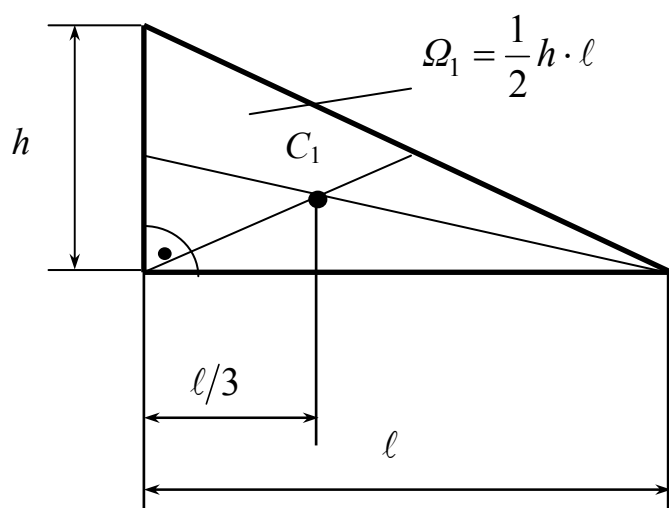


Рисунок 2.115

Трикутник параболічний опуклий

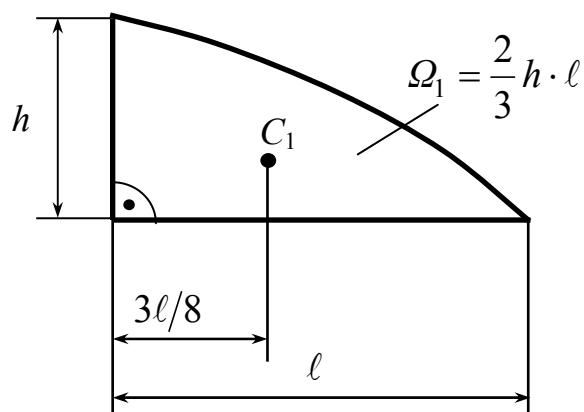


Рисунок 2.116

Трикутник параболічний угнутий

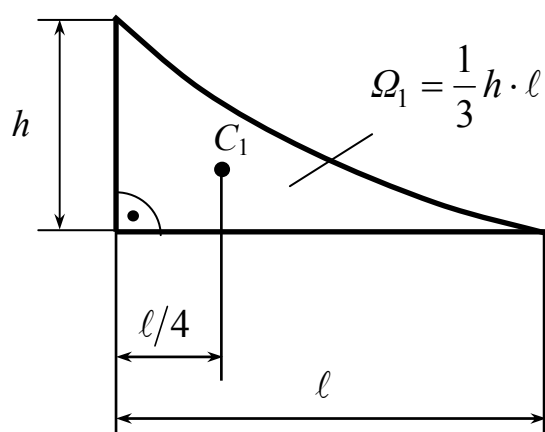


Рисунок 2.117

Слід зауважити, що в наведених варіантах параболічних трикутників параболи мають у найвищій (див. рис. 2.116) або найнижчій (див. рис. 2.117) своїх точках плавний перехід до горизонтальних дотичних. У разі відсутності вказаної ознаки наведені параметри параболічних трикутників не дійсні.

Приклад 2.19. Для консольної балки, зображеної на рисунку 2.210, визначити за допомогою правила Верещагіна переміщення точки A і кут повороту перерізу A , якщо відомі значення E , J_x , q , l . Порівняти результати з отриманими в прикладі 2.18, де було застосоване пряме обчислення інтегралів Мора.

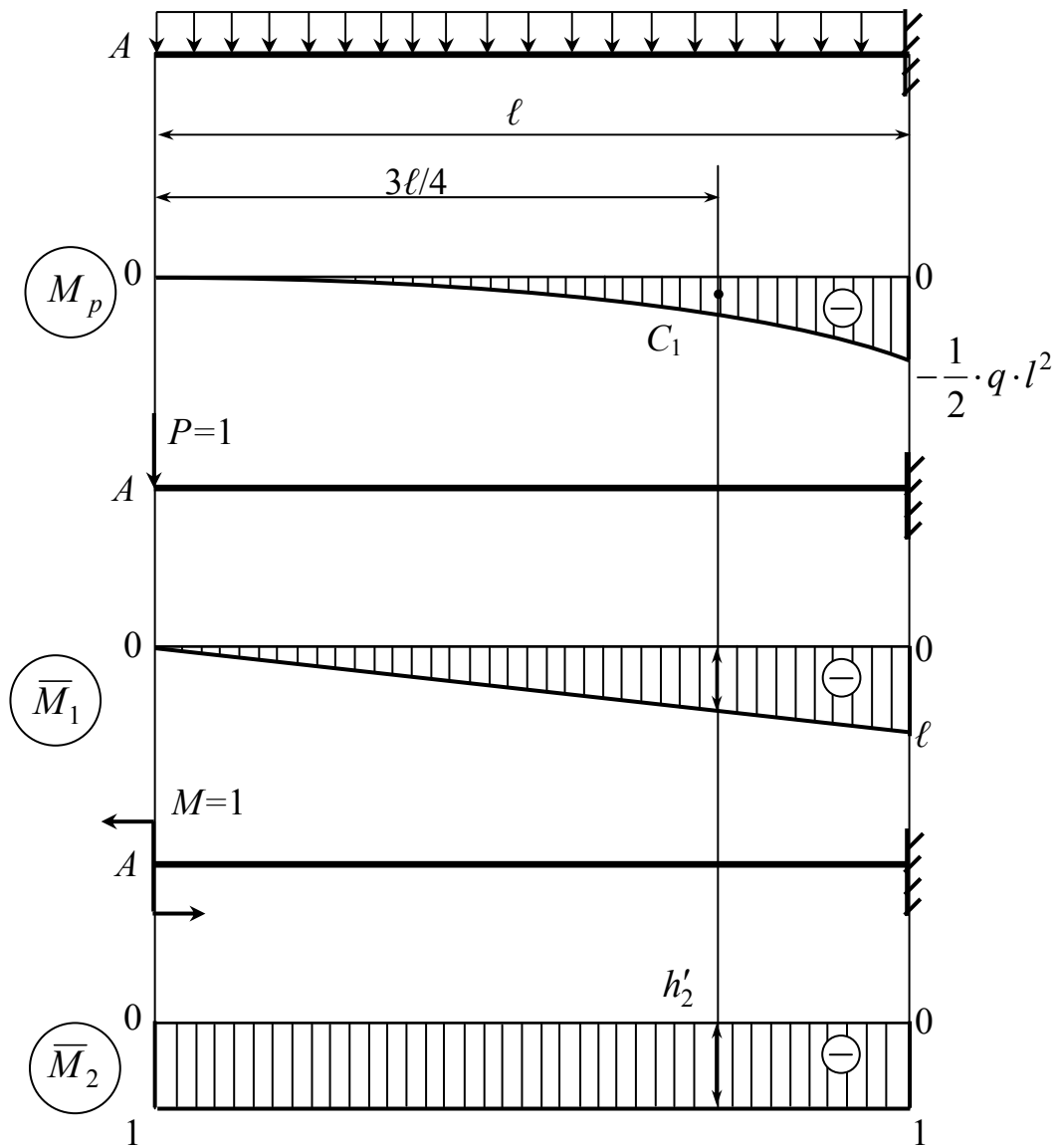


Рисунок 2.118

Розв'язання

У цьому разі маємо (рис. 2.118):

$$\Omega_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} q \cdot l^2 \right) \cdot l = \frac{1}{6} q \cdot l^3; \quad h_2 = \frac{3}{4} l; \quad h'_2 = 1;$$

$$\delta A = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{6} q \cdot l^3 \cdot \frac{3}{4} l = \frac{q \cdot l^4}{8E \cdot J_x};$$

$$\theta_A = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1 \cdot h'_2 = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{1}{6} q \cdot l^3 \cdot 1 = \frac{q \cdot l^3}{6E \cdot J_x}.$$

Звернемо увагу на знаки h_2 і h'_2 . Згідно з обґрунтуванням правила Верещагіна, розглянутим вище, вони повинні мати знаки плюс, коли епюри $f_1(z)$ і $f_2(z)$ лежать по один бік від своїх нульових ліній, і знак мінус, коли вони розташовані по різні боки від них. У цьому випадку обидві ці епюри розташовані нижче нульових ліній, тож h_2 і h'_2 є додатними. Порівнюючи отримані цього разу результати з одержаними в прикладі 2.18, бачимо їх повну ідентичність.

Порівняння двох наведених варіантів розв'язання достатньо простої задачі (див. приклади 2.18 і 2.19) дозволяє віддати перевагу другому з них, де застосовувалось правило Верещагіна, бо цей варіант є більш простим і таким, що не потребує спеціальних математичних знань. Однак, при ускладненні форми вантажної епюри M_p для застосування правила Верещагіна потрібні деякі специфічні прийоми (розшарування епюри та ін.) і певний практичний досвід. Щоб уникнути цих незручностей, часто користуються, так званою, *формулою крайніх ординат*, яка має універсальний характер.

2.9.5 Формула крайніх ординат

Цю формулу для чисельного обчислення інтегралів Мора при довільній формі вантажної епюри називають також формулою перемноження трапецій. Вона може бути отриманою як прямим інтегруванням (що більш складно), так і шляхом застосування правила Верещагіна.

Розглянемо спочатку вантажну епюру M_p у вигляді трапеції (рис. 2.119, а). Саме таку форму має ця епюра на ділянці стрижня, де нема розподіленого навантаження. Одиночна ж епюра \bar{M} (рис. 2.119, б) завжди має таку форму. ?

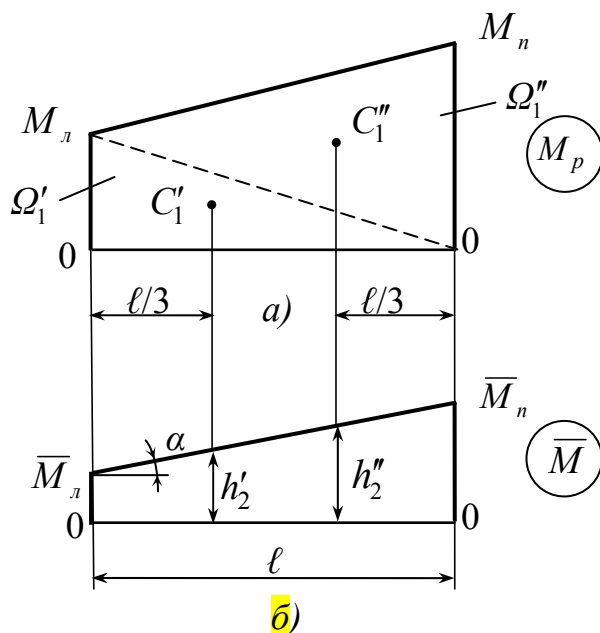


Рисунок 2.119

Щоб охопити усі можливі варіанти форм обох епюр, будемо вважати їхні крайні ординати – ліві (M_l, \bar{M}_l) і праві (M_n, \bar{M}_n) – алгебраїчними величинами, що мають знаки плюс або мінус. На рисунку 2.119 усі вони зображені як додатні. При розташуванні ж тієї чи іншої крайньої ординати нижче нульової лінії вона стає від’ємною.

Поділимо епюру M_p на два трикутника (див. рис. 2.119, а). Тоді, використовуючи правило Верещагіна, маємо:

$$\int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot (\Omega'_1 \cdot h'_2 + \Omega''_1 \cdot h''_2) \quad (2.171)$$

де
$$\Omega'_1 = \frac{1}{2} \ell \cdot M_l; \quad (2.172)$$

$$\Omega''_1 = \frac{1}{2} \ell \cdot M_n; \quad (2.173)$$

$$h'_2 = \bar{M}_l + \frac{\ell}{3} \cdot \text{tg} \alpha = \bar{M}_l + \frac{\ell}{3} \cdot \frac{\bar{M}_n - \bar{M}_l}{\ell} = \frac{2\bar{M}_l + \bar{M}_n}{3}; \quad (2.174)$$

$$h''_2 = \bar{M}_n + \frac{2}{3} \ell \cdot \text{tg} \alpha = \bar{M}_n + \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{\bar{M}_n - \bar{M}_l}{\ell} = \frac{\bar{M}_l + 2\bar{M}_n}{3}. \quad (2.175)$$

Підставивши (2.172)...(2.175) у (2.171), після перетворень отримаємо:

$$\int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_l \cdot \bar{M}_l + 2M_n \cdot \bar{M}_n + M_l \cdot \bar{M}_n + M_n \cdot \bar{M}_l).$$

У випадку, коли на ділянці діє розподілене навантаження, епюра M_p стає криволінійною – опуклою або угнутою, а її площа відповідно збільшується або зменшується в порівнянні з трапецієвидною на величину Ω_1''' (рис. 2.120).

Для визначення величини Ω_1''' розглянемо спочатку вид епюри згинальних моментів у разі дії на балку одного лише розподіленого навантаження (рис. 2.121).

У цьому випадку епюра M_p являє собою опуклий параболічний сегмент з рівнянням параболи:

$$y = \frac{q \cdot \ell}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} = \frac{1}{2} q \cdot z \cdot (\ell - z).$$

Площа цього сегмента:

$$\Omega = \int_{\ell} y \cdot dz = \dots = \frac{1}{12} q \cdot \ell^3.$$

Центр його ваги (точка C) лежить на відстані $\ell / 2$ від осі y (див. рис. 2.121).

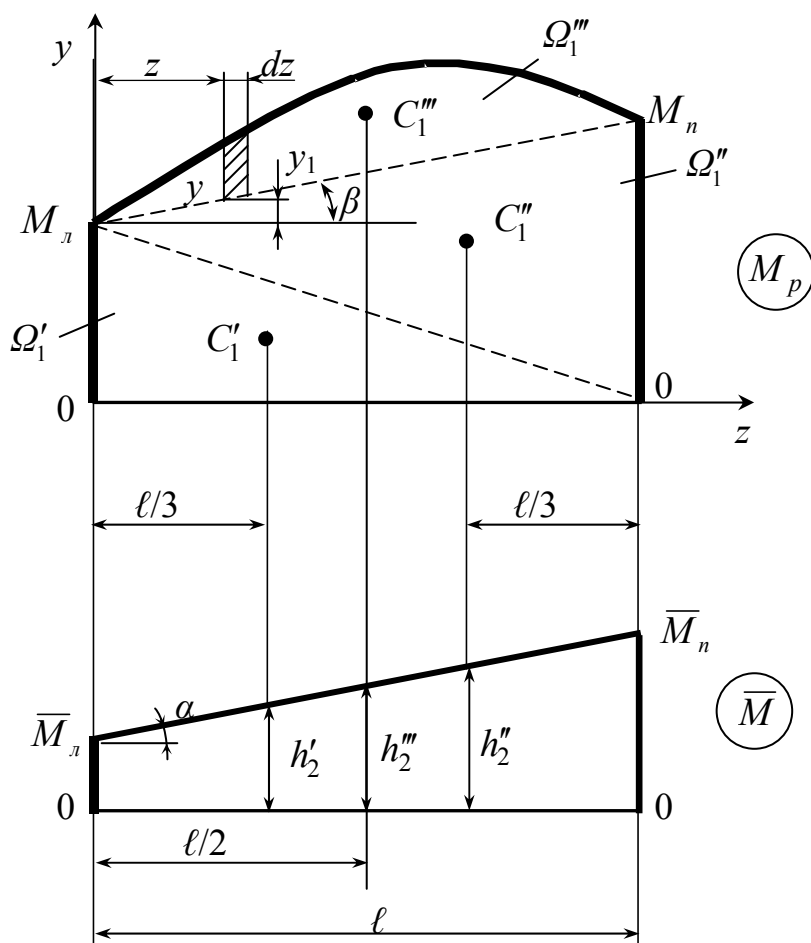


Рисунок 2.120

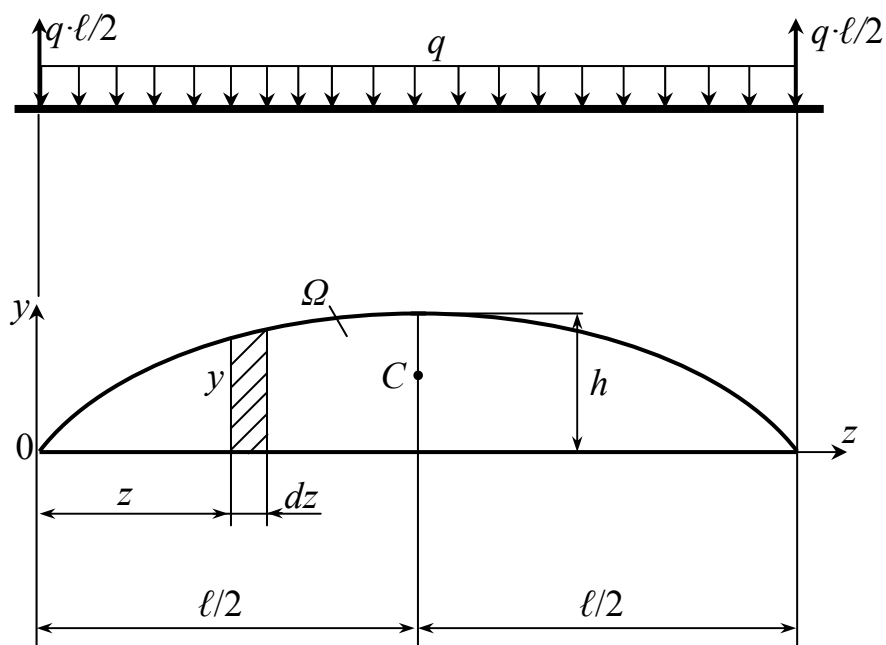


Рисунок 2.121

У загальній епюрі M_p (див. рис. 2.120) зазначений сегмент є zdeформованим шляхом підйому всіх його елементарних смужок на висоту y' :

$$y' = z \cdot \tan \beta = z \cdot \frac{M_n - M_l}{\ell}.$$

Зрозуміло, що при такому перетворенні параболічного сегмента його площа не зміниться:

$$\Omega_1''' = \Omega = \int_{\ell} y \cdot dz = \frac{1}{12} q \cdot \ell^3.$$

Незмінним залишиться також його статичний момент відносно осі y :

$$S_{1y}''' = S_y = \int_{\ell} y \cdot z \cdot dz.$$

Рівність площ і статичних моментів параболічного сегмента до і після зазначеної деформації вказує на те, що відстань його центра ваги від осі y залишається незмінною і становить половину довжини ділянки з розподіленим навантаженням, тобто $\ell/2$. Таким чином (див. рис. 2.120):

$$h_2''' = \frac{1}{2} \cdot (\bar{M}_l + \bar{M}_n).$$

Додавання у підрахунок інтеграла Мора, яку вносить розподілене навантаження, становить:

$$A = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \Omega_1''' \cdot h_2''' = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \frac{q \cdot \ell^3}{12} \cdot \frac{(\bar{M}_l + \bar{M}_n)}{2} = \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} \cdot (\bar{M}_l + \bar{M}_n).$$

Цю добавку називають поправкою на кривизну. У разі опуклої епюрі M_p вона має знак плюс, у разі угнутої – мінус.

З урахуванням цієї поправки формула крайніх ординат набуває вигляду

$$\int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = \frac{\ell}{6E \cdot J_x} \cdot (2M_l \cdot \bar{M}_l + 2M_n \cdot \bar{M}_n + M_l \cdot \bar{M}_n + M_n \cdot \bar{M}_l) \pm \frac{q \cdot \ell^3}{24E \cdot J_x} \cdot (\bar{M}_l + \bar{M}_n). \quad (2.176)$$

Підрахунок інтеграла Мора за допомогою формули крайніх ординат називають перемноженням епюр M_p і \bar{M} і позначають таким чином:

$$\int_{\ell} \frac{M_p \cdot \bar{M} \cdot dz}{E \cdot J_x} = M_p \times \bar{M}$$

Формула (2.176) застосовується для кожної з ділянок балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого отримані результати підсумовуються з урахуванням знаків.

Слід зауважити, що перед визначенням переміщень у тій чи іншій конкретній балці слід переконатись у відсутності в ній пластичних деформацій. Передумовою цього є виконання балкою умов міцності (див. пункт 2.6.5). Якщо розміри перерізу балки не задані, їх слід визначити, а вже потім розраховувати переміщення. Якщо ж ці розміри відомі, треба спочатку виконати перевірку балки на міцність.

Приклад 2.20. Підібрати переріз сталевोї балки (двотавр), визначити її прогин в точці A і кут повороту перерізу A (рис. 2.122), якщо $[\sigma] = 160$ МПа; $P = 10$ кН; $M = 12$ кН·м; $q = 8$ кН/м.

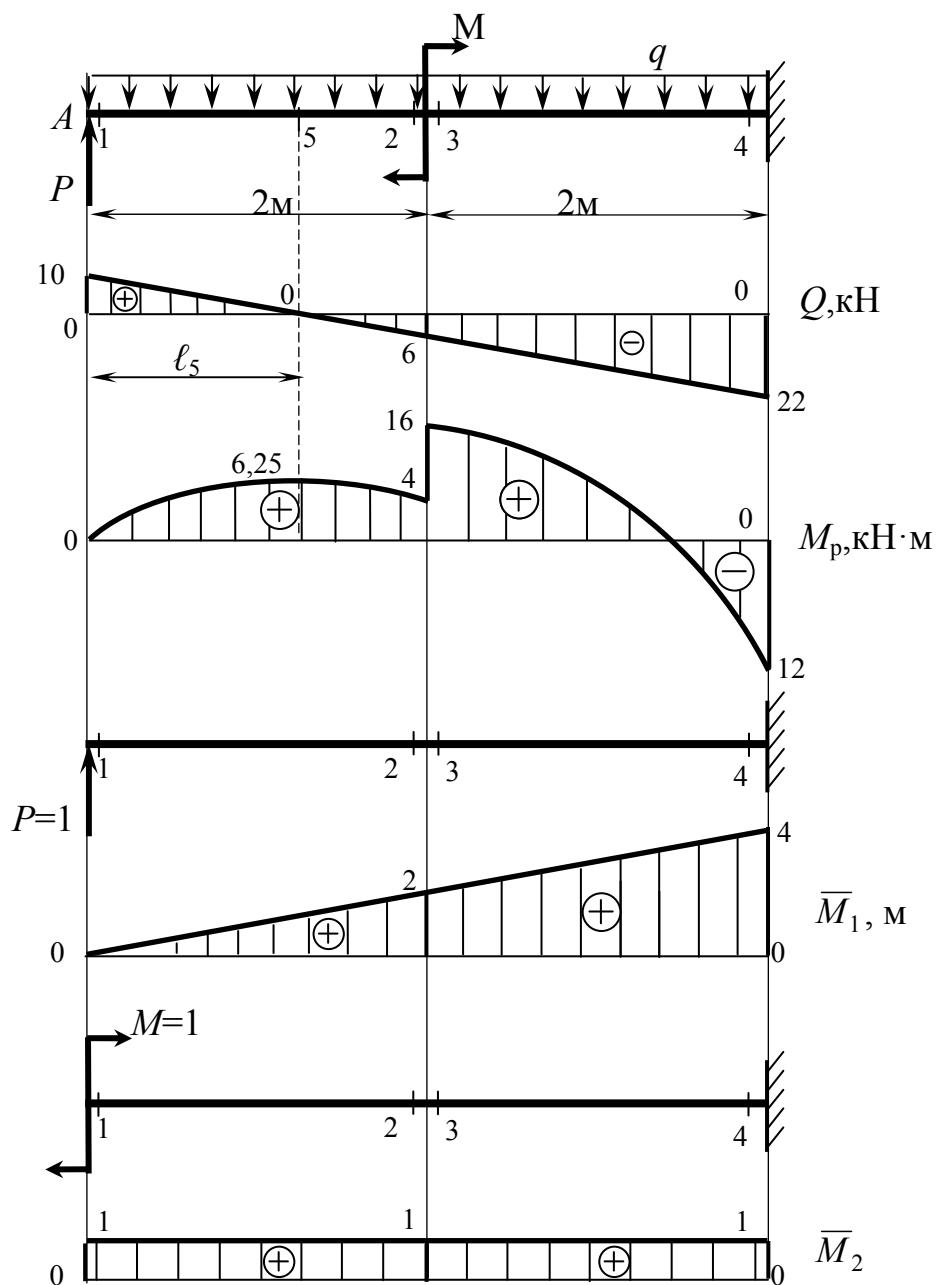


Рисунок 2.122

Розв'язання

1. Будуємо епюру поперечних сил (вона потрібна, щоб проконтролювати правильність побудови епюри згинальних моментів):

$$Q_1 = P = 10 \text{ кН}; \quad Q_2 = Q_3 = P - q \cdot 2 = 10 - 16 = -6 \text{ кН}; \quad Q_4 = P - q \cdot 4 = 10 - 32 = -22 \text{ кН}.$$

У перерізі 5 епюра Q перетинає базу: $Q_5 = 0$. Визначимо положення цього перерізу:

$$\ell_5 = \frac{P}{q} = \frac{10}{8} = 1,25$$

$$Q_5 = P - q \cdot \ell_5 = 0; \quad \text{м.}$$

2. Будуємо епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_p :

$$M_1 = 0;$$

$$M_2 = P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 20 - 16 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = M_2 + M = 4 + 12 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = P \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 + M = 40 - 64 + 12 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = P \cdot \ell_5 - q \cdot \ell_5 \cdot \frac{\ell_5}{2} = 10 \cdot 1,25 - 8 \cdot 1,25 \cdot \frac{1,25}{2} = 6,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Визначаємо необхідний момент опору перерізу балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_p^{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad ; \quad W_x \geq \frac{M_p^{\max}}{[\sigma]} = \frac{16 \cdot 10^6}{160} = 100000 \text{ мм}^3 = 100 \text{ см}^3.$$

4. З відповідної таблиці сортаменту (див. додаток А) вибираємо двотавр 16, у якого $W_x = 109 \text{ см}^3$; $J_x = 873 \text{ см}^4$.

5. У точці А балки (див. рис. 2.122) прикладаємо одиничну силу $P = 1$ і будуємо від неї епюру \overline{M}_1 :

$$M_1 = 0; \quad M_2 = M_3 = P \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}; \quad M_4 = P \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}.$$

6. У перерізі А балки прикладаємо одиничний момент $M = 1$ і будуємо від нього епюру \overline{M}_2 :
 $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M = 1$.

7. Використовуючи формулу крайніх ординат (2.176) визначаємо прогин балки в точці А:

$$\begin{aligned} \delta A &= M_p \times \overline{M}_1 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0) + \frac{8 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 + 2) + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 16 \cdot 2 + 2 \cdot (-12) \cdot 4 + 16 \cdot 4 + (-12) \cdot 2] + \frac{8 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (2 + 4) = \\ &= \frac{176}{6E \cdot J_x} = \frac{176 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 16,8 \text{ мм (за напрямком } P = 1, \text{ тобто вгору)}. \end{aligned}$$

8. Аналогічно визначаємо кут повороту перерізу А:

$$\begin{aligned} \theta_A &= M_p \times \overline{M}_2 = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1) + \frac{8 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (1 + 1) + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 16 \cdot 1 + 2 \cdot (-12) \cdot 1 + 16 \cdot 1 + (-12) \cdot 1] + \frac{8 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (1 + 1) = \\ &= \frac{112}{6E \cdot J_x} = \frac{112 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 873 \cdot 10^4} = 0,011 \text{ рад} = 0,630 \text{ град} \end{aligned}$$

(за напрямком $M = 1$, тобто за ходом годинникової стрілки).

2.10 Стійкість стиснутих стрижнів

2.10.1 Подовжній згин, його сутність

При розтяганні прямих стрижнів їх форма зберігається аж до розриву. При стисканні ж їх силою, прикладеною в центрі ваги перерізу, можлива втрата цієї форми і, як наслідок, швидке руйнування. Це явище зветься подовжнім згином.

Причина подовжнього згину – у наявності у стиснутих стрижнів трьох форм пружної рівноваги: стійкої, нестійкої і перехідної (критичної).

У разі стійкої пружної рівноваги (рис. 2.123, а) стиснутий стрижень після будь-якого бокового поштовху відхиляється у відповідному напрямку і після цього повертається у свій первинний стан.

При нестійкій рівновазі (рис. 2.123, б) стрижень після бокового поштовху в первинний стан не повертається, а продовжує рухатись у напрямку цього поштовху до моменту руйнування.

При критичній рівновазі стрижень після поштовху може поводитись як при стійкій, так і при нестійкій рівновазі (рис. 2.123, в). Величина сили, при якій можлива критична рівновага, зветься критичною силою $P_{кр}$. Зрозуміло, що стійка рівновага має місце, коли $P < P_{кр}$, а нестійка – коли $P > P_{кр}$.

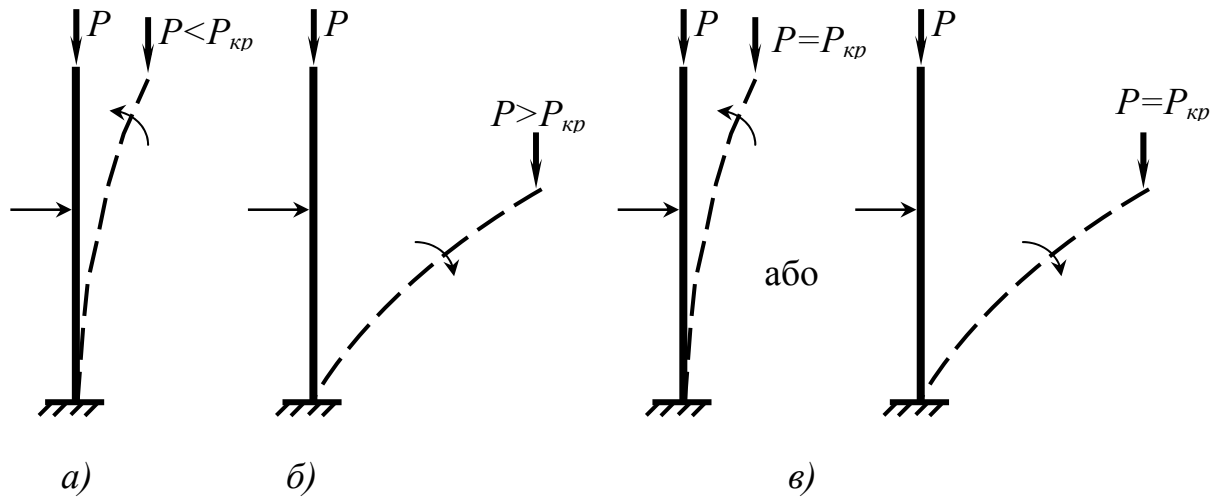


Рисунок 2.123

Таким чином, втрата стрижнем стійкості вірогідна вже при критичній рівновазі. Тому критична сила вважається небезпечною з точки зору подовжнього згину. Щоб запобігти цьому небезпечному явищу, треба вміти визначати величину $P_{кр}$.

2.10.2 Визначення критичної сили. Задача Ейлера

Уперше задача визначення критичної сили для стиснутих стрижнів була розв'язана у 17 сторіччі російським академіком **Л. Ейлером** (1707–1783). До цих пір вона є основою відповідних практичних розрахунків. Розглянемо цю задачу.

Схема стиснутого стрижня, прийнята в задачі Ейлера, зображена на рисунку 2.124.

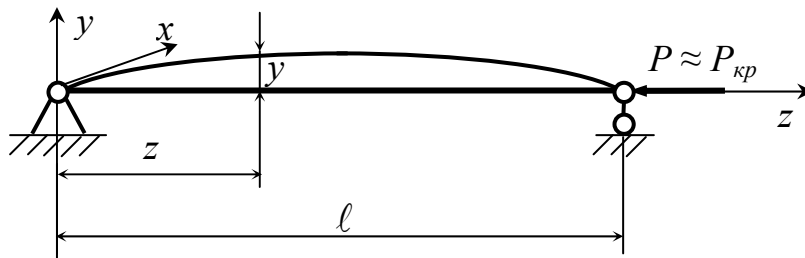


Рисунок 2.124

Розв'язання задачі базується на таких припущеннях:

1. Стрижень стискається силою P , не набагато більшою за $P_{кр}$.
2. Відхилення стрижня від прямолінійної форми y є малими (розглядається початок втрати стійкості).

3. Напруження в стрижні не перевищують межі пропорційності:

$$\sigma \leq \sigma_{m\dot{u}}$$

4. Згин стрижня відбувається у площині мінімальної жорсткості (zy):

$$J_{\min} = J_x$$

В основу розв'язання задачі покладено два вирази для визначення кривизни пружної лінії стиснутого стрижня (тобто його зігнутої осі).

Перший з них відомий з курсу вищої математики:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / dz^2}{\left[1 + (dy/dz)^2\right]^{3/2}}, \quad (2.177)$$

де ρ – радіус кривизни плоскої кривої.

Другий вираз для кривизни отримано в ході визначення нормальних напружень при плоскому згині (див. формулу (2.89)). У даному випадку цей вираз набуває вигляду

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x} = \frac{P \cdot y}{E \cdot J_{\min}}. \quad (2.178)$$

Зважаючи на те, що значення y малі, будемо вважати такими і величини dy/dz (тобто тангенси кутів нахилу дотичних кривої до осі z). Тоді, нехтуючи цими величинами ($dy/dz \approx 0$), із (2.177) маємо:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 y}{dz^2}. \quad (2.179)$$

Прирівнюючи (2.178) і (2.179), отримаємо:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{P \cdot y}{E \cdot J_{\min}}. \quad (2.180)$$

Знак мінус у рівнянні (2.180) поставлено тому, що знаки $d^2 y / dz^2$ і y завжди протилежні. У цьому разі $y > 0$, а $d^2 y / dz^2 < 0$ (див. курс вищої математики). Якщо ж стрижень буде вигнутий униз, знаки цих величин поміняються на протилежні.

Позначимо:

$$P / E \cdot J_{\min} = k^2. \quad (2.181)$$

З урахуванням цього рівняння (2.180) набуває стандартного вигляду

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 \cdot y = 0.$$

Як відомо з курсу вищої математики, це рівняння має розв'язок:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot z) + B \cdot \cos(k \cdot z), \quad (2.182)$$

де A і B – постійні інтегрування, що визначаються із граничних умов:

$$z = 0, \quad y = 0; \quad (2.183)$$

$$z = \ell, \quad y = 0. \quad (2.184)$$

Підставивши умову (2.183) у (2.182), отримаємо:

$$0 = 0 + B$$

або

$$B = 0. \quad (2.185)$$

Підставивши у (2.182) умову (2.184) і вираз для B (2.185), маємо:

$$0 = A \cdot \sin(k \cdot \ell)$$

Зважаючи на те, що $A \neq 0$ (інакше приведе до $y \equiv 0$, що суперечить умові задачі), приймаємо:

$$\sin(k \cdot \ell) = 0$$

Тоді

$$k \cdot \ell = \pi \cdot n, \quad (2.186)$$

де n – ціле число, відмінне від нуля (при $n = 0$ маємо: $k \cdot \ell = 0$ і $y \equiv 0$, що суперечить умові задачі).

Із формули (2.186) маємо:

$$k^2 = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{\ell^2}. \quad (2.187)$$

Прирівнявши (2.187) і (2.181), після перетворень отримаємо вираз для критичної сили:

$$P_{кр} \approx P = \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{\ell^2}. \quad (2.188)$$

Вираз (2.188) не є остаточним, бо в ньому величина n не визначена. Щоб з'ясувати її сенс, повернемося до рівняння пружної лінії стрижня (2.182). З урахуванням (2.185) і (2.186) воно набуває вигляду

$$y = A \cdot \sin(k \cdot z) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{\ell} \cdot z\right)$$

Це – рівняння синусоїди. Її період:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot \ell}{\pi \cdot n} = 2 \cdot \frac{\ell}{n}.$$

Звідсіля

$$\frac{\ell}{n} = \frac{T}{2} = L, \quad (2.189)$$

де L – так звана півхвиля синусоїди, або приведена довжина стрижня.

Із формули (2.189) виходить, що $n = \ell / L$, тобто що величина n дорівнює кількості півхвиль синусоїди, які вміщуються в довжині стрижня. У схемі Ейлера (див. рис. 2.124) $n = 1$.

З урахуванням (2.189) вираз для критичної сили (2.188) набуває вигляду

$$P_{кр} \approx P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2}, \quad (2.190)$$

де μ – величина, яка показує, у скільки разів приведена довжина стрижня більша його дійсної довжини,

$$\mu = \frac{1}{n} = \frac{L}{\ell}.$$

Подальші дослідження показали, що величина μ суттєво залежить від схеми кріплення кінців стиснутого стрижня. Деякі варіанти таких схем наведені у додатку В, інші – у довідковій літературі.

2.10.3 Межі застосування формули Ейлера для критичного напруження. Формула Ясинського

У практичних розрахунках разом з формулою для критичної сили (2.190) використовують також відповідну формулу для критичного напруження:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot \ell)^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot \ell)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}, \quad (2.191)$$

де $i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}$ – мінімальний радіус інерції перерізу стрижня;

F – площа перерізу;

λ – так звана гнучкість стрижня:

$$\lambda = \mu \cdot \ell / i_{\min}$$

З формули (2.191) виходить, що марка сталі або іншого матеріалу, з якого виготовлено стрижень, слабо впливає на величину $\sigma_{кр}$, бо модуль пружності E , що пов'язує $\sigma_{кр}$ з маркою матеріалу, у дорогих і дешевих його марок приблизно однаковий. Як наслідок – неможливість суттєвого підвищення критичного напруження за рахунок використання більш якісних і дорогих матеріалів.

З'ясуємо межі застосування формули (2.191). Нагадаємо, що одним з припущень у розглянутій задачі Ейлера – напруження в стрижні не повинні перевищувати межю пропорційності. Тому

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$$

У граничному випадку

$$\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$$

Із цієї умови визначимо відповідне значення гнучкості $\lambda_{зр}$:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{зр}^2} = \sigma_{пц}$$

$$\lambda_{зр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}$$

Для сталі Ст. 3, яка найчастіше використовується для стиснутих стрижнів: $E = 2,1 \times 10^5$ МПа, $\sigma_{пц} = 200$ МПа. Цього разу

$$\lambda_{зр} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} = 102$$

При $\lambda < \lambda_{зр}$ формула (2.191) дає завищений результат, і користуватись нею небезпечно.

Теоретичне розв'язання задачі стійкості за межею пропорційності доволі складне, тому тут послуговуються емпіричними (тобто такими, що базуються на результатах обробки

експериментальних даних) формулами для $\sigma_{кр}$, зокрема формулою петербурзького професора **Ф. С. Ясинського** (1856–1899) для сталевих стояків:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda \quad (2.192)$$

де a і b – емпіричні коефіцієнти.

Межі застосування цієї формули:

$$\lambda_0 < \lambda < \lambda_{зр}$$

де λ_0 – значення гнучкості, при якому $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

Для сталі Ст.3: $\sigma_T = 240$ МПа, $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа,

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma_T}{b} = \frac{310 - 240}{1,14} \approx 61$$

При $\lambda \leq \lambda_0$ розрахунки на стійкість взагалі не проводять, бо стиснуті стрижні втрачають міцність раніше, ніж стійкість.

Межі застосування наведених формул для критичного напруження наглядно ілюструє діаграма, зображена на рисунку 2.125.

Ділянка I на рисунку 2.125 є ділянкою *коротких стрижнів*, розрахунки на стійкість яких не проводять, ділянка II – це ділянка *стрижнів середньої довжини*, для яких використовують формулу Ясинського (2.192), ділянка III є ділянкою *довгих стрижнів*, для яких застосовують формулу Ейлера (2.191).

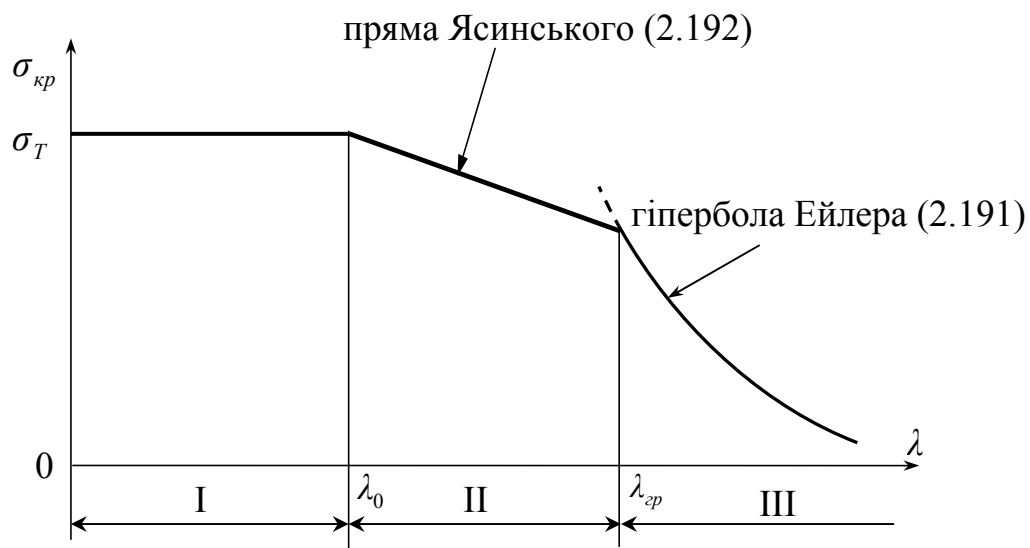


Рисунок 2.125

2.10.4 Розрахунки на стійкість з використанням коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження

Умови стійкості стиснутих стрижнів мають вигляд

$$P \leq [P_{cm}] = \frac{P_{кр}}{n_{cm}},$$

$$\sigma \leq [\sigma_{cm}] = \frac{\sigma_{кр}}{n_{cm}},$$

(2.193)

де $[P_{cm}]$ і $[\sigma_{cm}]$ – сила і напруження, допустимі в розрахунках на стійкість;

n_{cm} – коефіцієнт запасу стійкості (1,7...2,0 – будівельні сталеві конструкції; 3,5...5,0 – конструкції в машинобудуванні; 5,0 – конструкції з чавуну; 3,0 – дерев'яні конструкції).

При стисканні допустимі напруження на міцність $[\sigma]$ і на стійкість $[\sigma_{cm}]$ пов'язані між собою:

$$\frac{[\sigma_{cm}]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{cm}} \cdot \frac{\sigma_-^0}{n} = \frac{\sigma_{кр} \cdot n}{\sigma_-^0 \cdot n_{cm}},$$

(2.194)

де σ_-^0 – напруження, небезпечне з умови міцності;
 n – коефіцієнт запасу міцності.

Із формули (2.194) маємо:

$$[\sigma_{cm}] = \frac{\sigma_{кр} \cdot n}{\sigma_-^0 \cdot n_{cm}} \cdot [\sigma] = \varphi \cdot [\sigma],$$

(2.195)

де $\varphi = \frac{\sigma_{кр} \cdot n}{\sigma_-^0 \cdot n_{cm}}$ – так званий коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження ($\varphi \leq 1$).

Величини цього коефіцієнта залежать від матеріалу і гнучкості стрижня. Їх наведено у додатку В, також у довідковій літературі.

З урахуванням (2.195) умова стійкості (2.193) набуває вигляду

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma]$$

(2.196)

Розрахунки з використанням умови (2.196) проводяться в будівництві, машинобудуванні й ряді інших галузей промисловості. З її допомогою розв'язують задачі трьох типів:

1. На визначення максимально допустимого навантаження стрижня (проектний розрахунок).
2. На підбір перерізу стрижня (проектний розрахунок).
3. На перевірку умови стійкості стрижня (перевірочний розрахунок).

Приклад 2.21. Визначити максимально допустиму величину навантаження стояка зі сталі Ст. 3 (двотавр 20), якщо $\ell = 2$ м, $[\sigma] = 160$ МПа. Схема стояка – на рисунку 2.126.

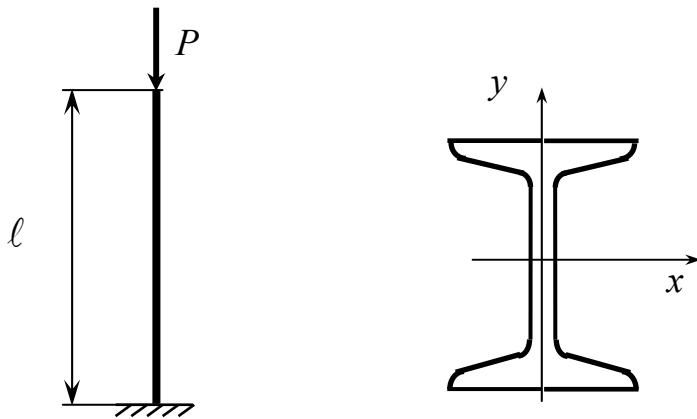


Рисунок 2.126

Розв'язання

1. Визначаємо гнучкість стояка, прийнявши:
 $\mu = 2$ (додаток В, рис. В.1); $i_{\min} = i_y = 2,07$ см (додаток А, табл. А.2);

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^2}{2,07} = 193,237.$$

2. Визначаємо величину φ (додаток В, табл. В.1). Оскільки значення $\lambda = 193,237$ в таблиці нема, використовуємо метод лінійної інтерполяції (рис. 2.127):

$$\varphi = 0,19 + (200 - 193,237) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,19 + (200 - 193,237) \cdot \frac{0,21 - 0,19}{200 - 190} = 0,204.$$

3. З умови стійкості (2.196) визначаємо максимально допустиме значення стискаючої сили:

$$P_{\max} = F \cdot \varphi \cdot [\sigma_-]; \quad F = 26,8 \text{ см}^2 \text{ (додаток А, табл. А.2);}$$

$$P_{\max} = 26,8 \cdot 10^2 \cdot 0,204 \cdot 160 = 87475 \text{ Н} = 87,475 \text{ кН.}$$

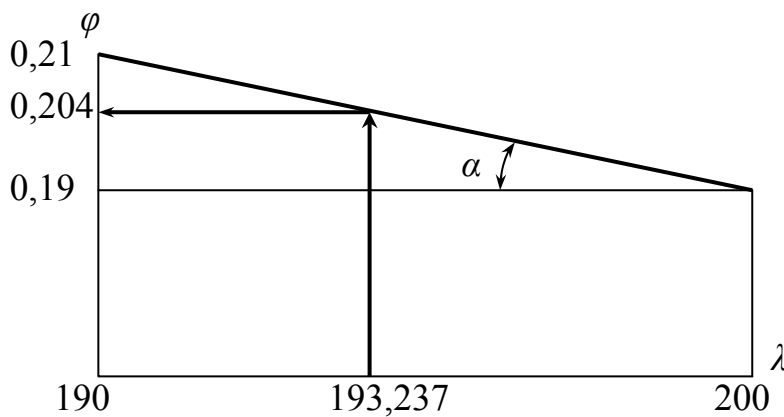


Рисунок 2.127

Приклад 2.22. Підібрати розміри перерізу стояка зі сталі Ст. 3, якщо $P = 100$ кН, $\ell = 1$ м, $[\sigma_-] = 160$ МПа, схема стояка – на рисунку 2.128. Точність визначення розмірів – до цілих міліметрів.

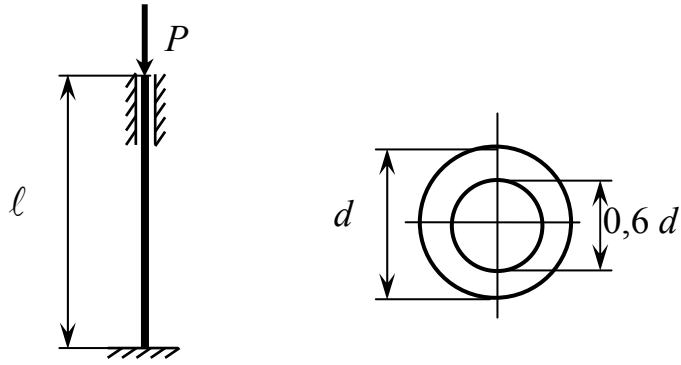


Рисунок 2.128

Розв'язання

1. Виражаємо всі геометричні характеристики стовця через невідомий параметр d :

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} - \frac{\pi \cdot (0,6d)^2}{4} = 0,5024 \cdot d^2$$

$$J_{oc} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} - \frac{\pi \cdot (0,6d)^4}{64} = 0,0427 \cdot d^4$$

$$i_{oc} = i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{oc}}{F}} = \sqrt{\frac{0,0427 \cdot d^4}{0,5024 \cdot d^2}} = 0,2915 \cdot d$$

2. Визначаємо параметр d . Оскільки в умові стійкості (2.196) величини F і φ невідомі, використовуємо метод поступових наближень.

На першому кроці приймаємо середнє значення φ : $\varphi = 0,6$. Потім визначаємо величини F і d :

$$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_-]} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160} = 1042 \text{ мм}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{1042}{0,5024}} = 45,5 \text{ мм. Приймаємо: } d = 46 \text{ мм.}$$

У заданій схемі $\mu = 0,5$ (додаток В, рис. В.1). Тоді

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 46} = 37,288$$

Методом інтерполяції визначаємо відповідне значення φ :

$$\varphi = 0,92 + (40 - 37,288) \cdot \frac{0,94 - 0,92}{40 - 30} = 0,925$$

де 0,92 і 0,94 – значення φ при гнучкостях 40 і 30 відповідно (додаток В, табл. В.1).

Оскільки значення φ на початку і в кінці першого кроку сильно розходяться, продовжуємо розрахунок.

$$\varphi = \frac{0,6 + 0,925}{2} = 0,7625.$$

На другому кроці приймаємо

$$F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,7625 \cdot 160} = 820 \text{ мм}^2; \quad d \geq \sqrt{\frac{820}{0,5024}} = 40,4 \text{ мм.}$$

Тоді

Приймаємо: $d = 41$ мм.

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 41} = 41,836 \quad \varphi = 0,89 + (50 - 41,836) \cdot \frac{0,92 - 0,89}{50 - 40} = 0,914$$

Оскільки значення φ на початку і в кінці другого кроку все ще сильно різняться, переходимо до наступного кроку.

На третьому кроці:

$$\varphi = \frac{0,7625 + 0,914}{2} = 0,838; \quad F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,838 \cdot 160} = 746 \text{ мм}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{746}{0,5024}} = 38,5$$

мм. Приймаємо: $d = 39$ мм.

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 39} = 43,981 \quad \varphi = 0,89 + (50 - 43,981) \cdot \frac{0,92 - 0,89}{50 - 40} = 0,908$$

На четвертому кроці:

$$\varphi = \frac{0,838 + 0,908}{2} = 0,873 \quad F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,873 \cdot 160} = 716 \text{ мм}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{716}{0,5024}} = 37,8$$

мм. Приймаємо: $d = 38$ мм.

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,2915 \cdot 38} = 45,139 \quad \varphi = 0,89 + (50 - 45,139) \cdot \frac{0,92 - 0,89}{50 - 40} = 0,905$$

На п'ятому кроці:

$$\varphi = \frac{0,873 + 0,905}{2} = 0,889 \quad F \geq \frac{100 \cdot 10^3}{0,889 \cdot 160} = 703 \text{ мм}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{703}{0,5024}} = 37,4$$

мм. Приймаємо: $d = 38$ мм.

Оскільки такий результат уже був на попередньому кроці, розрахунок припиняємо.

3. Перевіримо стояк на стійкість:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,5024 \cdot 38^2} = 137,8 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{cm}] = \varphi \cdot [\sigma_-] = 0,905 \cdot 160 = 144,8 \text{ МПа};$$

Оскільки $\sigma < [\sigma_{cm}]$, стійкість стояка забезпечена. Таким чином, значення $d = 38$ мм є остаточним.

Приклад 2.23. Перевірити на стійкість стиснутий стояк із сталі Ст.5 квадратного перерізу (100x100 мм), якщо $P = 1000$ кН, $\ell = 3,3$ м, $[\sigma_-] = 180$ МПа. Схема стояка – на рисунку 2.129.

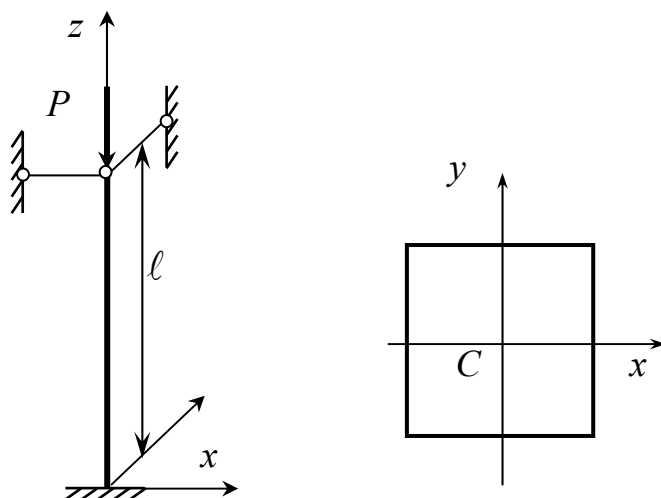


Рисунок 2.129

Розв'язання

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}}$$

1. Визначаємо гнучкість стояка
 $\mu = 0,7$ (додаток В, рис. В.1);

$$J_x = J_y = J_{oc} = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10^3 = 833,333 \text{ см}^4;$$

$$F = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{oc}}{F}} = \sqrt{\frac{833,333}{100}} = 2,887 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 3,3 \cdot 10^2}{2,887} = 80.$$

2. Визначаємо значення φ : $\varphi = 0,70$ (додаток В, табл. В.1).

3. Перевіряємо умову стійкості стояка:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^2} = 100 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{cm}] = \varphi \cdot [\sigma_-] = 0,7 \cdot 180 = 126 \text{ МПа};$$

$$\sigma < [\sigma_{cm}].$$

Умова виконується.

ЛІТЕРАТУРА

- 1 Павловський М. А. Теоретична механіка : *підручник* / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
- 2 Добронравов В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 1983. – 575 с.
- 3 Бутенин Н. В. Курс теоретической механики: Статика и кинематика/ Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 240 с.
- 4 Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Наука, 1986. – 415 с.
- 5 Попов М. В. Теоретическая механика. Краткий курс / М. В. Попов. – М. : Наука, 1986. – 336 с.
- 6 Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
- 7 Писаренко, Г. С. Соппротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.
- 8 Дарков А. В. Соппротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро.– М.: Высш. шк., 1989. – 654 с.

ДОДАТОК А

Основні параметри катаних профілів

1 Нормальні лінійні розміри, мм (за ГОСТ 6636-69, фрагмент ряду Ra20)

Таблиця А.1

1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	3,2	3,6
4,0	4,5	5,0	5,6	6,3	7,1	8,0	9,0	10	11	12	14
16	18	20	22	25	28	32	36	40	45	50	56
63	71	80	90	100	110	125	140	160	180	200	220
250	280	320	360	400	450	500	560	630	710	800	900

2 Двотаври сталіні гарячекатані (за ГОСТ 8239-89)



J – момент інерції
 W – момент опору
 i – радіус інерції
 S – статичний момент напівперерізу

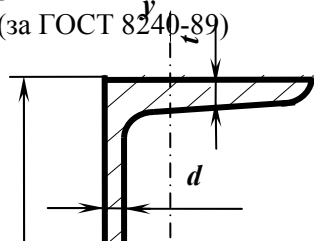
Двотавр 30 ГОСТ

Таблиця А.2

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см
	h	b	d	t								
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1 290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1 430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1 840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2 030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2 550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2 790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3 460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3 800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5 010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5 500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7 080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7 780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9 840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27 696	1 231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39 727	1 589	19,9	919	1 043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55 962	2 035	21,8	1 181	1 356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76 806	2 560	23,6	1 491	1 725	182	3,54

3

(за ГОСТ 8240-89)



Швелери

сталіні

гарячекатані

Позначення:

h – висота профілю
 b – ширина полки
 d – товщина стінки
 t – середня товщина полки
 F – площа перерізу
 J – момент інерції

W – момент опору
 i – радіус інерції
 S – статичний момент напівперерізу
 Z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані

стінки

Приклад позначення профілю:

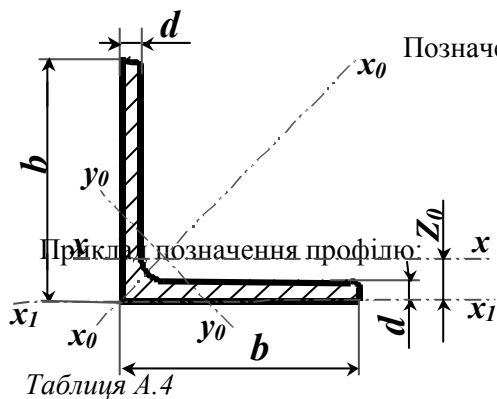
Швелер 30 ГОСТ 8240-

Таблиця А.3

Номер профілю	Основні розміри, мм				F см ²	J_X см ⁴	W_X см ³	i_X см	S_X см ³	J_Y см ⁴	W_Y см ³	i_Y см	Z_0 см
	h	b	d	t									
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1 090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1 190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1 520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1 670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2 110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2 330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2 900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3 180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4 160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5 810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7 980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

4 Кутики сталеві гарячекатані рівнополічні

(за ГОСТ 8509-93 або ДСТУ2251-93)



Кутик 50x50x3 ГОСТ 8509-93

Номер кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_x см ⁴	i_x см	J_{x_0} max см ⁴	i_{x_0} max см	J_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,6	0,75	0,17	0,39	0,60
		4	1,46	0,50	0,58	0,8	0,73	0,22	0,38	0,64
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,3	0,95	0,34	0,49	0,73
		4	1,86	1,03	0,74	1,6	0,93	0,44	0,48	0,76
		5	2,27	1,22	0,73	1,9	0,92	0,53	0,48	0,80
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,8	1,07	0,48	0,55	0,80
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,3	1,15	0,60	0,59	0,85
		4	2,27	1,84	0,90	2,9	1,13	0,77	0,58	0,89
		5	2,78	2,20	0,89	3,5	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	0,89
		4	2,43	2,26	0,96	3,6	1,21	0,94	0,62	0,94
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,7	1,35	0,97	0,69	0,97
		4	2,67	3,01	1,06	4,8	1,33	1,25	0,68	1,01
		5	3,28	3,61	1,05	5,7	1,32	1,52	0,68	1,05
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,6	1,55	1,47	0,79	1,09
		4	3,08	4,58	1,22	7,3	1,53	1,90	0,78	1,13
		5	3,79	5,53	1,21	8,8	1,52	2,30	0,78	1,17
		6	4,48	6,41	1,20	10,1	1,50	2,70	0,78	1,21
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,1	1,75	2,12	0,89	1,21
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	1,26
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	1,30
		6	5,08	9,35	1,36	14,8	1,71	3,90	0,88	1,34
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	1,33
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	1,38
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	1,42
		6	5,69	13,07	1,52	20,7	1,91	5,43	0,98	1,46
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	1,52
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	1,88
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02

7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,8	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18

Номер кутика	Основні розміри мм		F см ²	J_X см ⁴	i_X см	J_{X_0} max см ⁴	i_{X_0} max см	J_{y_0} min см ⁴	i_{y_0} min см	Z_0 см
	b	d								
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,8	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,3	73,4	2,34	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	2,99
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
16	160	12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
		10	31,4	774	4,96	1 229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	844	4,95	1 341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1 450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1 046	4,92	1 662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1 175	4,89	1 866	6,17	485	3,14	4,55
18	180	18	54,8	1 299	4,87	2 061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1 419	4,85	2 248	6,10	589	3,12	4,70
		11	38,8	1 216	5,60	1 933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1 317	5,59	2 093	7,04	540	3,58	4,89
20	200	12	47,1	1 823	6,22	2 896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1 961	6,21	3 116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2 097	6,20	3 333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2 363	6,17	3 755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2 871	6,12	4 560	7,72	1 182	3,93	5,70
		25	94,3	3 466	6,06	5 494	7,63	1 438	3,91	5,89
22	220	30	111,5	4 020	6,00	6 351	7,55	1 688	3,89	6,07
		14	60,4	2 814	6,83	4 470	8,60	1 159	4,38	5,93
		16	68,6	3 175	6,81	5 045	8,58	1 306	4,36	6,02

25	250	16	78,4	4 717	7,76	7 492	9,78	1 942	4,98	6,75
		18	87,7	5 247	7,73	8 337	9,75	2 158	4,96	6,83
		20	97,0	5 765	7,71	9 160	9,72	2 370	4,94	6,91
		22	106,1	6 270	7,69	9 961	9,69	2 579	4,93	7,00
		25	119,7	7 006	7,65	11 125	9,64	2 887	4,91	7,11
		28	133,1	7 717	7,61	12 244	9,59	3 190	4,89	7,23
		30	142,0	8 117	7,59	12 965	9,56	3 389	4,89	7,31

5 Кутики сталеві гарячекатані нерівнополічні

(за ГОСТ 8510-86)



Позначення:

B – ширина більшої полки b – ширина меншої полки
 d – товщина полки F – площа перерізу
 I – момент інерції i – радіус інерції
 x_0, y_0 – відстані від центра α – кут нахилу осі u

Кутик 50x32x3 ГОСТ 8510-86

Таблиця А.5

Номер кутик а	Основні розміри, мм			F см ²	J_x см ⁴	J_y см ⁴	J_u мин см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,34	0,42	0,86	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	0,54	1,04	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,43	0,49	1,08	0,382
			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,43	0,53	1,12	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,54	0,59	1,32	0,385
			4	2,47	3,93	1,18	0,71	0,54	0,63	1,37	0,381
			5	3,03	4,73	1,41	0,86	0,53	0,66	1,41	0,374
4/3	40	39	4	2,67	4,18	2,01	1,09	0,64	0,78	1,28	0,544
			5	3,28	5,04	2,41	1,33	0,64	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,79	0,61	0,64	1,47	0,382
			4	2,80	5,68	1,69	1,02	0,60	0,68	1,51	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	0,70	0,72	1,60	0,403
			4	3,17	7,98	2,56	1,52	0,69	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,78	0,84	1,82	0,406
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,78	0,88	1,86	0,404
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,87	0,91	2,03	0,397
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,86	0,95	2,08	0,396
			6	5,90	23,3	7,28	4,36	0,86	0,99	2,12	0,393
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,85	1,07	2,20	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	23,41	12,08	6,41	1,07	1,26	2,00	0,576
			6	6,60	27,46	14,12	7,52	1,07	1,30	2,04	0,575
			7	7,62	31,32	16,05	8,60	1,06	1,34	2,08	0,571
			8	8,62	35,00	18,88	9,65	1,06	1,37	2,12	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	0,98	1,05	2,28	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	1,09	1,17	2,39	0,436
			6	7,25	40,92	14,60	8,48	1,08	1,21	2,44	0,435
			7	8,37	46,77	16,61	9,69	1,08	1,25	2,48	0,435
			8	9,47	52,38	18,52	10,87	1,07	1,29	2,52	0,430

Продовження таблиці А.5

Номер кутика	Основні розміри, мм			F см ²	J_X см ⁴	J_Y см ⁴	J_u min см ⁴	i_u см	x_0 см	y_0 см	tg α
	B	b	d								
8/5	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	1,09	1,13	2,60	0,387
			6	7,55	48,98	14,85	8,88	1,08	1,17	2,65	0,386
8/6	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	1,29	1,49	2,47	0,547
			7	9,42	59,61	28,74	15,58	1,29	1,53	2,52	0,546
			8	10,6	66,88	32,15	17,49	1,28	1,57	2,56	0,544
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	19,7	11,8	1,22	1,26	2,92	0,384
			6	8,54	70,6	21,2	12,7	1,22	1,28	2,95	0,384
			8	11,2	90,9	27,1	16,3	1,21	1,36	3,04	0,380
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	30,6	18,20	1,38	1,42	3,23	0,393
			7	11,1	113,0	35,0	20,83	1,37	1,46	3,28	0,392
			8	12,6	127,0	39,2	23,38	1,36	1,50	3,32	0,391
			10	15,5	154,0	47,1	28,34	1,35	1,58	3,40	0,387
10/6,5	100	65	7	11,2	114,0	38,3	22,77	1,41	1,52	3,24	0,415
			8	12,7	138,3	43,0	25,24	1,41	1,56	3,28	0,414
			10	15,7	155,5	51,7	30,60	1,40	1,64	3,37	0,410
11/7	110	70	6,5	11,4	142	45,6	26,9	1,53	1,58	3,55	0,402
			8	13,9	172	54,6	32,3	1,52	1,64	3,61	0,400
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	1,76	1,80	4,01	0,407
			8	16,0	256	83,0	48,8	1,75	1,84	4,05	0,406
			10	19,7	312	100,0	59,3	1,74	1,92	4,14	0,404
			12	23,4	365	117,0	69,5	1,72	2,00	4,22	0,400
14/9	140	90	8	18,0	364	120	70,3	1,98	2,03	4,49	0,411
			10	22,2	444	146	85,5	1,96	2,12	4,58	0,409
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	2,20	2,23	5,19	0,391
			10	25,3	667	204	121	2,19	2,28	5,23	0,390
			12	30,0	784	239	142	2,18	2,36	5,32	0,388
			14	34,7	897	272	162	2,16	2,43	5,40	0,385
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	2,42	2,44	5,88	0,375
			12	33,7	1 123	324	194	2,40	2,52	5,97	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	1 449	446	264	2,75	2,79	6,50	0,392
			12	37,9	1 568	482	285	2,74	2,83	6,54	0,392
			14	43,9	1 801	551	327	2,73	2,91	6,62	0,390
			16	49,8	2 026	617	367	2,72	2,99	6,71	0,388
25/16	250	160	12	48,3	3 147	1 032	604	3,54	3,53	7,97	0,410
			16	63,6	4 091	1 333	781	3,50	3,69	8,14	0,408
			18	71,1	4 545	1 475	896	3,49	3,77	8,23	0,407
			20	78,5	4 987	1 613	949	3,48	3,85	8,31	0,405

ДОДАТОК Б

Параметри безпечного факторного простору двотаврів (сталь Ст.3, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$)

Таблиця Б.1 – Третя теорія міцності

Номер двотавра	β , кН·м	γ , кН	$[M]$, кН·м	$[Q]$, кН	Q_A , кН
10	7,402	37,758	6,352	30,991	19,385
12	10,626	49,714	9,344	39,881	23,673
14	14,643	60,227	13,072	47,911	27,140
16	19,346	70,878	17,440	56,051	30,693
18	25,201	81,860	22,880	64,658	34,314
18a	28,005	80,166	25,440	64,971	33,516
20	32,140	93,137	29,440	73,600	37,366
20a	35,536	91,513	32,480	74,077	37,127
22	40,276	106,648	37,120	84,091	41,384
22a	44,154	104,441	40,640	84,285	40,831
24	50,100	120,338	46,240	95,097	46,319
24a	55,172	118,225	50,720	95,640	46,526
27	64,026	147,557	59,360	114,515	55,298
27a	70,513	144,836	65,110	115,284	55,602
30	81,030	180,046	75,520	137,373	65,259
30a	89,361	176,713	82,880	138,548	66,071
33	102,367	215,074	95,520	162,549	77,336
36	127,657	252,820	118,880	189,787	92,126
40	163,097	316,526	152,480	232,241	112,335
45	210,216	392,515	196,960	281,236	137,179
50	270,712	494,005	254,240	345,828	169,690
55	346,380	605,383	325,600	416,990	206,528
60	435,470	727,747	409,600	494,526	247,097

ДОДАТОК В
Основні параметри стиснутих стрижнів

1 Коефіцієнти μ приведеної довжини

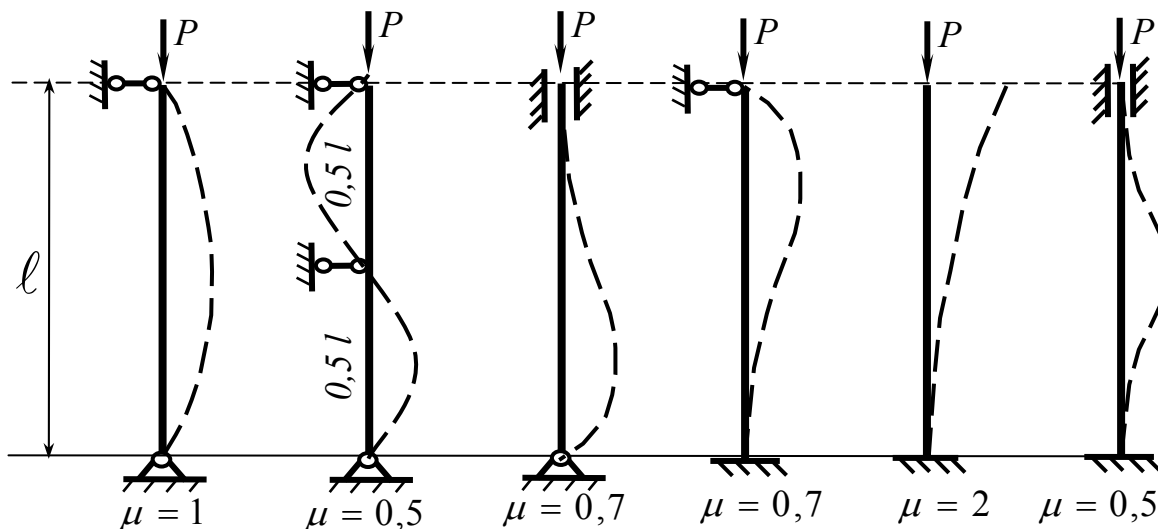


Рисунок В.1

2 Коефіцієнти φ зменшення основного допустимого напруження

Таблиця В.1

Гнучкість λ	сталь Ст 4, 3, 2	сталь Ст5	сталь СПК	чавун	дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Навчальне видання

**ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович,
ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович,
ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович**

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Курс лекцій

Навчальний посібник

**для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки»
денної форми навчання**

Редагування, комп'ютерне верстання І. І. Дьякова

99/2020. Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 19,3.
Обл.-вид. арк. 9,11. Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003