Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

О.Г.Водолазська, С.В.Подлєсний, В.М.Іскрицький

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

Динаміка матеріальної точки

Затверджено
на методичному семінарі кафедри
технічної механіки
Протокол № 7 від 14 лютого 2012 р.

Краматорськ 2012

УДК 531.
ББК 22.21
В-62

Водолазська, О.Г.
В-62 Теоретична механіка. Розділ Динаміка. Динаміка матеріальної точки : навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей / О.Г.Водолазська, С.В.Подлєсний, В.М.Іскрицький. – Краматорськ: ДДМА, 2012. – 104 с.
ISBN

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, методику та приклади розв'язання задач з розділу теоретичної механіки «Динаміка матеріальної точки» для студентів усіх спеціальностей.

УДК 531.
ББК 22.21

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Теоретична механіка, найважливішим розділом якої являється динаміка, – це наукова база багатьох галузей сучасної техніки. Вивчення загальних законів механічного руху збагачує дослідників, вчених та інженерів новими методами, допомагає розкрити справжній зміст різноманітних явищ природи і технічної практики. Динаміка містить багато наукових узагальнень, які допомагають майбутнім інженерам різних спеціальностей правильно розуміти явища, що досліджуються і робити відповідні науково обґрунтовані висновки. Крім того, динаміка є основою таких загальноосвітніх і спеціальних дисциплін, як «Опір матеріалів», «Теорія механізмів і машин», «Гідравліка», «Динаміка машин» та інші, що вивчаються у вищих навчальних закладах (ВНЗ). Знання динаміки потрібні студентам для успішного вивчення профілюючих предметів, а також для творчої інженерної діяльності у промисловому виробництві після закінчення вузу. У динаміці синтезуються та узагальнюються всі положення статики і кінематики і встановлюються найбільш загальні властивості механічного руху матеріальних об’єктів.

Перша частина навчального посібника з динаміки – динаміка матеріальної точки. У ній наведені основі положення і визначення динаміки, викладені начальні закони руху точки, отримані диференціальні рівняння руху вільної і невільної матеріальної точки, сформульована перша і друга задача динаміки і розглянута методика розв’язання другої задачі динаміки.

Значна увага приділена вирішенню другої задачі динаміки на прикладі прямолінійних коливань матеріальної точки. Подані всі види коливань точки, викладена методика розв’язання задач на коливальний рух точки.

І, нарешті, розглянуто рух точки в неінерціальних системах відліку (відносний рух). Подані окремі випадки відносного руху, а також вплив обертання Землі на рівновагу і рух матеріальної точки, а також методика розв’язання задач.

Кожна тема завершується прикладами вирішення задач і завданнями для самоперевірки знань.

1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІКИ

Динаміка (походить від грец. *dynamis – сила*) – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що прикладені до цих об'єктів. До матеріальних об'єктів звичайно відносять: матеріальну точку, тверде тіло, механічну систему (систему матеріальних точок або тіл) тощо.

Матеріальна точка – це модель матеріального тіла будь-якої форми, розмірами якого в умовах заданої задачі можна знехтувати і прийняти його за геометричну точку, що має певну масу.

Тверде тіло – це таке тіло, відстань між двома точками якого не змінюється при будь-яких механічних діях.

Механічна система – це довільна сукупність точок, або суцільних тіл, що певним чином пов'язані між собою, і яка створена для виконання визначеної функції.

Сила – це одна із мір дії одного матеріального об'єкта на інший. Характеризується вона трьома параметрами: величиною (модулем), напрямком і точкою прикладення. Властивості сил, прикладених до твердого тіла, розглядуються в статиці. У динаміці сили оцінюються за їх динамічною дією, тобто за тими змінами, які відбуваються з рухом матеріального об'єкта.

Рух – це зміна положення одного матеріального об'єкта щодо іншого. Об'єкт, відносно якого здійснюється рух, називають *системою відліку*. Рух відбувається у просторі протягом часу.

У класичній механіці, в основу якої покладені аксіоми Ньютона, простір вважається тримірним, евклідовим простором, властивості якого не залежать від матеріальних об'єктів, що рухаються у ньому. Положення точки в такому просторі відносно будь-якої системи відліку визначаються трьома незалежними параметрами (координатами) точки. Час у класичній механіці – універсальний, тобто не пов'язаний з простором і рухом матеріальних об’єктів.

Зі сказаного вище витікає, що відміна між статикою, кінематикою і динамікою полягає в тому, що у статиці розглядаються задачі про еквівалентні перетворення систем сил, що діють на матеріальні об’єкти, і задачі про рівновагу матеріальних об’єктів (абсолютно твердих тіл) під дією прикладених до них сил. У кінематиці рух матеріальних об’єктів визначається тільки з геометричного погляду, незалежно від сил, які спричиняють цей рух. Таким чином, у статиці і кінематиці залишається осторонь зв'язок між силами, що діють на матеріальні об’єкти, і рухом самих об’єктів. Цей зв'язок ураховується тільки в динаміці, предметом якої є вивчення руху матеріальних об’єктів з урахуванням сил, що діють на них.

В основі динаміки лежать аксіоми, відомі під назвою законів Ньютона. Для формулювання цих законів необхідно дати визначення *інерціальних систем відліку*, бо Ньютон вважав, що існує абсолютний нерухомий простір, з яким варто скріпити вихідну інерціальну систему відліку. Саме в таких системах справедливі закони Ньютона і всі наслідки з них. У наш час для вивчення руху об’єктів у Сонячній системі з високим ступенем точності можна обрати геліоцентричну систему, початок якої перебуває в центрі Сонця, а осі спрямовані на нескінченно віддалені зірки. Її використання в якості інерціальної системи, як свідчить досвід, не призводить до помітних похибок. А при розв’язанні більшості інженерних задач досить обрати систему відліку, пов’язану з Землею.

2 ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНИ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

В основі динаміки точки, і взагалі динаміки, лежать закони, а точніше аксіоми, вперше і в найбільш повному і довершеному вигляді сформульовані в 1687 р. Ньютоном у книзі «Математичні початки натуральної філософії». Візьмемо за основу ці аксіоми в їх сучасній формі стосовно до найпростішої моделі матеріального об'єкта – матеріальної точки.

Перший закон (закон Галілея-Ньютона), або закон інерції, описує один з можливих механічних рухів матеріальної точки в умовах повної її ізоляції від впливу на неї інших матеріальних об'єктів.

Матеріальна точка, на яку не діють сили, або діє рівноважна система сил, має здатність зберігати свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху відносно інерціальної системи відліку.

Матеріальна точка, на яку не діють сили, або діє рівноважна система сил, називається *ізольованою матеріальною точкою*.

З першого закону випливає, що кінематичним станом ізольованої матеріальної точки є або рівномірний прямолінійний рух або стан спокою. Такий стан матеріальної точки називається інерціальним (або рухом за інерцією). У разі спокою швидкість точки дорівнює нулю. Таким чином, перша аксіома містить у собі твердження, що матеріальна точка (і будь-які інші матеріальні тіла) мають властивість інерції. Якщо ж рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку відрізняється від рівномірного і прямолінійного, то вона перебуває у взаємодії з матеріальними об'єктами, що їх оточують. Мірою взаємодії матеріальних об'єктів є сила.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними величинами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з іншими матеріальними об'єктами, визначає другий закон Ньютона.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки) установлює залежність прискорення точки від діючої на неї сили.

Прискорення точки відносно інерціальної системи відліку прямо пропорційне величині сили, що діє на точку, і має напрямок цієї сили (рис. 1).

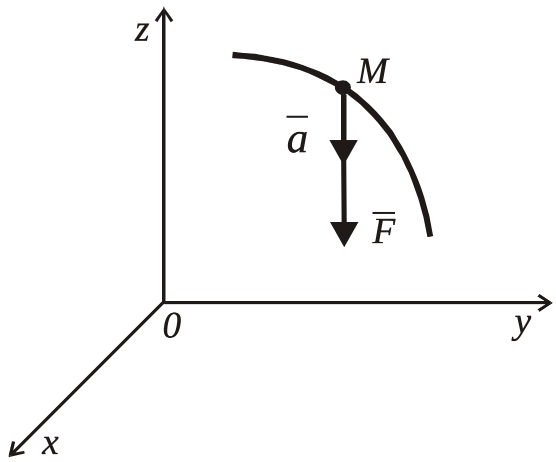

Рисунок 1

В аналітичній формі цей закон має вигляд:

$$m\overline{a} = \overline{F}\ . \tag{1}$$

Додатній коефіцієнт пропорційності m, що характеризує інертні властивості матеріальної точки, називається інертною масою точки. Інертна маса в класичній механіці вважається величиною сталою і залежною тільки від самої матеріальної точки і незалежною від характеристик її руху, тобто швидкості і прискорення. Маса також не залежить від природи сили, прикладеної до точки. Вона та сама для сил тяжіння, сил пружності, електромагнітних сил, сил тертя й інших сил.

Масу звичайно визначають за силою тяжіння P і прискоренням вільного падіння g у поверхні Землі. Відповідно до виразу (1) у цьому випадку маємо:

$$mg = P; \qquad m = \frac{P}{g}. \tag{2}$$

Отже маса в рівнянні (1) є мірою інертності матеріальної точки. Оскільки прискорення g, що входить до формули (2), має різні значення в різних місцях земної поверхні, то вага даної точки не є сталою величиною, тоді як її маса залишається завжди сталою.

Крім того, бачимо, якщо у виразі (1) сила $\overline{F} = 0$, то прискорення $\overline{a} = 0$, тобто матеріальна точка має сталу за величиною і напрямком швидкість відносно інерціальної системи відліку. В основному законі вміщується частина твердження аксіоми інерції.

Третій закон Ньютона (закон дії та протидії) визначає властивість сил взаємодії між двома матеріальними точками з погляду інерціального спостерігача.

Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, рівними за величиною (модулем), і напрямлені вздовж однієї прямої у протилежні боки незалежно від відстані між цими точками (рис. 2).

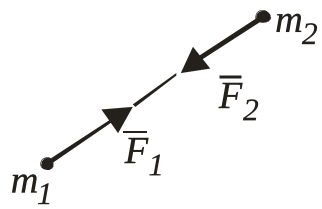

Рисунок 2

З третього закону випливає, що джерело появи сили – це взаємодія однієї матеріальної точки (наприклад, масою m_1) з іншою точкою (масою m_2). При цьому

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2. \qquad (3)$$

Четвертий закон Ньютона (закон незалежності дії сил) має ще назву закону суперпозиції сил. Цей закон не є самостійним, якщо вважати, що сили, які діють на матеріальну точку можна (згідно з відповідною аксіомою статики) замінити за правилом паралелограму на одну рівнодійну силу.

Якщо на матеріальну точку водночас діють декілька сил, то прискорення точки відносно інерціальної системи відліку, отримане від дії кожної окремої сили, не залежить від наявності інших прикладених до точки сил. Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі прискорень, які б мала точка від кожної з цих сил окремо.

З цього закону випливає, що якщо до матеріальної точки прикладена система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \mathbf{K}\,\overline{F}_n$ і кожна з сил надає точці відповідні прискорення $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \mathbf{K}\,\overline{a}_n$, то прискорення точки буде

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \mathbf{K} + \overline{a}_n . \qquad (4)$$

На підставі виразу (1) можемо записати:

$$m\overline{a}_1 = \overline{F}_1; \quad m\overline{a}_2 = \overline{F}_2; \mathbf{K}; \quad m\overline{a}_n = \overline{F}_n . \qquad (5)$$

Поєднуючи (1), (4) і (5), отримаємо:

$$m\left(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \mathbf{K}\,a_n\right) = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \mathbf{K}\,\overline{F}_n, \text{ або } m\overline{a} = \sum \overline{F}_i . \qquad (6)$$

Отже рух матеріальної точки під дією сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \mathbf{K}\,\overline{F}_n$ буде таким самим, як і при дії однієї сили, що дорівнює їх геометричній сумі (рівнодійній силі).

Рівняння (6) називають основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки.

Це рівняння залишається справедливим і для невільної матеріальної точки, на яку накладені в’язі. Треба лише до числа прикладених сил додати ще і сили реакції в’язей.

3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ ВІЛЬНОЇ І НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Матеріальна точка називається вільною, якщо на її рух не накладені ніякі обмеження, тобто у довільний момент часу вона може займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість.

Матеріальна точка називається невільною, якщо внаслідок накладення в’язей вона не може в довільний момент часу займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість, оскільки здійснює рух по деякій поверхні або кривій, чи рухається в деякій заданій області системи відліку.

Використовуючи основний закон динаміки у вигляді (1), можна викласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки в різних системах відліку. А застосувавши аксіому в'язей, можна одержати диференціальні рівняння руху невільної точки так само, як і для вільної, тільки до всіх прикладених до точки сил треба додати сили реакції в'язей. Позначивши рівнодійну всіх заданих сил і реакцій в'язей $\overline{F}$, а масу точки – m, одержуємо:

$$m\overline{a} = \overline{F}. \tag{7}$$

З кінематики точки відомо, що прискорення $\overline{a}$ при векторному способі задавання руху виражається через радіус-вектор $\overline{r}$ (рис. 3):

$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}.$$

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі має вигляд

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}. \tag{8}$$

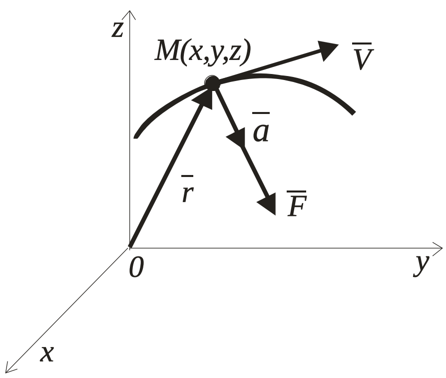

Рисунок 3

Проекції прискорення на координатні осі можна виразити через другі похідні за часом від координат точки, що рухається:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у прямокутній декартовій системі координат мають вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

або $$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z, \tag{9}$$

де $F_x = \sum F_{ix}; \quad F_y = \sum F_{iy}; \quad F_z = \sum F_{iz}$.

Окремі випадки

Якщо відомо, що матеріальна точка рухається в одній і тій же площині, то приймаючи її за координатну площину *Oxy*, маємо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \text{ або } m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y. \tag{10}$$

Тому що $\ddot{z} = 0$, то, отже, $F_z = 0$.

У випадку руху точки вздовж прямої лінії, (вздовж координатної осі *Ox*), одержимо одне диференціальне рівняння прямолінійного руху точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \text{ або } m\ddot{x} = F_x. \tag{11}$$

Тому що при прямолінійному русі $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$, отже $F_y = F_x = 0$.

Для натуральних рухливих осей координат (рис. 4), проеюючі обидві частини виразу (7) на ці осі, одержуємо:

$$ma_t = F_t; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b,$$

де a_t, a_n, a_b і F_t, F_n, F_b – відповідно, проекції прискорення й рівнодіючої сили на дотичну, головну нормаль і бінормаль до траєкторії в розглянутому положенні точки, що рухається. Підкреслимо, що $\overline{F}$ розглядається як рівнодійна системи сил, прикладена до матеріальної точки.

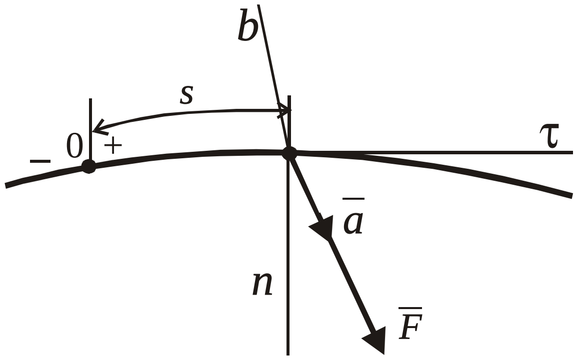

Рисунок 4

З огляду на те, що

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{r}, \quad a_b = 0,$$

де r – радіус кривизни траєкторії.

Диференціальні рівняння руху точки в проекціях на натуральні осі мають вигляд

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2 s}{dt^2} = F_t, \\ m\dfrac{V^2}{r} = F_n, \\ 0 = F_b. \end{cases} \tag{12}$$

Диференціальні рівняння руху точки можна подати і в будь-якій іншій системі координат. Для цього треба знати лише вираз проекцій прискорення на ці осі.

4 ДВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ І ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Використовуючи диференціальні рівняння руху матеріальної точки в тій або іншій системі координат, можна розв'язати дві задачі динаміки точки: пряму (першу) задачу і обернену (другу або основну) задачу.

4.1 Перша задача динаміки

За відомою масою матеріальної точки і законом її руху треба визначити силу, що діє на цю точку (або рівнодійну сил, які діють на точку).

Перша задача динаміки розв'язується шляхом диференціювання рівнянь руху точки.

Дійсно, якщо, наприклад, задані рівняння руху точки в декартовій системі координат:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

то проекції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки (9), тобто:

$$F_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2 f_1}{dt^2};$$
$$F_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2 f_2}{dt^2};$$
$$F_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{d^2 f_3}{dt^2}.$$

Знаючи проекції сили на координатні осі, легко визначити модуль сили і її напрямні косинуси кутів за формулами:

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2};$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{F},x}\right)=\frac{F_x}{F};\quad \cos\left(\widehat{\overline{F},y}\right)=\frac{F_y}{F};\quad \cos\left(\widehat{\overline{F},z}\right)=\frac{F_z}{F}.$$

Якщо рух матеріальної точки задано натуральним способом, тобто траєкторія руху точки і закон її руху задано у вигляді:

$$s=f(t),$$

то проекція сили, що діє на точку, на осі натурального тригранника (натуральні осі) визначається з рівнянь (12), а саме:

$$F_t=m\frac{dV}{dt};\quad F_n=\frac{V^2}{r};\quad F_b=0.$$

Знаючи проекції сили $\overline{F}$ на осі натурального тригранника, величину сили $\overline{F}$ і її напрямні косинуси визначають за формулами:

$$F=\sqrt{F_t^{\,2}+F_n^{\,2}+F_b^{\,2}};$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{F},t}\right)=\frac{F_t}{F};\quad \cos\left(\widehat{\overline{F},n}\right)=\frac{F_n}{F};\quad \cos\left(\widehat{\overline{F},b}\right)=\frac{F_b}{F}.$$

Розв’язання першої задачі динаміки матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

- встановити систему відліку, в якій буде розглядатися рух точки, і зобразити на рисунку точку в довільному положенні в обраній системі відліку (координата точки повинна бути додатною);
- якщо рух точки невільний, то необхідно розглянути також ті тіла (в’язі), які перебувають в контакті з точкою, і зобразити їх на рисунку;
- прикласти до точки всі відомі активні сили;
- користуючись аксіомою про звільнення від в’язей, умовно відкинути в’язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в’язі;
- відповідно до обраної системи відліку скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки;

- визначити за відомим законом руху точки проекції її прискорення на осі координат системи відліку;

- розв'язати системy одержаних рівнянь і визначити необхідні величини.

Приклад 1

Вантаж A, який являє собою конічний маятник (рис.5), підвішений на нитці завдовжки 0,5 м у нерухомій точці O. Цей маятник описує в горизонтальній площині коло, причому нитка утворює з вертикаллю кут $a = 60^o$.

Визначити натяг T нитки і швидкість V вантажу, якщо його маса дорівнюю 2 кг.

Розв'язання

Розглянемо рух вантажу, вважаючи його матеріальною точкою *A*. Оскільки ця точка рухається колом, то доцільно розглядати її рух в натуральних осях координат.

Матеріальна точка *A* невільна, так як на неї накладена в'язь – невагома нерозтяжна нитка *AO*.

Прикладемо до точки *A* силу ваги $m\overline{g}$ і, користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язь і її вплив на рухому точку *A* замінимо реакцією $\overline{T}$, яка спрямована вздовж нитки (від *A* до *O*).

Отже, на точку *A* діють дві сили: $m\overline{g}$ і $\overline{T}$. Точка здійснює рух колом радіуса $R = r = AO\sin a$.

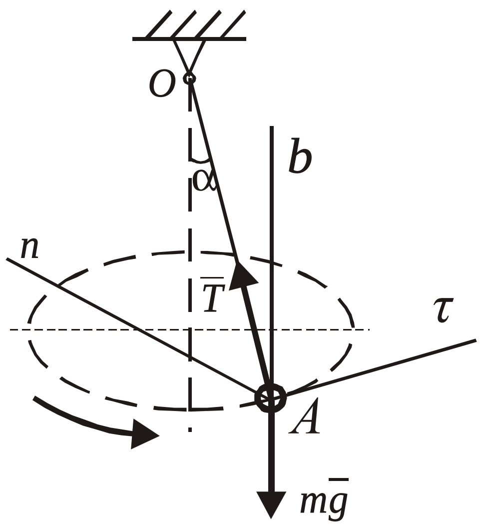

Рисунок 5

Побудуємо в точці A осі натурального тригранника та складемо диференціальні рівняння руху точки у проекціях на ці осі:

$$m\frac{dV}{dt}=0; \quad m\frac{V^2}{r}=T\sin a; \quad 0=T\cos a-mg.$$

З першого рівняння одержуємо:

$$\frac{dV}{dt}=0,$$

звідси $V=const$, тобто рух точки вздовж траєкторії відбудеться зі сталою швидкістю – рівномірний рух.

З третього рівняння визначимо натяг нитки:

$$T=\frac{mg}{\cos a}=\frac{2\cdot 9{,}8}{0{,}5}=39{,}2\ H.$$

На підставі другого рівняння матимемо величину сталої швидкості:

$$V=\sqrt{\frac{r\cdot T\sin a}{m}}=\sqrt{\frac{0{,}5\cdot\sin 60^{0}\cdot 39{,}2\cdot\sin 60^{0}}{2}}=2{,}71\frac{м}{c}.$$

Остання формула буде справедливою для всіх значень кутів a, які знаходяться у діапазоні:

$$-\frac{p}{2}<a<\frac{p}{2}; \quad a\neq 0.$$

Приклад 2

Рух матеріальної точки, маса якої становить 2 кг визначається рівняннями:

$$x=3\cos 2p\ t\ (м); \quad y=4\sin 2p\ t\ (м).$$

Визначити силу, що діє на точку.

Розв’язання

Оскільки рух точки задано координатним способом, то оберемо плоску декартову систему відліку (рис. 6).

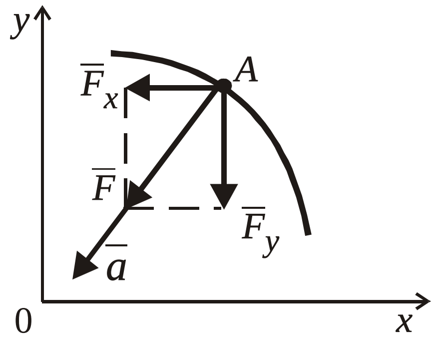

Рисунок 6

Так як рух точки відбувається у горизонтальній площині, то сила ваги $m\bar{g}$ перпендикулярна до цієї площини і на рисунку не зображується. Точка вільна, тому диференціальні рівняння руху точки мають вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y.$$

Знайдемо проекції прискорення точки:

$$\ddot{x} = -12\pi^2 \cos 2\pi t; \quad \ddot{y} = -16\pi^2 \sin 2\pi t.$$

Тоді проекції сили на відповідні осі:

$$F_x = m\ddot{x} = -24\pi^2 \cos 2\pi t; \quad F_y = m\ddot{y} = -32\pi^2 \sin 2\pi t.$$

За цими проекціями і знаходять величину сили і напрямні косинуси, використовуючи наведені вище формули:

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F^2{}_y}; \quad \cos(\widehat{\overline{F}, x}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\widehat{\overline{F}, y}) = \frac{F_y}{F}.$$

Приклад 3

Літак, маса якого 2000 кг, летить горизонтально з прискоренням $5 м/с^2$, маючи в даний момент часу швидкість 200 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і при швидкості 1 м/с дорівнює 0,05 Н.

Знайти рівнодіючу $\overline{F}$ сили тяги гвинта $\overline{F_T}$ і підйомної сили $\overline{N}$, якщо вона утворює з напрямком польоту кут $a = 15^o$ (рис.7)

Запишемо коротко умову задачі.

Дано: $m = 2000$ *кг*, $R = k V^2$, *де* $k = 0{,}05\ \dfrac{кг \cdot сек^2}{м^2}$;

$V = 200$ *м/с*; $a = 5 м/с^2$; $a = 15^o$.

Знайти: F.

Розв'язання

Розглянемо рух літака, вважаючи його матеріальною точкою С. На точку діють такі сили: $m\overline{g}$ – сила ваги літака; $\overline{N}$ – підйомна сила (вектор, протилежний за напрямком $m\overline{g}$); $\overline{F_T}$ – сила тяги гвинта, напрямлена вздовж осі гвинта; сила $\overline{F} = \overline{F_T} + \overline{N}$; $\overline{R}$ – сила лобового опору (вектор, протилежний вектору швидкості). Зазначимо, що всі прикладені до літака сили, крім сили ваги, є змінними, залежними від швидкості, яка в свою чергу теж є величиною змінною, оскільки літак рухається із заданим прискоренням.

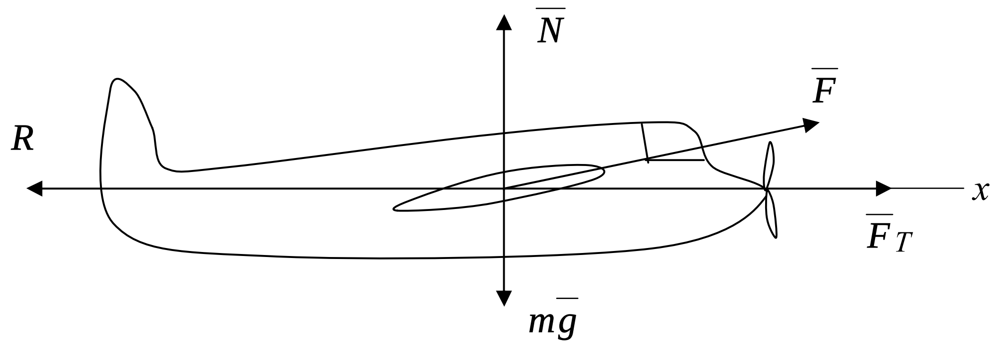

Рисунок 7

Траєкторія центра ваги (точки *С*) літака є пряма лінія, що збігається з напрямком осі *Сх*, вздовж якої відбувається рух у даний момент часу (з даними швидкістю і прискоренням).

Складемо диференціальне рівняння руху точки *C* у проекції на вісь *x*:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} .$$

Оскільки слід знайти лише одну силу F, то одного цього рівняння буде досить для її знаходження:

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha - R .$$

Звідси, враховуючи, що $\ddot{x} = a = 5$ м/с^2, отримаємо:

$$F = \frac{m\ddot{x} + R}{\cos\alpha} = \frac{ma + kV^2}{\cos 15^{0}} = \frac{2000 \cdot 5 + 0{,}05 \cdot 200^2}{0{,}96} = 12500\ H .$$

Причому область застосування знову знаходиться у діапазоні $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4.2 Друга задача динаміки

За відомою масою матеріальної точки і прикладеною до точки силою (або силами, що зводяться до рівнодійної сили) і початковими умовами руху точки треба визначити закон руху точки.

Для розв’язання другої задачі динаміки точки потрібно двічі інтегрувати диференціальні рівняння руху точки.

Сили, що діють на матеріальну точку, можуть бути сталими або змінними. Змінна сила може:

- змінюватись за визначеним законом протягом часу;
- залежати від швидкості точки, що рухається;
- залежати від положення точки, яке визначається її радіусом-вектором (або координатами точки).

У загальному випадку змінна сила, що діє на точку (або рівнодійна кількох сил) може одночасно залежати від усіх 3-х розглянутих параметрів, тобто:

$$\overline{F} = \overline{F}\left(t, \overline{V}, \overline{r}\right).$$

Розглянемо розв’язання задачі у прямокутній декартовій системі координат. Для простоти обмежимося випадком залежності сили і її проекцій на осі координат від часу, координат і швидкості. Диференціальні рівняння руху точки (9) мають вигляд:

$$m\frac{d^2x}{d\,t^2} = F_x\left(t,\, x,\, y,\, z,\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}\right);$$

$$m\frac{d^2y}{d\,t^2} = F_y\left(t,\, x,\, y,\, z,\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}\right);$$

$$m\frac{d^2z}{d\,t^2} = F_z\left(t,\, x,\, y,\, z,\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}\right).$$

Для знаходження рівнянь руху точки в декартових координатах необхідно проінтегрувати систему трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що рішення одного диференціального рівняння другого порядку містить дві довільні сталі інтегрування. Для випадку системи трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку буде шість довільних сталих інтегрування: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Кожна з координат x, y, z точки, що рухається, після інтегрування системи рівнянь (9) залежить від часу t і всіх шести довільних постійних, тобто

$$\begin{cases} x = f_1\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right); \\ y = f_2\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);. \\ z = f_3\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right). \end{cases} \qquad (13)$$

Якщо продиференціювати рівняння (13) за часом, то визначаються проекції швидкості точки на координатні осі:

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = f_1'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_y = \dot{y} = f_2'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_z = \dot{z} = f_3'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \tag{14}$$

Таким чином, завдання сили не визначає конкретного руху матеріальної точки, а зазначає цілий клас рухів, що характеризуються шістьома довільними сталими інтегрування.

Для зазначення конкретного виду руху матеріальної точки треба додатково задати умови, що дозволяють визначити довільні сталі. Такі умови звичайно називають початковими умовами, тобто в якийсь певний момент часу, наприклад при $t_0 = 0$ (рис. 8), задають координати точки, яка рухається x_0, y_0, z_0, і проекції її швидкості V_{0x}, V_{0y}, V_{0z}:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \dot{x} = V_{0x},\ \dot{y} = V_{0y},\ \dot{z} = V_{0z}. \tag{15}$$

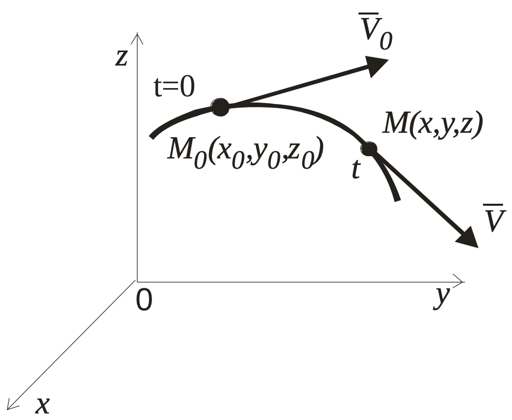

Рисунок 8

Використовуючи ці початкові умови й формули (13) і (14), одержуємо шість наступних рівнянь для визначення шести довільних сталих інтегрування

$$\begin{cases} x_0 = f_1(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y_0 = f_2(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z_0 = f_3(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_{0x} = \dot{x}_0 = f_1(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_{0y} = \dot{y}_0 = f_2(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ V_{0z} = \dot{z}_0 = f_3(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \qquad (16)$$

Якщо система рівнянь (16) задовольняє умовам можливості її розв’язання, то з неї можна визначити всі шість довільних сталих, а саме:

$$\begin{aligned} C_1 &= f_1(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_2 &= f_2(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_3 &= f_3(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_4 &= f_4(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_5 &= f_5(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_6 &= f_6(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

Підставляючи значення цих сталих інтегрування у загальний розв’язок, що відповідає початковим умовам, отримаємо:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t; x_0; y_0; z_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0; \dot{z}_0); \\ y &= f_2(t; x_0; y_0; z_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0; \dot{z}_0); \\ z &= f_3(t; x_0; y_0; z_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0; \dot{z}_0). \end{aligned}$$

Одержані рівняння визначають єдиний спосіб розв’язку системи диференціальних рівнянь руху точки. При цьому зауважимо, що інтегрування такої системи пов’язане з певними математичними трудношами і може бути здійснене в квадратурах (шляхом обчислення інтегралів) тільки в деяких окремих випадках руху матеріальної точки. До цих випадів можна віднести рух точки у площині і прямолінійних рух точки.

При русі точки в площині *Oxy* маємо два диференціальних рівняння руху. До розв’язання цих рівнянь входять чотири довільні сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов:

$$t = 0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ \dot{x}_0 = V_{0x},\ \dot{y}_0 = V_{0y}.$$

У випадку прямолінійного руху точки є тільки одне диференціальне рівняння, і до його розв’язання входять дві довільні сталі. Для їхнього визначення необхідно задати початкові умови:

$$t = 0,\ x = x_0,\ \dot{x}_0 = V_{0x}.$$

5 ОСНОВНІ ВИДИ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ ТОЧКИ

Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки уздовж осі *Ox*, відповідно до виразу (11), має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, V), \tag{17}$$

якщо розглядається випадок залежності тільки від часу, координати та швидкості.

Початкові умови можна задати у формі:

$$t = 0,\ x = x_0,\ \dot{x} = V_{0x}.$$

Найбільш важливі випадки прямолінійного руху матеріальної точки мають місце тоді, коли сила $\overline{F}$ постійна, або залежить тільки від часу, або від координати x, або від швидкості V. Якщо сила постійна, маємо випадок рівнозмінного руху з постійним прискоренням. Від часу сила звичайно залежить, коли її змінюють шляхом регулювання, наприклад регулюють силу тяги літака зміною режиму його двигунів.

Силу, що залежить від координати x, можуть створити стисла або розтягнута пружина та інші пружні тіла при їх деформації. Сили, що залежать від швидкості руху – це, насамперед, сили опору. Коли матеріальна точка рухається в будь-якому середовищі, наприклад у повітрі, воді і т.п.

Відзначимо, що в перелічених випадках інтегрування диференційного рівняння (17) виконується найбільш просто, і його можна довести до кінця у квадратурах. У загальному випадку, якщо сила одночасно залежить від часу t, координати x і швидкості V, у більшості випадків диференціальне рівняння можна проінтегрувати лише приблизно.

5.1 Випадок дії сталої сили

Розглянемо, наприклад, вільний рух матеріальної точки в однорідному полі тяжіння за відсутністю опору повітря і зблизу поверхні Землі.

Нехай точка M, маса якої дорівнює m, рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією тільки однієї сили тяжіння $\overline{P} = m\overline{g}$. Побудуємо розрахункову схему руху точки M (рис.9).

В обраній системи відліку диференціальні рівняння руху точки M, записуються так:

$$m\ddot{x} = 0;\ m\ddot{y} = 0;\ m\ddot{z} = -mg\ .$$

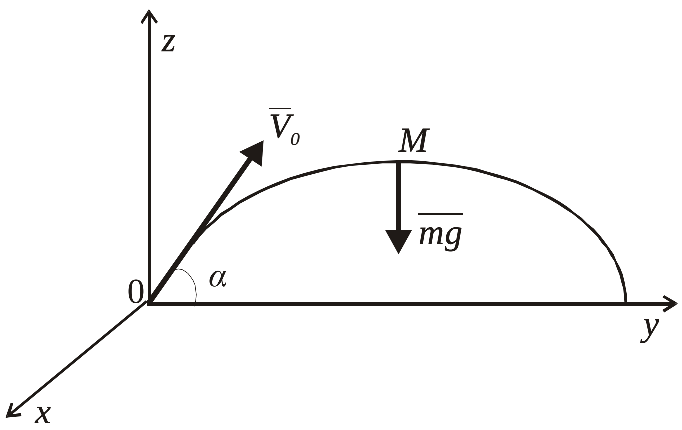

Рисунок 9

Інтегруючи ці рівняння, здобудемо перші інтеграли руху точки M :

$$\dot{x} = C_1;\ \dot{y} = C_2;\ \dot{z} = -\int mgdt + C_3.$$

Інтегруючи ще раз отримані вирази, здобудемо загальний розв’язок диференційних рівнянь руху точки M :

$$x = \int C_1 dt + C_4;\ \ y = \int C_2 dt + C_{5;}\ \ z = -\int\left(\int mg dt + C_3\right)dt + C_6 .$$

Сталі інтегрування $C_1, C_2, ..., C_6$ у кожному конкретному випадку руху точки M визначається з початкових умов її руху.

5.2 Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що змінюється з часом, тобто $\overline{F}(t)$

Для того, щоб матеріальна точка рухалася вздовж прямої лінії, необхідно і достатньо, щоб вектор сили, що діє на неї, був би під час руху паралельним вектору початкової швидкості точки. Якщо ж початкова швидкість точки дорівнює нулю, то рух буде здійснюватися вздовж прямої, напрямок якої збігається з напрямком вектора сили.

Якщо пряму, вздовж якої рухається матеріальна точка, взяти за вісь x, то диференціальне рівняння руху точки набуде вигляду

$$m\ddot{x} = F_x(t),\ \text{звідки}\ \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)dt + C_1.$$

Інтегруючи ще раз останній вираз, матимемо

$$x = \frac{1}{m}\int\left(\int F_x(t)dt + C_1\right)dt + C_2 \ ,$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

5.3 Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від положення точки, тобто $F_x(x)$

Якщо пряму, вздовж якої рухається матеріальна точка, взяти за вісь x, то диференціальне рівняння руху точки набирає вигляду

$$m\ddot{x} = F_x(x).$$

Виконаємо перетворення в лівій частині рівняння, помноживши її на одиницю у вигляді $1 = \frac{dx}{dx}$:

$$\ddot{x} = \ddot{x} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = V_x \frac{dV_x}{dx} = \frac{\dot{x}\, d\dot{x}}{dx}.$$

Тоді диференціальне рівняння руху точки набуде вигляду:

$$m\frac{\dot{x}\, d\dot{x}}{dx} = F_x(x).$$

Помножуючи цей вираз на dx і проводячи відповідні перетворення, здобудемо $d\left(\dot{x}^2\right) = \frac{2}{m} F_x(x)\, dx$.

Після інтегрування знайдемо

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} \int F_x(x)\, dx + C_1,$$

звідки

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m} \int F_x(x)\, dx + C_1},$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)\,dx + C_1}.$$

Після відокремлення змінних та інтегрування цього рівняння остаточно здобудемо

$$t = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)\,dx + C_1}} + C_2.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно *x*, знайдемо залежність *x* від часу, а сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

5.4 Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від швидкості точки, тобто $F(\overline{V})$

Якщо пряму, вздовж якої рухається матеріальна точка, взяти за вісь *x*, диференціальне рівняння руху точки набуває вигляду

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}).$$

Існує два способи інтегрування диференціального рівняння руху точки.

1 Запишемо диференціальне рівняння руху у вигляді

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x}).$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\int\frac{m\,d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C = t.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, знайдемо швидкість точки як функцію часу:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t)\text{, або } dx = f(t)\,dt\,.$$

Інтегруючи цей вираз, матимемо

$$x = \int f(t)\,dt + C_2.$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

2 Запишемо диференціальне рівняння руху точки у вигляді

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x}).$$

Відокремлюючи змінні, здобудемо

$$\frac{m\dot{x}\,d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dx\,.$$

Звідси, інтегруючи, маємо

$$m\int \frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C_1 = x.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, знайдемо швидкість точки як функцію від x:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)\,, \quad \text{або} \quad \frac{dx}{f(x)} = dt.$$

Інтегруючи цей вираз, матимемо

$$t=\int\frac{dx}{f(x)}+C_1.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, знайдемо залежність x від часу і сталих інтегрування. Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

Друга (основна) задача динаміки при невільному русі матеріальної точки поділяється на дві задачі і полягає в тому, щоб, знаючи діючі на матеріальну точку активні сили, визначити: а) закон руху точки; б) реакцію накладеної в’язі.

Обидві задачі динаміки невільної матеріальної точки розв’язуються за допомогою диференціальних рівнянь (9) або (12), в яких рівнодійна всіх заданих сил і реакцій в’язей позначена $\overline{F}$.

5.5 Методика розв’язання другої задачі динаміки матеріальної точки і приклади розв’язання задач

Розв’язання другої (основної) задачі динаміки матеріальної точки треба виконувати в такій послідовності:

- встановити систему відліку, в якій буде розглядатися рух матеріальної точки; записати початкові умови її руху і зобразити точку на рисунку в довільному положенні відносно обраної системи відліку;
- якщо рух матеріальної точки невільний, то необхідно розглянути також ті тіла (в’язі), які перебувають в контакті з точкою, і зобразити їх на рисунку;
- прикласти до точки всі активні сили;
- користуючись аксіомою про звільнення від в’язей, відкинути умовно в’язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в’язі;
- скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки відповідно до обраної системи відліку;

- провести інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і за початковими умовами руху точки визначити сталі інтегрування;
- з одержаних рівнянь визначити необхідні величини і проаналізувати отримані результати.

Приклад 4. Сила залежить від часу.

Вантаж вагою $\overline{P}$ *починає рухатись із стану спокою вздовж гладенької горизонтальної поверхні під дією сили* $\overline{F}$*, значення якої збільшується пропорційно часу за законом* $F = kt$.

Визначити закон руху точки.

Розв'язання

Оберемо початок відліку *O* в початковому положенні вантажу, який подалі будемо вважати матеріальною точкою. Спрямуємо вісь *Ox* у бік руху матеріальної точки (рис.10).

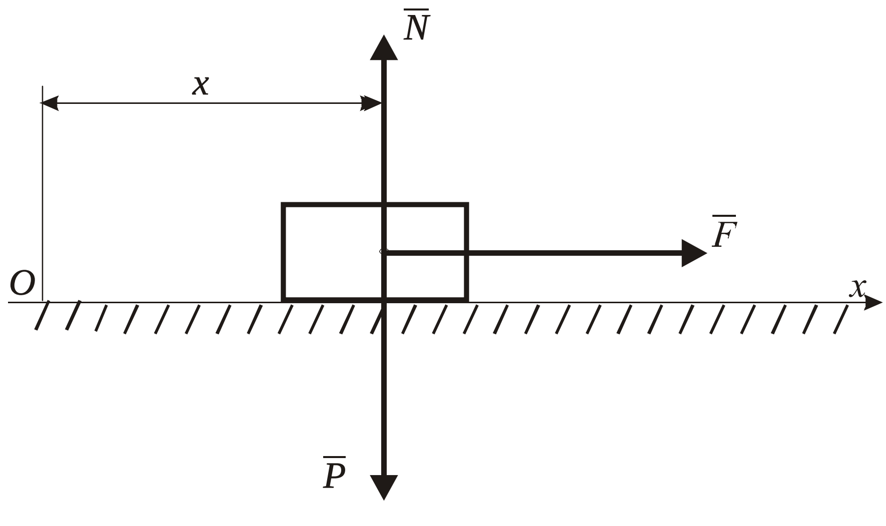

Рисунок 10

Тоді початкові умови будуть такими:

при $t = 0$; $x_0 = 0$; $V_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Зображуємо точку в довільному положенні, а далі діючі на точку сили $\overline{P}$ (вона дорівнює $m\overline{g}$), $\overline{F}$, а також нормальну реакцію $\overline{N}$ площини.

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m\ddot{x}=\sum F_{i\,x};$$

$$m\ddot{x}=F;\ \text{або, враховуючи, що}\ \ddot{x}=\frac{dV_x}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

$$m\frac{dV}{dt}=kt\,.$$

Помножимо обидві частини рівняння на dt і розподілимо змінні:

$$mdV=ktdt,\ \text{тут}\ m=\frac{P}{g}\,.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$V=\frac{kg}{P}\frac{t^2}{2}+C_1\,.$$

З урахуванням початкових умов знайдемо $C_1=0$.

Тоді замінюючи в отриманому результаті $V=\dfrac{dx}{dt}$, будемо мати:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{kg}{2P}t^2\,.$$

Знову помножимо обидві частини рівності на dt і розподілимо змінні:

$$dx=\frac{kg}{2P}\,t^2dt\,.$$

Інтегруючи частинами, знайдемо:

$$x=\frac{kg}{2P}\frac{t^3}{3}+C_2\,.$$

Підстановка початкових умов дає $C_3 = 0$. І остаточно отримуємо закон руху точки у цьому випадку

$$x = \frac{kg}{6P} t^3.$$

Таким чином, пройдений матеріальною точкою шлях буде зростати пропорційно кубу часу.

Приклад 5. Сила залежить від швидкості.

Човен, маса якого $m = 40$ *кг, штовхають, надаючи тому початкову швидкість* $V_0 = 0{,}5$ *м/с.*

Вважаючи силу опору води (при малих швидкостях) пропорційною швидкості, тобто $R = \mu V$, *де* $m = 9{,}1$, *визначити через який час* t *швидкість човна зменшиться у два рази і який шлях пройде човен за цей час.*

Розв’язання

Оберемо початок відліку O в початковому положенні човна, який надалі будемо вважати матеріальною точкою, і спрямуємо вісь у бік руху точки (рис 11).

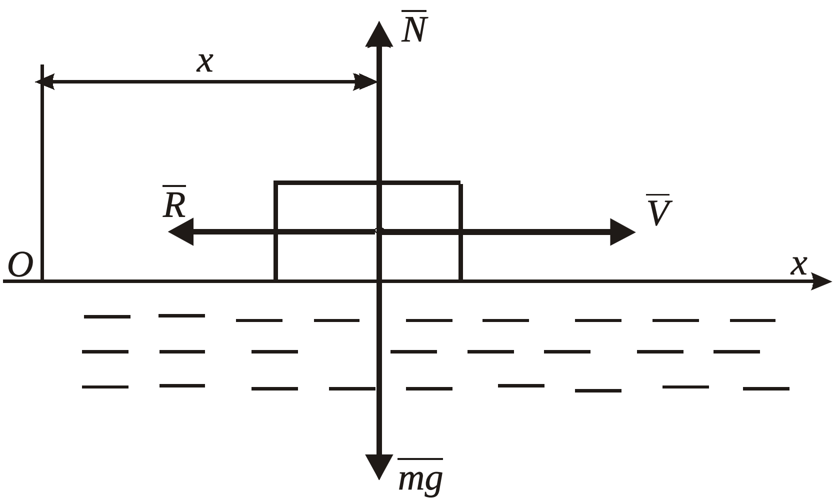

Рисунок 11

Початкові умови в цьому випадку будуть такими:

при $t = 0$; $x_0 = 0$; $V_{0x} = V_{01} = \dot{x}_0 = 0{,}5$ м/с.

Зображуємо точку (човен) в довільному положенні, а потім всі діючі на точку сили: $m\bar{g}$, $\bar{R}$ і $\bar{N}$.

Зауважимо, що ніякі інші сили на точку не діють. Сила, яка надала точці поштовх, діяла на неї до моменту $t=0$. Результат дії урахований заданою початковою швидкістю $V_0 = 0{,}5$ м/с.

Складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки у проекції на вісь x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \text{ або: } m\ddot{x} = -R, \text{ тобто } m\frac{dV}{dt} = -mV.$$

Знову, як і у попередньому прикладі, розподіляємо змінні і інтегруємо частинами:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{m}{m}V;$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{m}{m}\,dt;$$

$$\ln V = -\frac{m}{m}t + \ln C_1;$$

$$\ln V - \ln C_1 = -\frac{m}{m}t;$$

$$\ln\frac{V}{C_1} = -\frac{m}{m}t;$$

$$\frac{V}{C_1} = e^{-\frac{m}{m}t},$$

або

$$V = C_1 e^{-\frac{m}{m}t}. \qquad \text{(a)}$$

Із початкових умов: при $t=0$, $V_0 = 0{,}5$, то 0,5=C_1.

Для знаходження часу t зручніше скористатися передостаннім рівнянням, враховуючи, що $t=t$, $V = 0{,}5V_0$. Тоді:

$$\ln \frac{V}{0,5} = \frac{m}{m} t\,,$$

$$\ln \frac{0,25}{0,5} = -\frac{m}{m} t,$$

або, враховуючи, що час не може буде від’ємним, помножимо рівняння на (-1), отримаємо:

$$\ln \frac{0,5}{0,25} = +\frac{9,1}{40} t\ .$$

Так, як $\ln 2 == 0,69,$ то

$$t\ = \frac{40 \cdot 0,69}{9,1} = 3c.$$

Для знаходження пройденого шляху повернемось до рівняння у вигляді (а):

$$V = C_1 e^{-\frac{m}{m} t};$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,5e^{-\frac{m}{m} t};$$

$$dx = 0,5e^{-\frac{m}{m} t} dt\ .$$

Після інтегрування:

$$x = -\frac{m}{m} 0,5e^{-\frac{m}{m} t} + C_2\,.$$

Із початкових умов: t=0, то $x_0 = 0$.

$$0 = -\frac{40}{9,1} \cdot 0,5 + C_1;\ C_1 = 2,2,\ \text{то}$$

закон руху точки має вигляд:

$$x = -2{,}2 \cdot e^{-0{,}22t} + 2{,}2.$$

Тоді при $t = t \ = 3c$ пройдений шлях буде:

$$S = -2{,}2 \cdot e^{-0{,}22 \cdot 3} + 2{,}2 = 1{,}1\text{м}.$$

Приклад 6. Сила залежить від відстані.

Лижник М (рис.12) масою $m = 80кг$ відштовхується від деякого центра 0 з силою F, що обернено пропорційна кубу відстані, вважаючи, що його рух відбувається вздовж горизонтальної осі х. У початковий момент часу відомі: відстань $OM_0 = 5м$, швидкість $V_0 = 2$ м/с, спрямована вздовж лінії руху лижника під дією сили відштовхування.

Знайти закон руху лижника.

Розв’язання

Центр відштовхування *О* оберемо за початок системи відліку. Вісь *х* спрямуємо вздовж руху й у бік руху Встановимо початкові умови: $t = 0;\ x_o = 5м;\ \dot{x}_o = V_o = 1 м/c$.

Приймемо лижника за матеріальну точку *М*. На точку діють сили $m\overline{g}$, $\overline{F}$, $\overline{R}$ і $\overline{N}$, причому сила $\overline{F}$ спрямована вздовж осі *х*. Модуль цієї сили обернено пропорційний кубу відстані тобто $F = \dfrac{k}{x^3}$.

Значення коефіцієнта k можна визначити із початкових умов:

$F_0 = 40$, коли $x_0 = 5м$, тоді:

$$k = Fx^3 = 40 \cdot 5^3 = 5000H \cdot м^3.$$

Складаємо диференційне рівняння руху точки вздовж осі *х*:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix};\ m\ddot{x} = F;\ m\ddot{x} = \frac{k}{x^3}$$

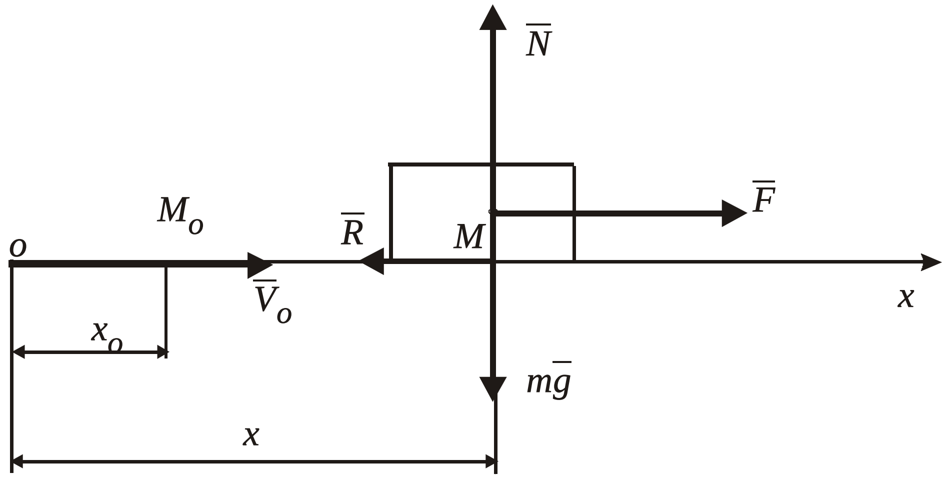

Рисунок 12

Знову вважаємо, що

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV}{dt}; \quad m\frac{dV}{dt} = \frac{k}{x^3}.$$

Останнє рівняння містить змінну x, крім V і t. Виключимо параметр t, скориставшись наведеним у підрозділі 5.3 перетворенням:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}.$$

Тоді диференціальне рівняння набуде вигляду:

$$V\frac{dV}{dx} = \frac{k}{mx^3}.$$

Розподілимо змінні:

$$VdV = \frac{k}{m}\frac{dx}{x^3}.$$

При інтегруванні рівняння можна скористатися визначеним інтегралом (тоді не треба буде шукати сталі інтегрування) зі змінною верхньою межею. При зміненні швидкості від V_0 до V координати точки змінюються від x_0 до x, тоді:

$$\int_{V_0}^{V} VdV = \frac{k}{m}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^3}$$

і далі

$$\left.\frac{V^2}{2}\right|_{V_0}^{V} = -\left.\frac{k}{2mx^2}\right|_{x_0}^{x},$$

або

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = \frac{k}{2m}\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2}\right),$$

звідси

$$V^2 = V_0{}^2 + \frac{k}{m}\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Підставимо числові значення k, m, V_0, x_0 і отримаємо:

$$V^2 = 2 + \frac{5000}{80}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$V = \sqrt{4{,}5 - \frac{62{,}5}{x^2}}.$$

Щоб знайти рівняння руху точки $x = f(t)$, виконаємо деякі перетворення:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{4{,}5 - \frac{62{,}5}{x^2}} = \frac{\sqrt{4{,}5}\cdot\sqrt{x^2 - \frac{62{,}5}{4{,}5}}}{x};$$

Розподілимо змінні:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2-13{,}89}}=\sqrt{4{,}5}\cdot dt.$$

Ліву частину проінтегруємо у межах від x_0 до x, а праву – від нуля до t.

$$\int_{x_0}^{x}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-13{,}89}}=\sqrt{4{,}5}\cdot\int_0^t dt,$$

$$\left.\sqrt{x^2-13{,}89}\right|_{x_9}^{x}=\left.2{,}12t\right|_0^t.$$

Підставимо задані значення меж:

$$\sqrt{x^2-13{,}89}-\sqrt{25-13{,}89}=2{,}12t;$$

$$\sqrt{x^2-13{,}89}-\sqrt{11{,}11}+2{,}12t;$$

$$x^2-13{,}89=11{,}11+2\sqrt{11{,}11}\cdot 2{,}12t+4{,}5t^2.$$

Звідси знаходимо закон руху точки:

$$x=\sqrt{25+14{,}13t+4{,}5t}\ (м).$$

Інший цікавий приклад інтегрування диференціальних рівнянь руху точки, коли сила залежить від відстані, швидкості і часу, має місце у випадку коливального руху матеріальної точки. Але цей випадок доцільно розглянути окремим параграфом, як і випадок криволінійного руху точки.

6 РОЗВ'ЯЗАННЯ ДРУГОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ У ВИПАДКУ КРИВОЛІНІЙНОГО РУХУ ТОЧКИ

У випадку криволінійного руху точки основна задача динаміки вирішується за допомогою диференціальних рівнянь, отриманих у розділі 3. Якщо задача розв'язується в прямокутних декартових координатах, тобто за допомогою рівнянь (9), то початкові умови, які визначають положення і швидкість точки в початковий момент часу $t=0$, задають у вигляді: при $t=0$, $x=x_0$, $z=z_0$, $V_x=V_{x0}=\dot{x}_0$; $V_y=V_{y0}=\dot{y}_0$; $V_z=V_{z0}=\dot{z}_0$.

Проінтегрувавши рівняння (9), знаходять координати *x, y, z* точки, яка рухається, як функцію часу t, тобто визначають закон руху точки..

Конкретна послідовність вирішення задачі наведена у наступному прикладі про рух точки, яка кинута під кутом до горизонтальної площини і переміщується в одному полі тяжіння (див.5.1). Ця задача відома під назвою балістична задача.

Розглянемо рух тіла, яке кинули з початковою швидкістю $\overline{V}_0$, що спрямована під кутом a до горизонтальної площини, вважаємо тіло матеріальною точкою, яка має масу *m.* Опором повітря нехтують, а поле тяжіння вважають однорідним ($m\overline{g}=const$), вважаючи, що дальність польоту і висота траєкторії малі у порівнянні з радіусом Землі.

Оберемо початок координат *O* в початковому положенні точки. Спрямуємо вісь *Oy* вертикально вгору; горизонтальну вісь *Ox* розташуємо у площині, що проходить через вісь *Oy* і вектор $\overline{V}_o$, а вісь *Oz* проведемо перпендикулярно першим двом осям. Тоді кут між вектором $\overline{V}_o$ і віссю *Ox* становить a .

Зобразимо точку М в довільному положенні. На неї діє лише одна сила тяжіння $\overline{P}=m\overline{g}$ (рис.13).

Складемо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на обрані осі координат:

$$m\ddot{x}=0; \quad m\ddot{y}=-m\overline{g}; \quad m\ddot{z}=0, \text{ або}$$

$$\frac{dV_x}{dt}=0; \qquad \frac{dV_y}{dt}=-g; \qquad \frac{dV_z}{dt}=0.$$

Помножимо обидві частини цих рівнянь на dt і проінтегруємо по частинах. Отримаємо:

$$V_x=C_1; \qquad V_y=-gt+C_2; \qquad V_z=C_3.$$

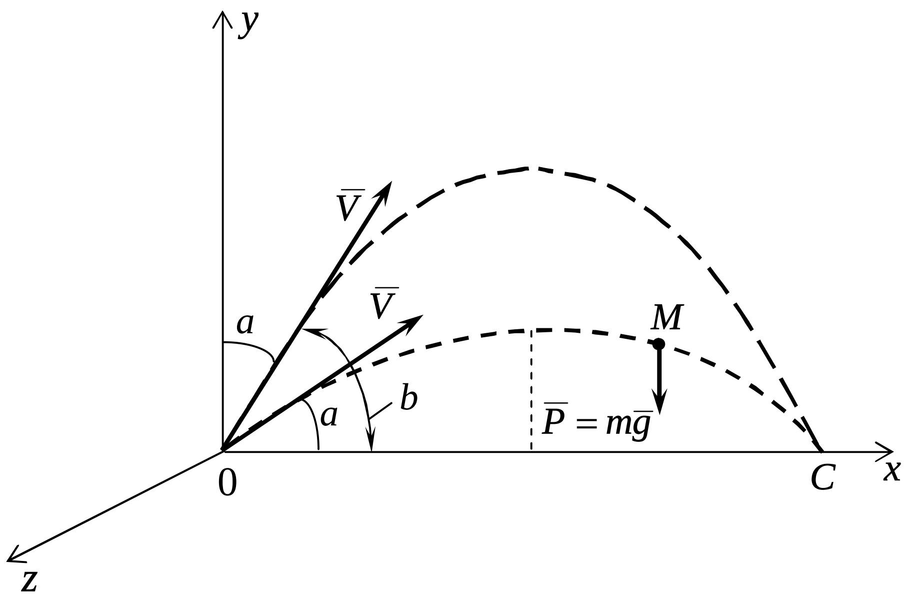

Рисунок 13

Початкові умови мають вигляд:

$$t = 0; \qquad x_o = 0; \qquad y_o = 0; \qquad z_o = 0;$$

$$V_{0x} = V_0 \cos a; \quad V_{0y} = V_0 \sin a; \qquad V_{0z} = 0.$$

Із наведених початкових умов отримаємо:

$$C_1 = V_0 \cos a; \quad C_2 = V_0 \sin a; \qquad C_3 = 0.$$

Підставимо сталі інтегрування у знайдені раніше розв'язання і, замінюючи $V_x = \dfrac{dx}{dt}$ і т.д., дійдемо до рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos a; \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \sin a - gt; \qquad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Інтегруючи ці рівняння, отримаємо:

$$x = V_0 t \cos a + C_4; \quad y = V_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2} + C_5; \qquad z = C_6.$$

Підстановка початкових умов дає, що $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, і остаточно знаходимо рівняння руху точки M у вигляді:

$$x = V_0 t \cos a; \qquad y = V_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2}; \quad z = 0. \tag{18}$$

Із останнього рівняння витікає, що рух точки відбувається у площині Oxy.

З рівнянь (18) можна методами кінематики визначити всі характеристики заданого руху.

Траєкторія

Вилучивши з перших двох рівнянь (18) час t, отримаємо рівняння траєкторії точки

$$y = xtga - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 a} \cdot x^2. \tag{19}$$

Це рівняння параболи з віссю, яка паралельна осі *Oy*. Таким чином: *кинута під кутом до горизонтальної площини матеріальна точка рухається в безповітряному просторі за параболою*.

Горизонтальна дальність

Визначимо горизонтальну дальність, тобто відстань *OC* вздовж осі *Ox*.

Припускаючи в рівності (19) y=0, знайдемо точки перетину траєкторії з віссю *Ox*.

Із рівняння

$$x\left(tga - \frac{gx}{2V_0^2 \cos^2 a}\right) = 0,$$

отримаємо

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{g}\left(2V_0^2 \cos^2 a \cdot tga\right).$$

Перше рішення дає точку *O*, а друге – точку *C*.

Таким чином горизонтальна дальність *L*:

$$L = \frac{V_0^2}{g} \sin 2a . \qquad (20)$$

Із формули (20) бачимо, що така ж сама горизонтальна дальність буде і при куті b, для якого: $2b = 180^{\circ} - 2a$, тобто $b = 90^{\circ} - a$.

Із цього витікає, що при заданій початковій швидкості $\overline{V_0}$ в точку С можна потрапити двома траєкторіями: настільною ($a < 45°$) і навісною ($a > 45°$).

При заданій початковій швидкості $\overline{V_0}$ максимальна горизонтальна дальність (при відсутності опору повітря) буде, коли $\sin 2a = 1$, тобто при куті $a = 45°$.

Висота траєкторії

Якщо в рівнянні (19) припустити, що $x = \frac{L}{2} = \frac{V_0^2}{g} \sin a \cos a$, то можна визначити висоту *H* траєкторії:

$$H = \frac{V_0}{2g} \sin^2 a \; . \qquad (21)$$

Час польоту

Із першого рівняння системи (18) витікає, що повний час польоту *T* визначається рівністю

$$L = V_0 T \cos a .$$

Підставимо значення L із (20) і отримаємо:

$$T = \frac{2V_0}{g} \sin a \; . \qquad (22)$$

Отримані результати знаходять деяке використання, наприклад, в зовнішній балістиці для оцінки того, як змінюється дальність польоту при зміні кута a, чи швидкості $\overline{V_0}$ на досить незначну величину, або ж для орієнтовних оцінок у випадках, аналогічних наведеному в наступному прикладі.

Під час Другої світової війни німецькі снаряди ФАУ-2 після їх вертикального запуску мали на висоті 20км швидкість $V_o \approx 1700\,м/с$ *і кут* $a = 45°$ *(обертання снаряда здійснювалось за допомогою спеціальних приладів). Далі політ фактично відбувався як політ у безповітряному просторі і на висотах, для яких можна приблизно вважати* $\overline{P} = const$. *Тоді з формул (19)-(20) повинно бути:* $L \approx 300км$; $H \approx 75км$; $T \approx 245с$.

Ці результати дуже близькі до тих, яки отримували для цих снарядів фактично.

7 ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

Варіант 1

1 Дати визначення динаміки.

2 Сформулювати третій закон динаміки (про сили дії та протидії).

3 Записати диференціальне рівняння руху точки у векторній формі.

4 Сформулювати другий закон динаміки (закон Ньютона).

5 Точка рухається вздовж горизонтальної осі x під дією горизонтальної сили $F = 3V(H)$. Знайти закон змінення швидкості $V = f(t)$, якщо $V_0 = 10м/с$.

Варіант 2

1 Дати визначення матеріальної точки.

2 Сформулювали четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил).

3 Записати диференціальне рівняння руху точок у координатній формі.

4 Сформулювати першу задачу динаміки.

5 Точка рухається вздовж горизонтальної осі x під дією горизонтальної сили $F = 2x(H)$.Знайти залежність $V = f(x)$, якщо $x_0 = 2м?$ $V_0 = 1м/с$.

Варіант 3

1 Дати визначення сили.

2 Сформулювати перший закон динаміки (закон інерції).

3 Записати диференціальне рівняння руху точки у проекціях на натуральні осі.

4 Сформулювати другу задачу динаміки.

5 Точка рухається вздовж горизонтальної осі x під дією горизонтальної сили $F = 2t(H)$. Знайти закон змінення руху $V = f(t)$, якщо $V_0 = 2 м/с$.

8 РОЗВ'ЯЗАННЯ ДРУГОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ У ВИПАДКУ ПРЯМОЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Коливання – це рухи або процеси, які періодично повторюються через певні проміжки часу. Коливання властиві багатьом явищам природи: пульсує випромінювання зірок; з високим ступенем періодичності обертаються планети Сонячної системи; рух Місяця спричинює припливи і відпливи на Землі; вітри збурюють коливання і хвилі на поверхні водоймищ тощо.

У техніці коливання виконують визначені функції (маятник, коливальний контур, генератор, генератор коливання та ін.), або виникають як неминучий вияв фізичних властивостей (вібрації частин машин і споруд, нестійкість і вихрові потоки при русі тіл у рідинах і газах тощо). За деяких умов коливання можуть сягати значних величин і бути необхідними для відбування певних процесів. Необхідність виявлення цих умов і становлення того, яким чином коливання можна утримати в допустимих межах, є однією з причин визначення теорії прямолінійних коливань матеріальної точки. Іншою причиною є те, що в теорії прямолінійних коливань матеріальної точки відображена друга (основна) задача динаміки матеріальної точки, тобто задача, коли за відомими силами, що діють на точку, і за початковими умовами її руху визначається закон руху точки. Отже, при вивченні прямолінійного коливального руху матеріальної точки набувають навичок інтегрування диференціальних рівнянь руху точки залежно від характеру сил, що спричинюють її коливання. При цьому розрізняють коливання вільні, або власні, згасаючі і змушені.

Під час вивчення коливань буде розглянутий випадок інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки, коли на точку діє сила, що залежить від положення точки. При вивченні згасаючих коливань буде розглянуто випадок, коли на точку крім сили, що залежить від положення точки, буде діяти ще сила, що залежить від швидкості точки. Під час вивчення змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища буде розглянуто випадок, коли крім зазначених вище сил на матеріальну точку буде діяти ще змінна в часі періодична сила.

При вивченні змушених коливань матеріальної точки за наявності опору середовища буде розглянуто випадок інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки, коли на неї одночасно діятимуть три сили: сила, що залежить від швидкості точки, і сила, що є періодичною функцією часу.

8.1 Вільні коливання матеріальної точки

Вільними, або власними, коливаннями матеріальної точки називається рух точки, який відбувається під дією відновлювальної сили.

Джерелом відновлювальної сили можуть бути різні пружні тіла, з якими взаємодіє дана точка, наприклад розтягнена або стиснена пружина. *Відновлювальна сила, величина якої пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, називається силою пружності.* На підставі закону Гука сила пружності

$$F = cx, \tag{23}$$

де c – коефіцієнт жорсткості (пружності);

x – відхилення точки від положення рівноваги, або повна деформація пружини.

Нехай точка M рухається під дією відновлювальної сили $\overline{F}$ уздовж осі x, а точка O визначає її положення рівноваги (рис.14, а).

Розв’яжемо другу (основну) задачу динаміки матеріальної точки, тобто визначимо закон руху точки.

Диференціальне рішення руху точки у проекції на вісь x має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx, \tag{24}$$

або

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{25}$$

де $k^2 = \dfrac{c}{m}$; k - кругова (циклічна) частота вільних коливань.

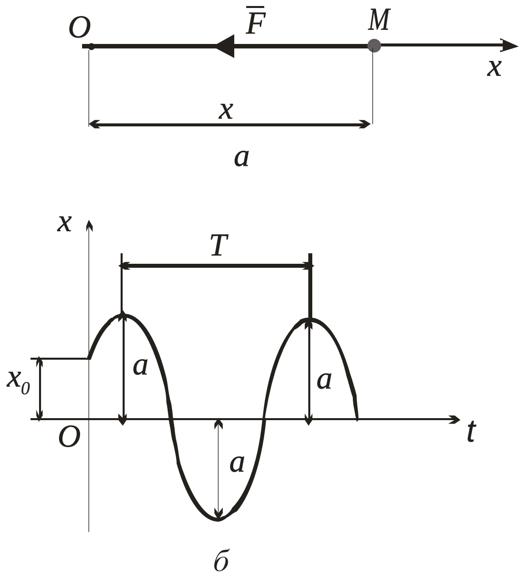

Рисунок 14

Рівняння (25) *називаються диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки*. Щоб інтегрувати це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, необхідно скласти характеристичне рівняння

$$l^2 + k^2 = 0 \tag{26}$$

і визначити його корені: $l_{1,2} = \pm ik$. Оскільки корені суто уявні, то загальний розв'язок рівняння (25) має вигляд:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \tag{27}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Введемо нові сталі a і a, взявши, що $C_1 = a\cos a$; $C_2 = a\sin a$. Підставляючи значення C_1 і C_2 у рівняння (27), здобудемо:

$$x = a\cos a \sin kt + a\sin a \cos kt,$$

або

$$x = a\sin(kt + a). \tag{28}$$

Таким чином, під дією відновлювальної сили матеріальна точка рухається за синусоїдальним законом, тобто здійснює гармонічний коливальний рух (рис.14, б).

У рівнянні (28):

a – амплітуда коливання, тобто абсолютна величина найбільшого відхилення точки від її положення рівноваги:

$(kt + a)$ – фаза коливання, де a – початкова фаза коливання; k – кругова частота коливання (власна частота) – кількість коливань матеріальної точки за $2p$ секунд:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \tag{29}$$

Як видно з рівності (29) кругова частота не залежить від початкових умов руху матеріальної точки.

Амплітуда і початкова фаза вільних коливань матеріальної точки визначаються на підставі початкових умов руху точки.

Визначимо швидкість руху точки, тобто продиференцюємо рівняння (28) за часом:

$$\dot{x} = ak\cos(kt + a). \tag{30}$$

За початковими умовами руху точки – при $t=0;\ x(0)=x_0;\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0$ – з рівнянь (28) і (30) визначимо початкову фазу і амплітуду вільних коливань матеріальної точки:

$$tg\,\alpha=\frac{k\,x_0}{\dot{x}_0};\quad a=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}\,. \tag{31}$$

Періодом коливання T *матеріальної точки називається найменший проміжок часу, по закінченні якого точка має ту саму координату x і ту саму проекцію швидкості* $\dot{x}$.

Оскільки значення синуса повністю повторюється через 2π, то по закінченні періоду коливання фаза коливання також змінюється на 2π. Отже, з рівняння (28) матимемо:

$$[k(t+T)+\alpha],\ \text{де}\ (kt+\alpha)=2\pi\,,$$

звідки

$$T=\frac{2\pi}{k}. \tag{32}$$

З рівності (32) випливає, що період вільних коливань матеріальної точки не залежить від початкових умов руху точки.

Величина ν, *обернена до періоду коливання, тобто* $\nu=\frac{1}{T}$, *визначає кількість коливань матеріальної точки за одну секунду і називається частотою коливань.*

Частота коливань ν вимірюються в герцах (Гц).

З розглянутого можна зробити такі загальні висновки:

1 Вільні (власні) коливання матеріальної точки повністю визначаються амплітудою, круговою частотою, початковою фазою і періодом коливання.

2 Вільні коливання матеріальної точки відбуваються за синусоїдним законом, тобто вони є гармонічними.

3 Амплітуда та початкова фаза вільних коливань залежить від початкових умов коливання.

4 Колова (кругова) частота і період вільних коливань матеріальної точки не залежать від початкових умов коливання, а визначається властивістю відновлювальної сили (коефіцієнтом жорсткості c і масою точки m).

5 Вільні коливання матеріальної точки можуть виникнути тільки з початкових умов, відмінних від нульових.

6 Вільні коливання матеріальної точки, якщо вони виникли, продовжуються під дією відновлювальної сили без зміни параметрів коливання як завгодно довго, поки інші сили не змінять характер цих коливань.

8.2 Вплив сталої сили на вільні коливання точки

Розглянемо випадок, коли на матеріальну точку M крім відновлювальної сили $\overline{F}$, спрямованої до центра O, діє стала за модулем і напрямком сила $\overline{P}$ (рис.15). Наприклад, якщо маємо вертикальні коливання, то такою $\overline{P}$ може бути сила ваги матеріальної точки.

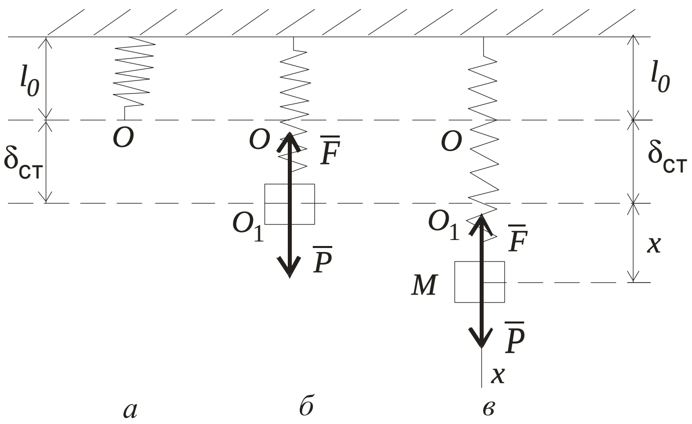

Рисунок 15

а – недеформована пружина;

б – точка перебуває у стані рівноваги під дією сил $\overline{F}$ і $\overline{P}$; пружина отримала деформацію d_{cm} (стан статичної рівноваги);

в – точка здійснює коливання, при цьому пружина отримала деформацію $(d_{cm} + x)$.

У випадку статичної рівноваги (рис.15, б) коливання відбуваються навколо точки O_1, що знаходиться від O на відстані $OO_1 = d_{cm}$, яка визначається з рівності:

$$F = P,$$

$$c \cdot d_{cm} = P; \quad d_{cm} = \frac{P}{c}. \tag{33}$$

Величину d_{cm} називають статичним відхиленням або статичною деформацією.

Статична деформація пружини прямо пропорційна силі, що викликала цю деформацію і зворотно пропорційна жорсткості пружини.

Оберемо точку O_1 за початок відліку координат і спрямуємо вісь O_1x у бік дії сили $\overline{P}$. Тоді сила пружності $\overline{F}$, яка за модулем прямо пропорційна повній деформації пружини (рис. 15, в):

$$F = c\left(x + d_{cm}\right).$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = P - F,$$

$$m\ddot{x} = P - c\left(x + \frac{P}{c}\right),$$

$$m\ddot{x} = -c \cdot x, \text{ або}$$

$$m\ddot{x} + cx = 0;$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Останнє рівняння, в якому $k^2 = \dfrac{c}{m}$ повністю співпадає з рівнянням (25). Звідки витікає висновок: *стала сила* $\overline{P}$ *не змінює характер коливань матеріальної точки, а лише зміщує центр коливань в бік дії сили на величину статичного відхилення* $d_{ст}$.

Але в цьому випадку можна отримати ще одну формулу для визначення періоду коливань. За формулою (32) період коливань

$$T = \frac{2p}{k},$$

а із формули (33) $d_{ст} = \dfrac{P}{c}$, але з (29): $k^2 = \dfrac{c}{m}$, тоді:

$$c = k^2 m;$$

$$c = \frac{P}{d_{ст}};$$

$$T = 2p\sqrt{\frac{m d_{ст}}{P}}. \qquad (34)$$

Період коливань пропорційний кореню квадратному із статичного відхилення.

В окремому випадку, якщо силою $\overline{P}$ являється сила ваги $m\overline{g}$, то $P = mg$ і формула (34) набуде вигляду:

$$T = 2p\sqrt{\frac{d_{ст}}{g}}. \qquad (35)$$

Приклад 7. *Вантаж підвішують до кінця нерозтягнутої вертикальної пружини і відпускають без початкової швидкості. Визначити закон коливань вантажу, якщо в положенні рівноваги він розтягує пружину на величину* $d_{ст}$ *(статичне подовження пружини).*

Розв’язання.

Обереме початок координат O_1 в положенні статичної рівноваги (рис. 15, в) вантажу, який надалі будемо вважати матеріальною точкою.

Зобразимо точку в довільному положенні, але обов’язково так, щоб її координата x була додатною $(x>0)$. Спрямуємо вісь $O_1 x$ вертикально вниз (у бік першої деформації пружини: див. рис. 15, а і 15, б), тобто у бік дії сили $\overline{P}$. На точку діє сила ваги $\overline{P}$ (за модулем $P = mg$) і сила пружності $\overline{F}$, модуль якої обчислюється в цьому випадку за формулою

$$F = c\,(x + d_{cm})\,.$$

Складемо диференційне рівняння руху точки в проекції на ось x

$$m\ddot{x} = P - F\,.$$

Але за умовою задачі сила тяжіння $P = mg = cd_{cm}$ (бо в положенні рівноваги сила $\overline{P}$ урівноважується силою пружності cd_{cm}, див. рис. 15, б).

$$m\ddot{x} = cd_{cm} - c(x + d_{cm});$$

$$m\ddot{x} = -cx; \text{ або:}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \text{ тут } k^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{d_{cm}}.$$

Рішення отриманого рівняння шукають у вигляді (27), а саме:

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt\,.$$

За початковими умовами:

при $t = 0$; $x_0 = -d_{cm}$; $\dot{x}_0 = V_{0x} = 0$. Так як: $\dot{x} = c_1 k \cos kt - c_2 k \sin kt$, то після підстановки початкових умов отримаємо:

$$c_1 = 0; \quad c_2 = -d_{cm}.$$

Таким чином $x = -d_{cm} \cos kt$, тобто коливання відбувається за отриманням законом з амплітудою d_{cm}. Найбільше подовження пружини дорівнює $2d_{cm}$.

Приклад 8. *Вантаж Q, падаючи з висоти $h = 1\,м$ без початкової швидкості, ударяється об середину пружної горизонтальної балки. Кінці балки закріплено. Скласти рівняння подальшого руху вантажу по балці, віднісши рух до осі, проведеної вертикально з положення статичної рівноваги вантажу на балці, якщо статичний прогин балки в її середині при зазначеному навантаженні дорівнює 0,5 см; масою балки знехтувати (рис. 16).*

Розв’язання.

Розглянемо рух вантажу Q, який вважатимемо матеріальною точкою. На вантаж діє сила вагою Q і сила пружності F. Нехай M_0 - початкове положення вантажу, при якому балка не має прогину. Вісь Ox спрямуємо за вертикальною прямою, вздовж якої рухається вантаж. Початок координат виберемо в положенні статичної рівноваги, тоді $OM_0 = d_{ст}$ або $x/_{t=0} = -d_{ст}$.

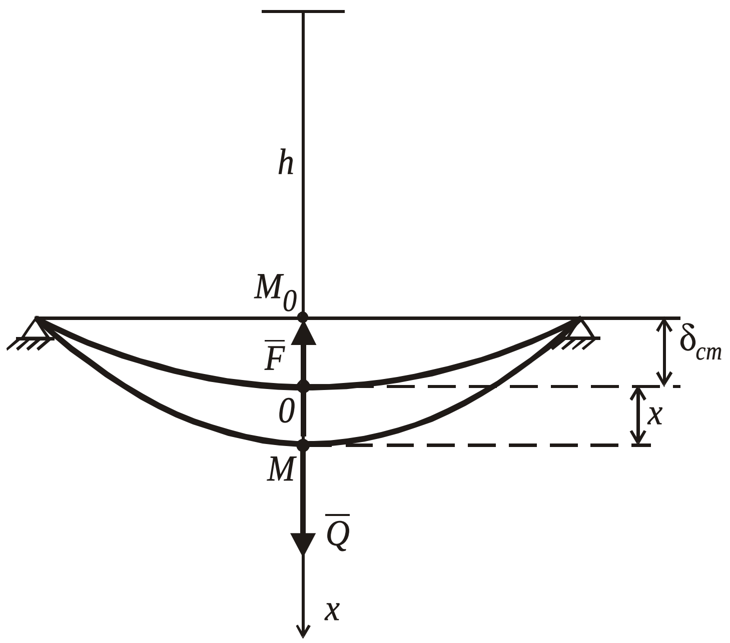

Рисунок 16

При цьому сила ваги врівноважується пружною силою, тобто

$$Q = cd_{ст},\ \text{звідки}\ c \quad \frac{Q}{\quad_{ст}}.$$

У довільному положенні M вантажу

$$F_x = -c\,(d_{cm} + x).$$

Розглянувши сили, які діють на рухому точку, складемо на основі другого закону Ньютона диференціальне рівняння руху у векторній формі:

$$m\bar{a} = \bar{Q} + \bar{F}.$$

Спроектуємо обидві частини цього рівняння на вибрану координатну вісь x:

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} = Q - c\,(d_{cm} + x).$$

Беручи до уваги, що $c \quad \dfrac{Q}{\;_{cm}}$, маємо:

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} = -c\,x, \quad \text{або} \quad \ddot{x} + k^2\,x = 0,$$

де $k^2 = \dfrac{c\,g}{Q}$.

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами має загальне розв'язання:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначено на основі початкових умов при $t = 0$:

$$x_0 = -d_{cm}; \quad x_0 = \sqrt{2\,g\,h},$$

оскільки кінцева швидкість вантажу в момент його удару об балку дорівнює початковій швидкості руху вантажу разом з балкою.

Визначимо швидкість руху вантажу в довільний момент часу t:

$$\dot{x} = -k\,C_1 \sin kt + k\,C_2 \cos kt\,.$$

Враховуючи початкові умови матимемо:

$$C_1 = -d_{ст}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{k}\,.$$

Отже, закон коливального руху вантажу набуде вигляду:

$$x = -d_{ст} \cos kt + \frac{\sqrt{2gh}}{k} \sin kt\,.$$

Беручи до уваги рівняння $c \ \frac{Q}{\ _{ст}}$ і $k^2 = \frac{c\,g}{Q}$, визначимо кругову частоту коливань:

$$k = \sqrt{\frac{c\,g}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{d_{ст}}}44{,}3\,; \qquad C_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{k} = \sqrt{2\,g\,d_{ст}} = 10.$$

Підставляючи числові значення у розв'язання диференційного рівняння, знайдемо:

$$x = \left[-\,0{,}5\,\cos(44{,}3t) + 10\,\sin(44{,}3t)\right] см\,.$$

Період коливань T дорівнює:

$$T = \frac{2p}{k} = 2p\,\sqrt{\frac{d_{ст}}{g}} = 0{,}14\;сек\,.$$

Щоб визначити амплітуду коливань, перетворимо загальне розв’язання і введемо замість C_1 і C_2 нові сталі інтегрування a і a :

$$C_1 = a \sin a ; \quad C_2 = a \cos a .$$

Враховуючи рівність (20), отримаємо:

$$x = a \sin (kt + a),$$

де стала величина a є амплітудою коливань, а a – початкова фаза. Згідно з формулою (31) амплітуда і початкова фаза відповідно дорівнюють

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad a = arctg\left(\frac{C_1}{C_2}\right).$$

Підставляючи сюди числові значення C_1 і C_2, матимемо

$$a \cong 10{,}01\, см .$$

Зазначимо, що, в порівнянні зі статичними відхиленнями, динамічні відхилення вантажу Q від положення статичної рівноваги у 20 разів більші.

8.3 Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянемо вплив середовища на вільні коливання матеріальної точки. Нехай на матеріальну точку M окрім відновлювальної сили $\overline{F}$ буде діяти ще сила опору середовища $\overline{R}$ (рис. 17). Приймемо, що величина сили $\overline{R}$ пропорційна першому ступеню швидкості точки. Напрямлена сила $\overline{R}$ у протилежний бік від вектора швидкості точки $\overline{V}$

$$\overline{R} = -m\,\overline{V}, \tag{36}$$

де m – коефіцієнт опору середовища.

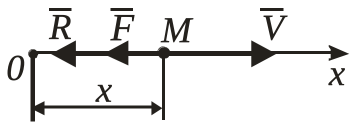

Рисунок 17

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x має вигляд

$$m\ddot{x} = cx - m\dot{x}, \quad \text{або}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{37}$$

де $n = \dfrac{m}{2m}$ – коефіцієнт затухання, що характеризує властивості середовища з опором;

$k^2 = \dfrac{c}{m}$, k – кругова частота власних коливань.

Як буде доведено далі, рух точки, що описується рівнянням (37), є згасаючим, тому рівняння (37) називається *диференціальним рівнянням згасаючих коливань.*

Для інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (37) складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$l^2 + 2n\,l + k^2 = 0;$$

$$l_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,. \tag{38}$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння залежить від коренів характеристичного рівняння, тобто рівностей (38). Тут можуть бути три випадки.

Випадок 1. $n < k$ (малий опір середовища). Корені (38)

$$l_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}\,. \tag{39}$$

Загальний розв'язок рівняння (37) має вигляд

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t\right), \tag{40}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування: $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Випадок 2. $n > k$ (великий опір середовища). Корені (38)

$$l_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\ . \tag{41}$$

Загальний розв'язок рівняння (37) має вигляд

$$x = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{\,l_2 t},$$

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{-k_2 t} + C_2 e^{k_2 t}); \quad k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}\ , \tag{42}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Випадок 3. $n = k$ (граничний випадок). Корені (38)

$$l_{1,2} = -n. \tag{43}$$

Загальний розв'язок рівняння (37) має вигляд

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2), \tag{44}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

З рівнянь (42) і (44) випливає, що у випадках, коли $n > k$ і $n = k$, рух матеріальної точки не має коливального характеру, точка здійснює так званий аперіодичний згасаючий рух (рис. 18). Аналіз аперіодичного згасаючого руху матеріальної точки виходить за рамки курсу, що розглядається.

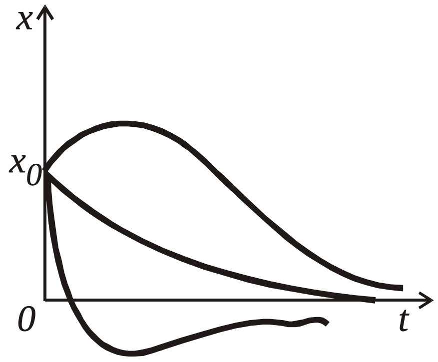

Рисунок 18

Розглянемо докладно випадок малого опору середовища. Перетворимо загальний розв'язок (40) на більш зручний для аналізу вигляд. Для цього введемо нові сталі a і a за допомогою формул: $C_1 = a\cos a$; $C_2 = a\sin a$. Підставляючи ці значення в рівняння (40), отримаємо:

$$x = ae^{-nt}\left(\cos a\ \sin k_1 t + \sin a\ \cos k_1 t\right)$$

або

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1 t + a), \qquad (45)$$

де

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

З рівняння (45) випливає, що рух точки має коливальний характер, оскільки координата x набуває або додатного, або від'ємного значення. При цьому множник e^{-nt} показує, що коливання будуть згасати (рис. 19).

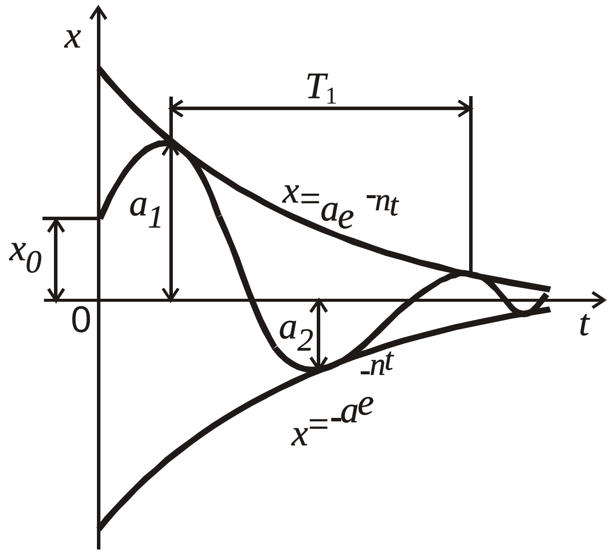

Рисунок 19

Амплітуда і початкова фаза згасаючих коливань матеріальної точки визначаються на основі початкових умов руху точки.

Визначимо швидкість руху точки, тобто продиференціюємо рівняння (45) за часом:

$$\dot{x} = -a\,n\,e^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + a\,k_1\,e^{-nt}\cos(k_1 t + \alpha). \tag{46}$$

За початковими умовами руху точки – $t = 0;\ x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ – з рівнянь (45) і (46) визначимо початкову фазу і амплітуду вільних коливань матеріальної точки:

$$tg\,\alpha = \frac{k_1 x_0}{\dot{x}_0 + n x_0}; \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + n x_0)^2}{(k_1)^2}}\,. \tag{47}$$

З рисунка 19 випливає, що рух матеріальної точки не є періодичним, оскільки величина $a\,e^{-nt}$ зменшується за експоненціальним законом.

За аналогією з вільними коливаннями матеріальної точки при вивченні згасаючих коливань також упроваджують поняття кругової частоти коливання, періоду і амплітуди коливання.

Кругова частота згасаючих коливань матеріальної точки визначається за формулою

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}\,. \tag{48}$$

Період згасаючих коливань матеріальної точки

$$T_1 = \frac{2p}{k_1} = \frac{2p}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2p}{k\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}\,. \tag{49}$$

Формула (49) показує, що період згасаючих коливань матеріальної точки дещо більший за період вільних коливань точки (див. формулу (32)). Проте при малому опорі середовища можна вважати, що період T_1 дорівнює періоду вільних коливань T.

Амплітуда згасаючих коливань $a_1, a_2, \ldots a_N$ зменшується за кожний період за законом геометричної прогресії, знаменник якої

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_1} = \frac{ae^{-n(t_1+T_1)}\sin\left[k_1(t_1+T_1)+a\right]}{ae^{-nt_1}\sin(k_1 t_i + a)} = \frac{ae^{-n(t_1+T_1)}}{ae^{-nt}} = e^{-nT_1}\,. \tag{50}$$

Величина q називається *декрементом коливання*. ***Логарифмічним декрементом коливання*** *називається логарифм співвідношення двох суміжних амплітуд, які відрізняються за часом на* T_1*:*

$$\ln\frac{a_i}{a_{i+1}} = nT_1\,. \tag{51}$$

Отже, малий опір середовища, в якому здійснюються коливання, приводить до незначного збільшення періоду коливання матеріальної точки порівняно з випадком вільних коливань і до зменшення амплітуди коливання з часом. Зменшення амплітуди коливання відбувається за експоненціальним законом.

8.4 Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища. Явища резонансу

Розглянемо рух матеріальної точки M під дією відновлювальної сили $\overline{F}$ і збурювальної сили $\overline{Q}$ (рис. 20).

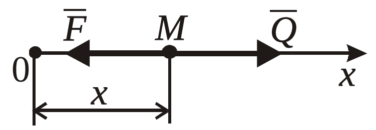

Рисунок 20

$$Q = H\sin(pt + b), \tag{52}$$

де H максимальна збурювальна сила;

p – кругова частота збурювальної сили;

b – початкова фаза збурювальної сили.

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt + b),$$

або

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + b), \tag{53}$$

де $$k^2 = \frac{c}{m};\ h = \frac{H}{m}.$$

Рівняння (53) називається *диференціальним рівнянням змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища*.

Загальний розв’язок рівняння (53) складається із загального розв’язку однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$ і частинного розв’язку рівняння (53):

$$x = x_1 + x_2. \tag{54}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння такий (див. параграф 7.1):

$$x_1 = a \sin(kt + a)\,. \tag{55}$$

З теорії розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами відомо: якщо права частина рівняння має вигляд

$$f(t) = M \sin(j\, t + d)\,, \tag{56}$$

то у випадку, коли j не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок необхідно шукати у вигляді

$$x_2 = A \sin(j\, t + g)\,, \tag{57}$$

де A і g сталі величини.

Якщо j є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок необхідно шукати у вигляді

$$x_2 = At \sin(j\, t + g)\,. \tag{58}$$

Нехай частоти вільного коливання матеріальної точки і збурювальної сили не збігаються, тобто $k \neq p$, тоді корені характеристичного рівняння $l^2 + k^2 = 0$ не дорівнюють p, отже, частинний розв'язок рівняння (53) шукаємо у вигляді

$$x_2 = A \sin(pt + g)\,. \tag{59}$$

Диференціюємо двічі вираз (59) за часом:

$$\dot{x}_2 = Ap \cos(pt + g);$$

$$\ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin(pt + g)\,.$$

Значення $\ddot{x}_2$ і x_2 підставляємо в рівняння (53):

$$-Ap^2\sin(pt+g)+Ak^2\sin(pt+g)=h\sin(pt+b).$$

Введемо позначення $pt+g=d$; тоді $pt=d-g$ і

$$pt+b=d-g+b=d+(b-g).$$

З урахуванням розглянутого останнє рівняння набирає вигляду

$$-Ap^2\sin d+Ak^2\sin d=h\sin d\cos(b-g)+h\cos d\sin(b-g).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin d$ і $\cos d$ в останньому рівнянні, отримаємо:

$$-Ap^2+Ak^2=h\cos(b-g)+h\sin(b-g)=0.$$

Звідси визначаємо A і g:

$$\sin(b-g)=0;\ \ (b-g)=0;\quad g=b;\quad A=\frac{h}{k^2-p^2}.$$

Значення A і g підставляємо в рівняння (59):

$$x_2=\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+b). \qquad (60)$$

Підставляючи вирази (55) і (60) у рівність (54), матимемо

$$x=a\sin(kt+a)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+b). \qquad (61)$$

Сталі a і a в рівнянні (61) визначаються на підставі початкових умов руху точки.

Отже, рух матеріальної точки при дії на точку відновлювальної і збурювальної сили складається з двох гармонічних коливань: вільних коливань з частотою k і змушених коливань з частотою збурювальної сили p.

Проведемо аналіз змушених коливань, які не залежать від початкових умов руху, тобто другого доданка в рівнянні (61).

Початкова фаза змушених коливань збігається з початковою фазою збурювальної сили. Фаза змушених коливань $(pt + b)$ залежить від p і k. Якщо частота власних коливань більша за частоту збурювальної сили $k > p$, то фаза змушених коливань збігається з фазою збурювальної сили. Якщо $p > k$, то має місце зсув фаз на величину p, тобто фаза змушених коливань відстає від фази збурювальної сили на величину p .

Амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов руху точки і становить

$$A = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|}. \tag{62}$$

Перетворимо вираз (62), враховуючи, що $k^2 = \frac{c}{m}$, $h = \frac{H}{m}$ і $x_{cm} = \frac{H}{c}$ величина відхилення точки від положення рівноваги при дії на неї максимальної збурювальної сили:

$$A = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{H}{m\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{x_{cm}\, c}{m\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{k^2 x_{cm}}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{x_{cm}}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}. \tag{63}$$

Уведемо коефіцієнт динамічності l – величину, що показує, у скільки разів амплітуда коливання більша, ніж відхилення точки від положення рівноваги, при дії на неї максимальної збурювальної сили:

$$l = \frac{A}{x_{cm}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}. \tag{64}$$

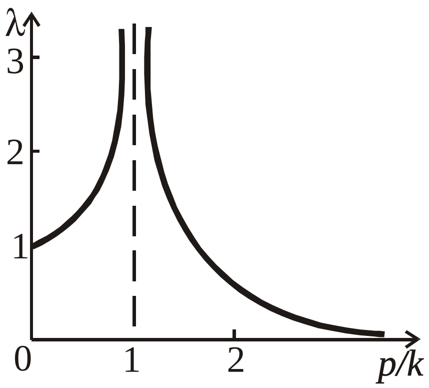

Рисунок 21

З рівності (64) випливає: якщо відношення $\frac{p}{k}$ наближається до одиниці, то відбувається різка зміна коефіцієнта динамічності. На рисунку 21 зображено графік зміни коефіцієнтів динамічності зі зміною $\frac{p}{k}$.

Визначимо амплітуду змушених коливань при $p = k$ частинний розв'язок рівняння (53) необхідно шукати у вигляді

$$x_2 = At\sin(pt + g). \tag{65}$$

Диференціюємо двічі вираз (65) за часом:

$$\dot{x}_2 = A\sin(pt + g) + At\,p\cos(pt + g);$$
$$\ddot{x}_2 = Ap\cos(pt + g) + Ap\cos(pt + g) - At\,p^2\sin(pt + g).$$

Значення $\ddot{x}_2$ і x_2 підставляємо в рівняння (53):

$$Ap\cos(pt + g) + Ap\cos(pt + g) - At\,p^2\sin(pt + g) +$$
$$+ Atk^2\sin(pt + g) = h\sin(pt + b)$$

Введемо позначення $(pt + g) = d$; тоді $pt = d - g$ і $pt + b = d - g + b = d + (b - g)$. З урахуванням розглянутого рівняння набуває вигляду

$$2Ap\cos d - At\,p^2 \sin d + At\,k^2 \sin d = h \sin d \cos(b-g) + h \cos d \sin(b-g).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin d$ і $\cos d$ та зважаючи на те, що $p = k$, отримаємо:

$$2Ap = h \sin(b-g); \quad h\cos(b-g) = 0.$$

Звідси визначимо A і g:

$$\cos(b-g) = 0; \quad b - g = \frac{p}{2}; \quad g = b - \frac{p}{2}; \quad A = \frac{h}{2p}.$$

Значення A і g підставляємо в рівняння(65):

$$x_2 = \frac{h}{2p} t \sin\left(pt + b - \frac{p}{2}\right) = \frac{ht}{2p}\cos(pt + b). \tag{66}$$

З виразу (66) випливає, що при $p = k$ амплітуда змушених коливань збільшується пропорційно часу:

$$A = \frac{h}{2p} t. \tag{67}$$

Явище, що виникає при збіганні частоти збурювальної сили і частоти власних коливань, називається ***резонансом****.* Графік руху матеріальної точки при резонансі зображено на рисунку 22.

Частота і період змушених коливань при резонансі дорівнюють частоті й періоду вільних коливань точки. Фаза змушених коливань при резонансі відстає від фази збурювальної сили на величину $\frac{p}{2}$.

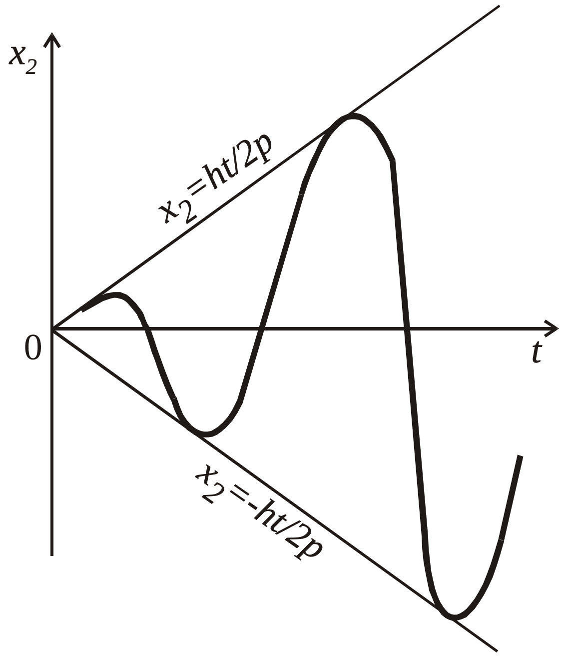

Рисунок 22

З розглянутого можна зробити такі загальні висновки:

1 Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища відбуваються з частотою і початковою фазою збурювальної сили.

2 Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища відбуваються за гармонічним законом збурювальної сили і не залежать від початкових умов коливання.

3 При $k > p$ фаза змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища збігається з фазою збурювальної сили; при $p > k$ має місце зсув фаз (відставання) на величину p .

4 При $p = k$ виникає резонанс. При резонансі амплітуда змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища зростає з часом за лінійним законом.

Частота і період змушених коливань за відсутності опору при резонансі дорівнюють частоті і періоду вільних коливань матеріальної точки. Фаза змушених коливань при резонансі відстає від фази збурювальної сили на величину $\frac{p}{2}$.

8.5 Змушені коливання матеріальної точки при наявності опору середовища

Розглянемо вплив середовища на змушені коливання матеріальної точки. Нехай на матеріальну точку окрім відновлювальної сили $F_x = -cx$ і збурювальної сили $Q = H\sin(pt + b)$ діятиме ще сила опору середовища $\overline{R} = -m\overline{V}$ (рис. 23).

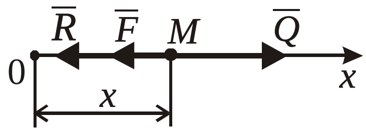

Рисунок 23

Тоді диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -cx - m\dot{x} + H\sin(pt + b),$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt + b), \tag{68}$$

де $$n = \frac{m}{2m};\ k^2 = \frac{c}{m};\ h = \frac{H}{m}.$$

Рівняння (68) називається *диференціальним рівнянням змушених коливань матеріальної точки при наявності опору середовища.*

Загальний розв’язок рівняння (68) складається із загального розв’язку рівняння $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ і частинного розв’язку рівняння (68):

$$x = x_1 + x_2. \tag{69}$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння при $n < k$ (див. 7.3) такий:

$$x_1 = ae^{-nt}\sin(k_1 t + a), \tag{70}$$

де a і a – сталі інтегрування.

Частинний розв'язок рівняння (68) будемо шукати у вигляді (див. 7.4)

$$x_2 = A\sin(pt + g), \tag{71}$$

де A і g – сталі величини.

$$\dot{x}_2 = Ap\cos(pt + g); \quad \ddot{x}_2 = -Ap^2\sin(pt + g).$$

Значення $\ddot{x}_2$, $\dot{x}_2$ і x_2 підставляємо в рівняння (68):

$$-Ap^2\sin(pt + g) + 2nAp\cos(pt + g) + Ak^2\sin(pt + g) = h\sin(pt + b).$$

Уведемо позначення $(pt + g) = d$; тоді $pt = d - g$ і $pt + b = d - g + b = d + (b - g)$. З урахуванням розглянутого рівняння набирає вигляду:

$$-Ap^2\sin d + 2nAp\cos d + Ak^2\sin d = h\sin d\cos(b - g) + h_0\cos d\sin(b - g).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin d$ і $\cos d$ в останньому рівнянні, здобудемо:

$$-Ap^2 + Ak^2 = h\cos(b - g); \quad 2nAp = h\ \sin(b - g).$$

Звідси визначаємо A і g:

$$tg(b - g) = \frac{2np}{k^2 - p^2}; \quad A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}. \tag{72}$$

Значення A і g підставляємо у рівняння (71):

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt + g), \tag{73}$$

де g визначається з першого виразу (72).

Підставляючи вирази (70) і (73) у рівність (69), матимемо

$$x = ae^{-nt}\sin\left(k_1 t + a\right) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}\sin(pt + g). \qquad (74)$$

Сталі a і a в рівнянні (74) визначаються на підставі початкових умов руху точки. Таким чином, рух матеріальної точки при дії на точку відновлювальної сили, збурювальної сили і сили опору середовища складається з двох коливань: згасаючих коливань із частотою $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ і змушених коливань. Змушені коливання не згасають. Частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили. Період змушених коливань

$$T = \frac{2p}{p}. \qquad (75)$$

Фаза змушених коливань матеріальної точки відстає від фази збурювальної сили на величину $\left(b - g\right)$, що називається *зсувом фази*. Величина зсуву фази визначається за формулою

$$tg\,(b - g) = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2\frac{n}{k}\frac{p}{k}}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2}. \qquad (76)$$

З формули (76) випливає, що $\left(b - g\right)$ залежить від відношення p/k, що характеризує збурювальну силу, і від відношення n/k, що характеризує опір середовища. На рисунку 24 наведено залежність зсуву фази змушених коливань відносно збурювальної сили залежно від p/k і n/k.

Амплітуда змушених коливань визначається за формулою

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \qquad (77)$$

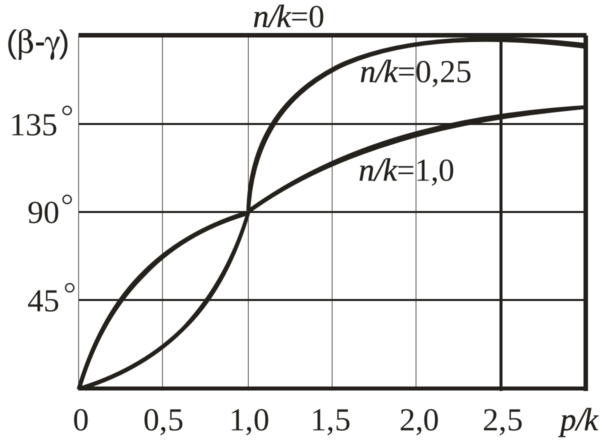

Рисунок 24

Беручи до уваги те, що $h = \dfrac{H}{m}$, $k^2 = \dfrac{c}{m}$ і $x_{cm} = \dfrac{H}{c}$, перетворимо вираз (77) так:

$$A = \frac{x_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\dfrac{n^2}{k^2}\dfrac{p^2}{k^2}}}. \tag{78}$$

Введемо коефіцієнт динамічності, тобто величину, що показує, у скільки разів амплітуда коливання більша, ніж відхилення точки від положення рівноваги, при дії на неї максимальної збурювальної сили:

$$l = \frac{A}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\dfrac{n^2}{k^2}\dfrac{p^2}{k^2}}}. \tag{79}$$

На рисунку 25 зображено криві, що визначають залежність коефіцієнта динамічності від відношення p/k. Кожній з кривих відповідає певне значення n/k. З рисунка 25 випливає, що коефіцієнт динамічності зі зростанням опору середовища зменшується. При $\dfrac{p}{k}$, $\dfrac{p}{k} = 1$, вплив опору середовища на коефіцієнт динамічності істотний.

Якщо за відсутності опору середовища явище резонансу виявляється у прямуванні коефіцієнта динамічності до нескінченності (криві $\dfrac{p}{k} = 0$

на рис. 21), то при наявності опору середовища коефіцієнт динамічності має скінчену величину (криві $\frac{p}{k} \neq 0$ на рис. 25).

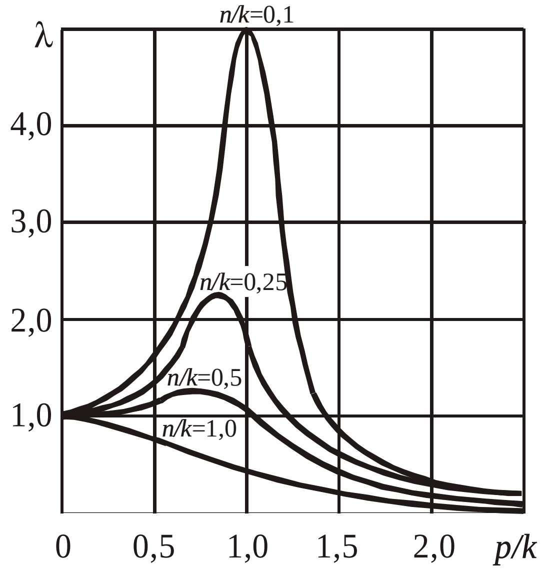

Рисунок 25

Амплітуда коливання за наявності опору середовища при резонансі, тобто при $p = k$, на підставі формули (77)

$$A = \frac{h}{2n\,p}. \tag{80}$$

Визначимо, за якої частоти збурювальної сили амплітуда коливання, що визначається за формулою (77), має максимальне значення. Для цього продиференцюємо вираз $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$ за p і отриманий результат прирівняємо до нуля:

$$\frac{d}{dp}\left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2\right] = 2\left(k^2 - p^2\right)\left(-2p\right) + 4n^2\,2p = 0,$$

звідки маємо корені: $p_1 = 0$; $p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2}$; $p_3 = -\sqrt{k^2 - 2n^2}$.

скільки $p > 0$, то корені p_1 і p_3 відкидаємо. Знайдемо другу похідну від виразу $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$:

$$\frac{d^2}{dp^2}\left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2\right] = 8n^2 + 12p^2 - 4k^2.$$

Для $p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ при $\frac{n}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2\right] > 0,$$

і, отже, вираз $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$ має мінімум, а амплітуда – максимум.

Підставляючи значення p_2 у формулу (77), отримаємо максимальне значення амплітуди при даному опорі середовища:

$$A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{81}$$

Максимальна амплітуда змушених коливань може мати місце тільки за умови, що $\frac{n}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; вона визначається формулою (81).

Диференціальні рівняння коливань точки та рішення цих рівнянь зведені до таблиці 1.

З розглянутого можна зробити такі загальні висновки:

1 Змушені коливання матеріальної точки за наявності опору середовища відбуваються з частотою збурювальної сили і не залежать від початкових умов коливань. Отже, їх неможливо збурити тільки за допомогою початкових умов. Щоб коливання виникли, має діяти збурювальна сила.

2 Амплітуда і зсув фаз змушених коливань матеріальної точки при наявності опору середовища залежать від частоти вільних коливань k, частоти збурювальної сили p і коефіцієнта, що характеризує властивості середовища з опором n. Чим більший коефіцієнт n за інших рівних умов,

тим менша амплітуда змушених коливань матеріальної точки.

3 Зсув фаз при резонансі $\dfrac{p}{k}=1$ дорівнює $p/2$ при будь-яких відношеннях n/k.

4 У випадку резонансу амплітуда змушених коливань матеріальної точки при наявності опору середовища не зростає пропорційно часу, як це відбувається при змушених коливаннях матеріальної точки за відсутності опору середовища, а має скінчену величину. Для цього достатньо наявності будь-якого малого опору середовища.

8.6 Методика розв'язання задач про коливальний рух матеріальної точки і приклади розв'язання задач

Розв'язання задач про коливальний рух матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

- встановити систему відліку з початком у положенні статичної рівноваги матеріальної точки;
- записати початкові умови руху матеріальної точки;
- прикласти до точки всі активні сили;
- користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, умовно відкинути в'язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в'язі;
- скласти диференціальне рівняння руху точки в проекції на відповідну вісь;
- проінтегрувати диференціальне рівняння руху матеріальної точки і за додатковими умовами руху точки визначити сталі інтегрування;
- з одержаних рівнянь визначити шукані величини і проаналізувати отримані результати.

Для визначення колової частоти k і k_1 періоду коливання T і T_1 немає потреби в інтегруванні відповідних диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Достатньо тільки скласти ці рівняння і визначити коефіцієнти при x і $\dot{x}$.

При складанні диференціального рівняння руху матеріальної точки необхідно зображати точку на рисунку в довільному положенні, що відповідає додатній координаті. При цьому припускають, що матеріальна точка рухається у бік збільшення цієї координати.

Розглядаючи задачу про вільні коливання матеріальної точки за відсутності сили опору середовища, можна розв'язати задачу в загальному вигляді і потім підставити в рішення числові значення. Якщо розглядається задача про згасаючі коливання, то необхідно підставити числові значення в диференціальне рівняння та визначити n і k, оскільки залежно від їх співвідношення доводиться записувати загальний розв'язок рівняння або в тригонометричних, або в гіперболічних функціях.

Приклади розв'язання задач про вільні коливання точки розглянуті у параграфі 7.2 (приклади 7 і 8). Розглянемо наступний приклад.

Приклад 9. *Щоб визначити в'язкість рідини, Кулон застосував такий метод: підвісивши на пружині тонку пластинку М, він примушував її коливатися спочатку в повітрі, а потім у тій рідині, в'язкість якої треба було визначити, і знаходити тривалість Т одного розмаху (T_1 в першому випадку і T_2 – в другому). Сила тертя між пластинкою і рідиною може бути виражена як* $2SaV$, *де* $2S$ *– поверхня пластинки,* V *- її швидкість,* a *- коефіцієнт в'язкості. Нехтуючи тертям між пластинкою і повітрям, треба визначити коефіцієнт* a *за знайденими з досліду величинами T_1 і T_2, якщо вага пластинки дорівнює Р (рис. 26).*

Розв'язання

Розглянемо рух пластики *М*, вважаючи її матеріальною точкою як у повітрі, так і в рідині. Рух точки *М* не довільний. В'яззю є пружина. Систему сил, які діють у першому і другому випадках, зображено на рисунку 26.

У повітрі (рис. 26, а) на рухому точку *М* діятиме стала сила ваги $\overline{P}$ і змінна сила – реакція пружини $F_x = -c(x + d_{\text{ст}})$. У рідині (рис. 26,б) на точку *М*, крім зазначених сил, діятиме також сила опору рідини – змінна сила $R_x = -2aS\dot{x}$.

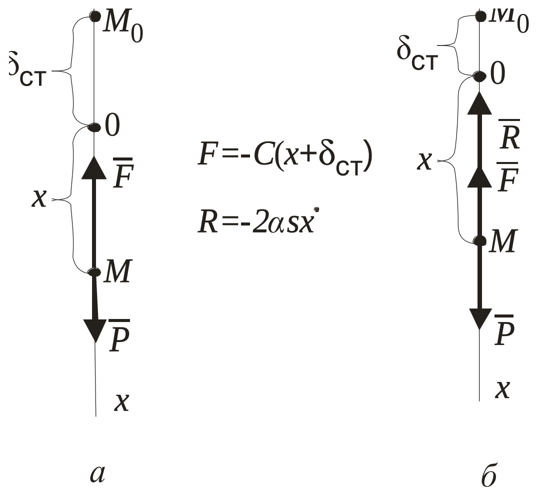

Рисунок 26

Усі ці сили розглядають від початкового моменту t = 0 до довільного моменту часу t. Початкові умови для двох випадків такі: при t = 0; $x = -d_{ст}$; $\dot{x} = 0$, оскільки початок координат вибрано в положенні статичної рівноваги. На підставі другого закону Ньютона складемо диференціальне рівняння руху в повітрі:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{P},$$

в рідині

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{P} + \overline{R}.$$

У проекціях на координатну вісь Ox, вибрану вздовж траєкторії руху точки, дістанемо: $m\ddot{x} = -c(x + d_{cm}) + P$ або, беручи до уваги, що $cd_{ст} = P$ (в положенні статичної рівноваги) матимемо:

$\ddot{x} + k^2 x = 0$, диференціальне рівняння вільних коливань,

де $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Аналогічно до руху в рідині

$$m\ddot{x}=-c(x+d_{cm})-2a\,S\dot{x}+P,$$

або $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$, диференціальне рівняння затухаючих (згасаючих) коливань,

де $\quad n=\dfrac{sa}{m}$.

Із диференціального рівняння вільних коливань отримаємо період цих коливань:

$$T_1=\frac{2p}{k} \text{ або } T_1=2p\sqrt{\frac{m}{c}}\,.$$

Згідно з диференціальним рівнянням затухаючих коливань матеріальної точки знайдемо його рішення. Характеристичним рівнянням для нього буде

$$l^2+2n\,l+k^2=0.$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$l_{1,2}=n\pm\sqrt{n^2-k^2}=-n\pm i\sqrt{k^2-n^2}\,,$$

оскільки з умов досліду $k>n$, тобто відновлююча сила більша за силу опору, що й забезпечує коливальний характер руху матеріальної точки. Загальний розв’язок диференціального рівняння запишеться відповідно до теорії диференціальних рівнянь так:

$$x_{затух}=e^{-nt}(C_1\cos\sqrt{k^2-n^2}t+C_2\sin\sqrt{k^2-n^2}t).$$

Період затухаючих коливань

$$T_2 = \frac{2p}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Або з виразів для k^2 і n останню рівність можна записати у вигляді:

$$T_2 = \frac{p}{\sqrt{k^2 - \frac{S^2 a^2}{m^2}}}.$$

Виключаючи з виразів для визначення періодів T_1 і T_2 величину k, дістаємо:

$$T_2 = \frac{p}{\sqrt{\frac{p^2}{T_1^2} - \frac{S^2 a^2}{m^2}}}.$$

Розв'язуючи цю рівність відносно a, знайдемо:

$$a = \frac{pP}{Sg}\sqrt{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}.$$

9 ВІДНОСНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Другий закон динаміки матеріальної точки і отримані з нього і розглянуті у попередніх розділах рівняння справедливі лише тільки для так званого абсолютного руху точки, тобто руху у відношенню до інерціальної системи відліку. Але механічний рух за своєю природою є відносним. Його характер для одного й того самого тіла (матеріальної точки) залежить від вибору системи відліку. В одній системі відліку рух точки може бути прямолінійним рівномірним, в іншій – криволінійним, або складним, чи взагалі – зовсім відсутнім.

Якщо матеріальна точка здійснює рух відносно системи відліку, яка у свою чергу рухається відносно нерухомої (інерціальної) системи відліку, то такий рух точки називається у кінематиці складним рухом.

Для дослідження складного руху точки вводяться дві системи координат: система координат, зв’язана з нерухомим тілом (інерціальна система відліку), і рухома система координат, зв’язана з тілом, що рухається (неінерціальна система відліку).

Рух точки відносно інерціальної системи відліку називається абсолютним рухом. Рух неінерціальної системи відліку відносно інерціальної називається переносним рухом.

Поставимо собі за мету визначити відносний рух точки, тобто рух точки в неінерціальній системі відліку.

9.1 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Маємо інерціальну систему відліку $O_1x_1y_1z_1$ і матеріальну точку маси m, на яку діють прикладені сили $\overline{F}$ і $\overline{N}$ (рис. 27), де $\overline{F}$ – рівнодіюча заданих активних сил, $\overline{N}$ – рівнодіюча сил реакцій в’язей.

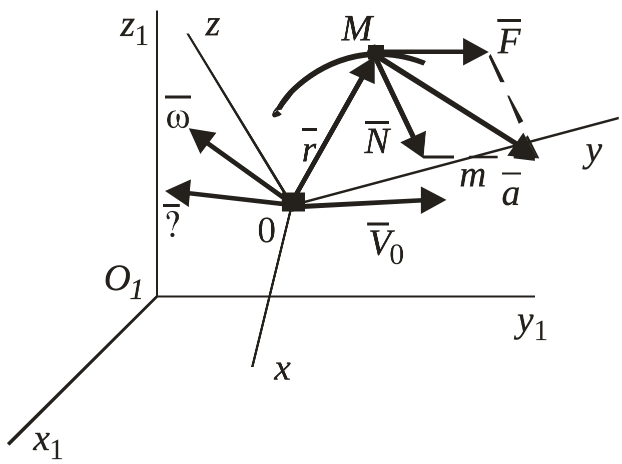

Рисунок 27

Якщо $\overline{a}$ – прискорення точки відносно інерціальній системи відліку (абсолютне прискорення), то відповідно до рівняння руху точки у векторній формі маємо:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{N} . \qquad (82)$$

Якщо ввести іншу, неінерціальну, систему відліку *Oxyz*, яка у загальному випадку може рухатися відносно інерціальній як вільне тверде тіло, то за теоремою додавання прискорень (теоремі Коріоліса) маємо:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k , \qquad (83)$$

де $\overline{a}_e$, $\overline{a}_r$, $\overline{a}_k$ – відповідно, переносне, відносне та коріолісове прискорення.

Підставляючи значення абсолютного прискорення $\overline{a}$ з виразу (83) у вираз (82) після переносу доданків, крім $m\overline{a}_r$, з лівої частини у праву, одержимо:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_к , \qquad (84)$$

де $\overline{\Phi}_e = - m\overline{a}_e$; $\overline{\Phi}_k = - m\overline{a}_k$ називаються, відповідно, переносною і коріалісовою силами інерції.

Отримані рівняння (84) називають динамічною теоремою Коріоліса або рівнянням відносного руху точки у векторній формі.

Матеріальна точка рухається відносно неінерціальної системи відліку так само, як і відносно інерціальної, якщо до прикладених до неї активних сил і реакцій в’язей додати переносну і коріалісову сили інерції.

Сили інерції $\overline{\Phi}_e$ і $\overline{\Phi}_k$ називають поправками на неінерціальність системи відліку. Для інерціальної системи відліку вони дорівнюють нулю, тому що в цьому випадку абсолютний і відносний рух точки збігаються. Переносна і коріолісова сили інерції беруть участь у створенні відносного прискорення зовсім так само, як і прикладені сили з боку матеріальних тіл.

Але ці сили інерції за визначенням прикладених сил класичної механіки не прикладені до матеріальної точки, тому що не беруть участь у створенні її прискорення відносно інерціальній системи відліку.

Переносна сила інерції точки в її відносному русі має напрям, протилежний до вектора переносного прискорення точки:

$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e. \tag{85}$$

Аналогічно, коріолісова сила інерції напрямлена протилежно до вектора коріолісового прискорення точки і за величиною дорівнює добутку маси точки і модуля коріолісового прискорення:

$$\overline{\Phi}_k = -m\overline{a}_k. \tag{86}$$

Сила $\overline{F}$ у рівнянні (84) є мірою механічної взаємодії даної точки з тілами, що її оточують. Величина і напрям сили $\overline{F}$ не залежать від того, в якій системі розглядається рух точки, вони однакові в різних системах.

Якщо координатами точки, яка рухається, щодо рухомої системи *Oxyz* координат у момент t часу являються *x, y, z,* то в проекціях на рухомі осі координат формула (84) набуде вигляду:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}; \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}; \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned}\right\}$$

Це є диференціальні рівняння руху точки щодо рухомої системи координат у проекціях на декартові рухомі осі координат. Вони відрізняються від диференціальних рівнянь абсолютного руху відносно інерціальної системи відліку тільки наявністю виправлень на неінерціальність системи відліку.

9.2 Окремі випадки відносного руху точки

9.2.1 Відносний рух за інерцією

Якщо матеріальна точка рухається щодо рухомої системи відліку прямолінійно і рівномірно, то такий рух називають відносним рухом за інерцією. У цьому випадку відносна швидкість $\overline{V}_r$ стала за величиною і напрямком, а тому відносне прискорення $\overline{a}_r = 0$. З формули (84) в цьому випадку отримаємо:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_к = 0. \tag{87}$$

Це умова рівноваги для сил при відносному русі точки за інерцією.

9.2.2 Відносна рівновага

При спокої матеріальної точки щодо рухомої системи відліку її відносні швидкість і прискорення дорівнюють нулю, тобто $\overline{V}_r = 0$ та $\overline{a}_r = 0$. Прискорення Коріоліса теж дорівнює нулю, тому що

$$\overline{a}_k = 2(\overline{w} \times \overline{V}_r).$$

З рівняння (84) одержуємо ***умову відносної рівноваги*** для сил:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e = 0. \tag{88}$$

При абсолютному русі за інерцією або абсолютній рівновазі відносно інерціальної системи відліку маємо для сил аналогічну умову $\overline{F} + \overline{N} = 0$. Умова відносної рівноваги для сил не відрізняється від умови відносного руху за інерцією.

9.2.3 Випадок поступального руху рухомої системи

Якщо неінерціальна система відліку здійснює поступальних рух відносно інерціальної системи відліку, то у цьому випадку коріолісове прискорення дорівнює нулю, тобто $\bar{a}_k = 0$, і отже коріолісова сила інерції також дорівнює нулю, тобто $\bar{\varPhi}_k = 0$. Тоді рівняння (84) набуває вигляду:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\varPhi}_e. \tag{89}$$

9.2.4 Принцип відносності класичної механіки. Інерціальні системи відліку

Переносне прискорення в загальному випадку обчислюється за формулою (див. рис. 27)

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}),$$

де $\bar{a}_0$ – прискорення точки, прийнятої за полюс, наприклад, початок координат рухомої системи координат;

$\bar{w}$ – кутова швидкість обертання рухомої системи координат навколо обраного полюса;

$\bar{e} = d\bar{w}/dt$ – кутове прискорення цього обертання;

$\bar{r}$ – радіус-вектор точки, яка рухається, щодо обраного полюса.

Нехай рухома система відліку увесь час рухається щодо основної інерціальній системи поступально, рівномірно і прямолінійно. У цьому випадку переносна і коріолісова сили інерції дорівнюють нулю, тобто

$$\bar{\varPhi}_e = m\bar{a}_e = 0; \ \bar{\varPhi}_k = m\bar{a}_k = 0,$$

тому що при поступальному русі $w = 0$ та $\bar{e} = d\bar{w}/dt = 0$. При рівномірному і прямолінійному русі $\bar{a}_0 = 0$. Таким чином, у цьому випадку з рівняння (84) одержуємо рівняння відносного руху

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{N} \;, \qquad (90)$$

яке збігається з рівнянням руху відносно інерціальній системи відліку (82).

Усі рухомі системи відліку, які рухаються поступально, рівномірно та прямолінійно щодо основної інерціальної системи відліку, називаються теж ***інерціальними.*** Відносно всіх інерціальних систем відліку виходять однакові рівняння руху матеріальної точки. Прискорення матеріальної точки щодо всіх інерціальних систем відліку однакові.

Відсутність принципової можливості яким-небудь механічним досвідом, заснованим на спостереженні за рухом матеріальних тіл, відрізнити одну інерціальну систему відліку від іншої перебуває в основі ***принципу відносності*** класичної механіки – принципу Галилея-Ньютона, який затверджує: *усі механічні явища в різних інерціальних системах відліку протікають однаково,* або: *ніяким механічним дослідженням не можна виявити інерціальний рух системи відліку, беручи участь разом з нею в цьому русі.*

Навпаки, неінерціальні системи відліку можна виявити й відрізнити одну від іншої за виправленнями на неінерціальність.

9.3 Вплив обертання Землі на рівновагу і рух матеріальної точки

При розв’язанні більшості технічних задач систему відліку, що пов’язана з Землею, вважають інерціальною (нерухомою). Тим самим не враховується добове обертання Землі навколо своєї осі у відношенні до зірок. Це обертання (один оберт за добу: 24 години) відбувається з кутовою швидкістю:

$$w = \frac{p\,n}{30} = \frac{p\cdot 1}{30\cdot 24\cdot 60\cdot 60} = 0{,}0000729\ \text{c}^{-1}.$$

Розглянемо, як впливає таке досить незначне обертання на рівновагу і рух матеріальної точки поблизу поверхні Землі.

Припустимо, що в точці M на поверхні Землі зважують будь-яке тіло (матеріальну точку) за допомогою, наприклад, пружинних ваг (рис. 28). Відповідно до умови відносного спокою (88) на матеріальну точку будуть діяти сила притягання до центра Землі $\overline{F}$, реакція пружини $\overline{N}$, яка згідно із законом дії і протидії дорівнює силі ваги $\overline{P}$ матеріальної точки, оскільки при зважуванні вимірюється саме ця сила, тобто

$$\overline{P} = -\overline{N}, \tag{91}$$

а ще сила інерції переносного руху $\overline{\Phi}_e$.

Тоді на підставі рівняння (88) і рівності (91) матимемо

$$\overline{P} = \overline{F} + \overline{\Phi}_e. \tag{92}$$

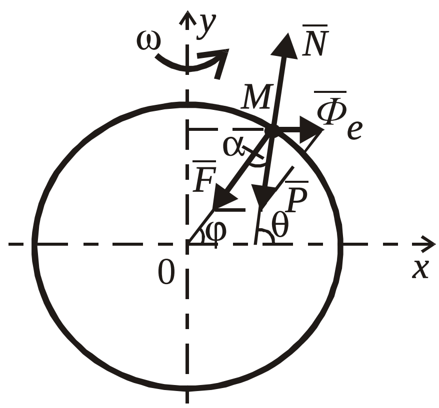

Рисунок 28

Отже, з рівняння (92) випливає, що сила ваги $\overline{P}$ на Землі є рівнодійною двох сил: сили притягання $\overline{F}$ і сили інерції переносного руху $\overline{\Phi}_e$, що виникає внаслідок обертання Землі навколо власної осі.

Кут j між лінією дії сили притягання $\overline{F}$ і площиною екватора (рис. 27) називається геоцентричною широтою місцевості, а кут q, тобто кут між лінією дії сил ваги $\overline{P}$ і площиною екватора, – географічною широтою місцевості.

Визначимо, наскільки величина сили ваги $\overline{P}$ відрізняється від сили притягання $\overline{F}$. Спроецюємо рівняння (92) на вісь, що збігається з напрямком вектора $\overline{P}$ (рис. 28), матимемо

$$P = F\cos a - \mathit{\Phi}_e \cos(j + a), \qquad (93)$$

де a – кут між лініями дії векторів $\overline{F}$ і $\overline{P}$.

Згідно із законом всесвітнього тяжіння величина сили $\overline{F}$

$$F = f\frac{Mm}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^{6})^2}m = 9{,}8265m,$$

де f – гравітаційна стала; M – маса Землі; $r = R$ – радіус Землі.

Величина сили інерції переносного руху $\mathit{\Phi}_e$

$$\mathit{\Phi}_e = mRw^2\cos j = 6{,}37\cdot 10^6\left(\frac{p}{43082}\right)^2 m\cos j \approx 0{,}034m\cos j\ ,$$

де w – кутова швидкість Землі.

Підставляючи значення F і $\overline{\mathit{\Phi}_e}$ у рівняння (93) і нехтуючи величиною кута a, отримаємо:

$$P \approx (9{,}8265 - 0{,}034\cos^2 j)m. \qquad (94)$$

З формули (94) випливає, що найбільше значення сила $\overline{P}$ має на полюсі, а найменше – на екваторі. На екваторі $g = 9{,}78$, а на полюсі 9,83. Для широти Києва ($j = 50°27'$) з формули (94) знаходимо $g = 9{,}812$ м/с^2.

Якщо спроєціювати сили $\overline{F}$, $\overline{P}$ і $\overline{\mathit{\Phi}_e}$ на вісь, перпендикулярну до лінії дії сили $\overline{P}$ (рис. 28), то можна визначити різницю між географічною і геоцентричною широтами:

$$F \sin a = \Phi_e \sin(j + a),$$

звідки

$$\mathrm{tg}\, a \approx \frac{0{,}034 \sin 2j}{2(9{,}8265 - 0{,}034 \cos^2 j} . \qquad (95)$$

Для широти Києва з формули (95) дістанемо $a \approx 5{,}86'$.

З розглянутого випливає, що сила ваги $\overline{P}$ за величиною мало відрізняється від сили притягання $\overline{F}$, і напрям вертикалі (лінії дії сили $\overline{P}$) утворює з напрямом сили $\overline{F}$ дуже малий кут a .

При складанні рівнянь руху матеріальної точки з урахуванням сили тяжіння можна записати рівняння відносного руху

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{P} + \overline{\Phi}_к .$$

Якщо ж осі, які пов’язані з Землею, вважати нерухомими, то нехтуючи силою інерції Коріоліса, сила буде дорівнювати:

$$\Phi_к = 2wV_r \sin a ,$$

де a – кут між віссю Землі і вектором відносної швидкості $\overline{V}_r$.

Так як кутова швидкість w Землі дуже мала, то якщо швидкість $\overline{V}_r$ не досить значна, то величиною $\Phi_к$ в порівнянні з силою тяжіння можна знехтувати. Наприклад, при $V_r = 700$ м/с (це швидкість звичайного артилерійського снаряду) і $a = 90°$ значення $\Phi_к$ складає лише 1% від сили тяжіння *P*. Тому в більшості інженерних розрахунків при вивченні руху тіл систему відліку, пов’язану з Землею, можна дійсно вважати інерціальною.

Наявність обертання Землі має практичне значення або при дуже великих швидкостях (швидкості польоту балістичних ракет), або для рухів, які продовжуються протягом значного часу (течії річок, повітряні і морські течії тощо).

Так при русі точки вздовж меридіана у північній півкулі з півночі на південь (рис. 29, а) коріолісове прискорення спрямовано на схід. Тоді сила інерції Коріоліса $\overline{\Phi}_к$ – на захід. При русі з півдня на північ – сила $\overline{\Phi}_к$ спрямована на схід. Обидві випадки показують, що точка внаслідок обертання Землі відхиляється вправо від напрямку її руху.

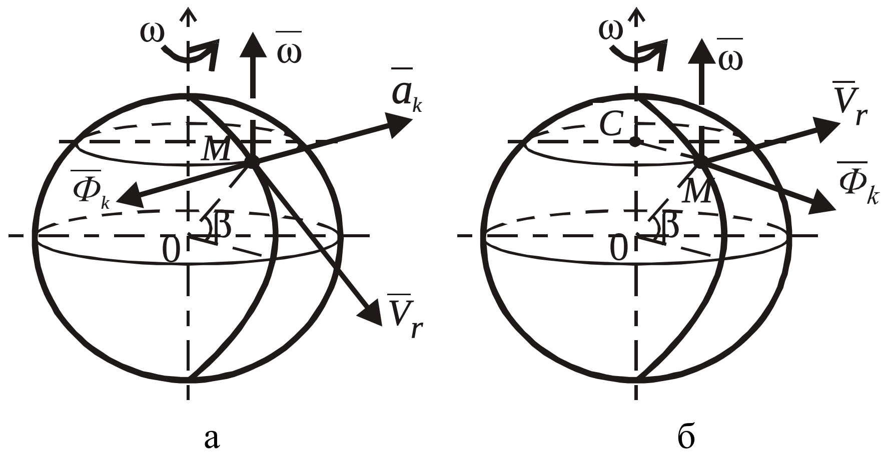

Рисунок 29

Якщо точка рухається вздовж паралелі на схід (рис. 29б), то прискорення Коріоліса $\overline{a}_k$ буде спрямовано вздовж радіуса *MC*, а сила інерції $\overline{\Phi}_к$ – у протилежний бік.

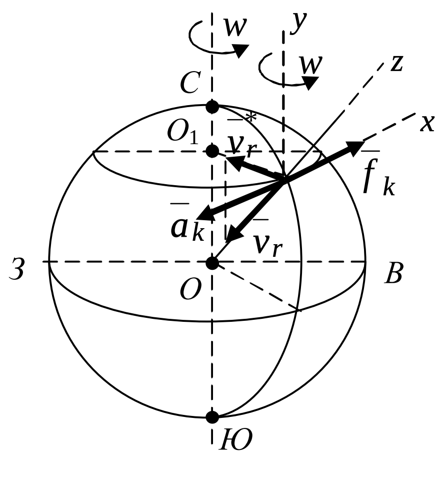

Рисунок 30

Вертикальна складова цієї сили, що спрямована вздовж *OM*, викликає незначну зміну ваги тіла, а горизонтальна складова, спрямована на південь, викличе відхилення точки також вправо від напрямку її руху. Аналогічний результат отримаємо при русі вздовж паралелі на захід.

Таким чином, можна зробити висновок: *у північній півкулі тіло, що рухається вздовж поверхні Землі в будь-якому напрямку, буде внаслідок обертання Землі відхилятися вправо від напрямку руху. У південній півкулі відхилення буде відбуватися вліво*.

Ці обставини пояснюють те, що річки, протікаючи в північній півкулі, розмивають правий берег (закон Бера). У цьому ж полягає причина відхилення вітрів сталого напрямку (пасати) і морських течій, а також повітряних мас в циклоні і антициклоні, де замість руху до центра циклона виникає циркулярний рух повітря навколо центра циклона (або антициклона).

Що стосується вертикального падіння, то з рисунку 1.30 видно, що *точка, яка вільно падає, відхиляється внаслідок обертання Землі від вертикалі до сходу*.

Тіло (матеріальна точка), кинуте вертикально вгору під час підйому, буде відхилятися на захід.

Величини цих відхилень дуже малі і помітні лише при досить великій висоті падіння чи підйому.

9.4 Методика розв'язання задач динаміки відносного руху матеріальної точки і приклади розв'язання задач

Розв'язання задач динаміки відносного руху матеріальної точки треба виконувати у такій послідовності:

1) розкласти абсолютний рух матеріальної точки на відносний і переносний, вибрати нерухому і рухому системи відліку;

2) записати початкові умови відносного руху матеріальної точки;

3) прикласти до точки всі активні сили;
4) застосовуючи аксіому про звільнення від в’язей, відкинути умовно в’язь, замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в’язі;
5) прикласти до точки переносну і коріолісову сили інерції;
6) скласти диференціальні рівняння відносного руху точки в проекціях на рухомі осі координат;
7) проінтегрувати диференціальні рівняння відносного руху точки і за початковими умовами руху точки визначити сталі інтегрування;
8) з одержаних рівнянь визначити шукані величини.

Приклад 10. *Нехай на стрижень АВ насаджено кільце масою m, яке під час рівномірного обертання кривошипа I зі сталою кутовою швидкістю w може рухатися вздовж нього без тертя. Потрібно дослідити рух кільця відносно поступально рухомого стрижня АВ, якщо довжина кривошипа становить r, а стрижня – l (рис. 31).*

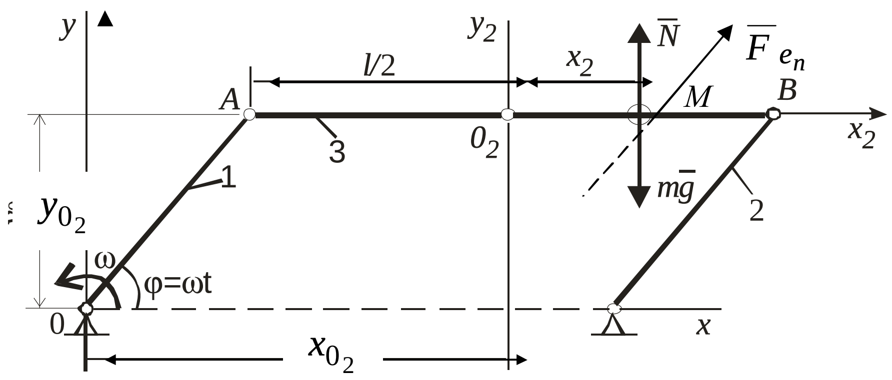

Рисунок 31

Розв’язання

Розглянемо абсолютний рух кільця, яке надалі будемо вважати матеріальною точкою, як відносний (вздовж стрижня *АВ*) і переносний (разом зі стрижнем, що рухається поступально). Оберемо x_{oy} – нерухому систему відліку. Система осей $O_2x_2y_2$ незмінно зв'язана зі стрижнем *AB*, і її поступальний рух є переносним для точки, відносний рух якої досліджується. Запишемо початкові умови руху: при t_0=0; x_{2o}=0; $\dot{x}_{2o} = 0$. Прикладаємо до точки активну силу $m\overline{g}$ і нормальну реакцію $\overline{N}$ стрижня *AB*. Так як переносний рух поступальний, то коріолісова сила інерції дорівнює нулю. Переносна сила інерції мала б складатися з двох частин:

$$\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_{et} + \overline{\Phi}_{en},$$

так як маємо поступальний рух за криволінійною траєкторією, але кривошипи 1 і 2 рухаються зі сталою кутовою швидкістю, тому їх кутове прискорення дорівнює нулю. Дорівнює нулю і дотичне прискорення точки *A*. А так, як стрижень рухається поступально, то прискорення точок *A* і *M* рівні між собою, тому $\Phi_{e\tau}$=0. $\overline{\Phi}_{en}$ спрямовано протилежно нормальному прискоренню точки $M(a_M^n = a_A^n = a_e^n)$. Для визначення відносного руху кільця складемо диф.рівняння руху у проекціях на рухомі осі координат:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_{o2} \\ 0 = -mg + N - m\ddot{y}_{o2} \end{cases}$$

Виражаємо абсолютні координати рухомого початку O_2 системи $O_2x_2y_2$ через кут обертання j кривошипа 2:

$$x_{O_2} = r\cos j + l/2, \qquad y_{O_2} = r\sin j\ .$$

Продиференціюємо двічі за часом дані залежності, враховуючи, що

$$j = wt.$$

Отримаємо

$$\ddot{x}_{O_2} = -rw^2\cos j\ , \qquad \ddot{y}_{O_2} = -rw^2\cos j\ .$$

Тоді рівняння відносного руху кільця наберуть вигляду

$$\ddot{x}_2 = r\omega^2 \cos\varphi\ ;$$

$$0 = -mg + N + mr\omega^2 \sin\varphi\ .$$

Із другого рівняння визначаємо нормальну реакцію:

$$N = mg - mr\omega^2 \sin\varphi = m(g - r\omega^2 \sin\varphi).$$

Інтегруючи перше рівняння, дістаємо загальний розв’язок:

$$\dot{x}_2 = r\omega \sin\omega t + C_1,$$

$$x_2 = -r\cos\omega t + C_1 t + C_2.$$

Із початкових умов визначаємо сталі інтегрування $C_1 = 0,\ C_2 = r$ остаточно отримаємо кінематичне рівняння відносного руху кільця

$$x_2 = r(1 - \cos\omega t).$$

Це гармонічні коливання кільця відносно горизонтального стрижня, що перебуває в заданому поступальному русі.

Приклад 11. *Нехай прямолінійна трубка, в якій знаходиться маленька кулька масою* m*, обертається в горизонтальній площині навколо центра O зі сталою кутовою швидкістю* ω *(рис. 32), треба визначити рух цієї кульки відносно трубки, якщо в початковий момент часу кулька знаходилась у спокої на відстані а від точки O.*

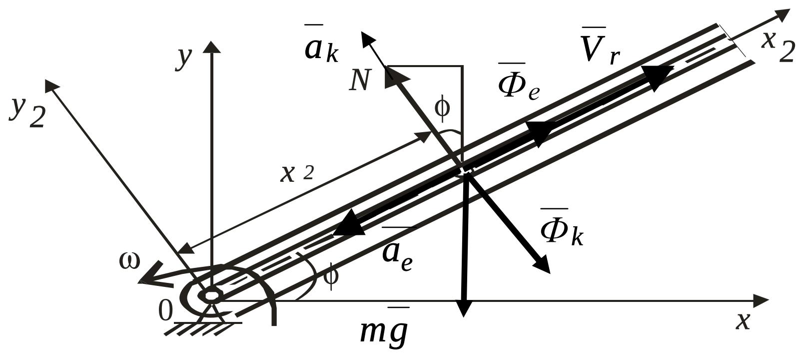

Рисунок 32

Розв’язання

Рух кульки вздовж трубки – відносний, а разом з трубкою – переносний.

Зв’яжемо з обертовою трубкою систему осей $O_2x_2y_2$, сумістивши вісь O_2x_2 з віссю трубки. Якщо знехтувати тертям, то на кульку в довільному положенні трубки, що визначається кутом $\varphi = \omega t$, у горизонтальній площині діє єдина сила – нормальна реакція стінки трубки *N*.

Скористаємось основними рівняннями динаміки відносного руху у проекціях на декартові осі і складемо диференціальні рівняння відносного прямолінійного руху кульки в даному випадку. При цьому врахуємо, що $\varphi_2 = \varphi$, $\omega_2 = \omega$, $\varepsilon_2 = 0$, $y_2 = 0$, $x_{O_2} = y_{O_2} = 0$. Матимемо:

$$m\ddot{x}_2 = \Phi_e - mg\sin\varphi \;;$$

Переносна сила інерції $\overline{\Phi}_e = ma_e = m\omega^2 x_2$, тоді:

$$m\ddot{x}_2 = m\omega^2 x_2 - mg\sin\omega t\text{, або}$$

$$\ddot{x}_2 - \omega^2 x_2 = -g\sin\omega t;$$

Розв’язання цього неоднорідного рівняння складається з загального і частинного рішення:

$$x_2 = x_2^* + x_2^{**}.$$

$$x_2^* = C_1 e^{-wt} + C_2 e^{wt};$$

$$x_2^{**} = A\sin wt;$$

Знаходимо похідні:

$$\dot{x}_2 = wA\cos wt;\ \ddot{x}_2^{**} = w^2 A\sin wt, \text{ тоді}$$

$$-w^2 A\sin wt - w^2 A\sin wt = -g\sin wt;$$

$$2w^2 A = g, \text{ звідки } A = \frac{g}{2w^2}.$$

Остаточно рішення диф.рівняння відносного руху кульки має вигляд:

$$x_2 = C_1 e^{-wt} + C_2 e^{wt} + \frac{g}{2w^2}\sin wt.$$

Знаходимо похідну:

$$\dot{x}_2 = -wC_1 e^{-wt} + wC_2 e^{wt} + \frac{g}{2w}\cos wt.$$

Сталі інтегрування знаходимо з початкових умов:

$$t=0;\ x_{2o}=a;\ \dot{x}_{2o} = 0.$$

$$\begin{cases} a = C_1 + C_2 \\ 0 = -wC_1 + wC_2 + \dfrac{g}{2w} \end{cases}$$

$$C_1 = (a - C_2);$$

$$0 = -wa + wC_2 + wC_2 + \frac{g}{w};$$

$$2C_2 w = wa - \frac{g}{w};$$

$$C_2 = \frac{a}{2} - \frac{g}{2w^2}, \text{ тоді } C_1 = \frac{a}{2} + \frac{g}{2w^2}.$$

А закон відносного руху кульки має вигляд:

$$x_2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{g}{2w^2}\right)e^{-wt} + \left(\frac{a}{2} - \frac{g}{2w^2}\right)e^{wt} + \frac{g}{2w^2}\sin wt.$$

10 ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

Варіант 1

1 Вивести диференціальне рівняння вільних коливань з урахуванням сили опору, пропорційної швидкості руху.
2 Записати окреме рішення диференціального рівняння вимушених коливань без урахування опору.
3 Записати формулу для визначення періоду вільних коливань.
4 Дати визначення амплітуди вільних коливань.
5 Записати динамічну теорему Коріоліса та сформулювати її.

Варіант 2

1 Вивести диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням сили опору.
2 Записати рішення диференціального рівняння вільних коливань.

3 Записати формулу для визначення частоти вільних коливань.
4 Сформулювати поняття “статична деформація пружини”.
5 Сформулювати окремий випадок відносного руху за інерцією. Записати формулу.

Варіант 3

1 Вивести диференціальне рівняння вертикальних вільних коливань точки.
2 Записати окреме рішення диференціального рівняння вимушених коливань без опору та у випадку резонансу.
3 Записати формулу для визначення початкової фази вільних коливань.
4 Які коливання називаються згасаючими?
5 Записати і сформулювати 3-й окремий випадок відносного руху (принцип класичної механіки).

Варіант 4

1 Вивести диференціальне рівняння вимушених коливань без урахування сили опору.
2 Записати рішення диференціального рівняння згасаючих коливань ($k>n$).
3 Які коливання називаються вільними?
4 Записати формулу для визначення амплітуди вільних коливань.
5 Сформулювати та записати окремий випадок відносного руху – відносний спокій.

Варіант 5

1 Вивести диференціальне рівняння вільних коливань точки.

2 Записати рішення диференціального рівняння вільних коливань при існуванні опору, пропорційного швидкості у випадку $n>k$ (у випадку аперіодичного руху точки).
3 Які коливання називаються вимушеними?
4 Записати формулу для визначення статичної деформації пружини.
5 Сформулювати особливості окремого випадку відносного руху на поверхні Землі (рух в північній півкулі).

Варіант 6

1 Вивести диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням сили опору.
2 Записати рішення диференціального рівняння вільних коливань при існуванні опору, пропорційного швидкості у випадку $n=k$ (у випадку аперіодичного руху точки).
3 Дати визначення резонансу.
4 Записати формулу для визначення періоду вільних коливань (через статичну деформацію пружини).
5 Сформулювати особливості окремого випадку відносного руху поблизу поверхні Землі (вертикальне падіння).

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики : учебник для технических вузов 8-е изд.,стереот. – Спб. : Лань, 2001. – 768 с.

2 Короткий довідник з теоретичної механіки: навч. посібник / І.П. Смерека [та ін.]. – Львів : Інтеллект-Захід, 2001. – 240 с.

3 **Мещерский, И.В.** Задачипо теоретической механике : учеб. пособие / В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 39-е изд., стер. – М. : Лань, 2002. – 448 с.

4 **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики : ученик для вузов. – 12-е изд., стер. – М. : Высш.шк., 2002. – 416 с.

5 Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для тех. вузов / А.А. Яблонского. – 7-е изд., испр. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – 384 с.

6 **Павловський, М.А.** Теоретична механіка : підручник.– К. : Техніка, 2002. – 512 с.

7 **Аркушу, А.И.** Руководство к решению задач по теоретической механике : учебное пособие. – 5-е изд., испр. – М. : Высш.шк., 2002. – 336 с

8 **Бондаренко, А.А.** Теоретична механіка : підручник у 2-х частинах. Ч.2 / А.А.Бонбаренко, О.О.Дубінін, О.М.Переяславцев. – К. : Знання, 2004. – 590 с.

9 **Федуліна, А.І.** Теоретична механіка : навч. посібник. – К. :Вища шк., 2005. – 319 с.

10 **Токар, А.М.** Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: навч. посібник. – К. : Либідь, 2006. – 440с.

Навчальне видання

ВОДОЛАЗСЬКА Олена Георгіївна
ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович
ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

Динаміка матеріальної точки

Навчальний посібник
для студентів всіх спеціальностей

Редактор I.I.Дьякова

Комп'ютерна верстка O.C.Орда

172/2007. Підп. до друку Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 6,05. Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Крама=орськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003